Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(III этап)

Теоретический тур

<u>9 класс.</u>

1. Полный комплект состоит из трех заданий.

2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.

3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!

3. Подписывать рабочие листы запрещается.

4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.

5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

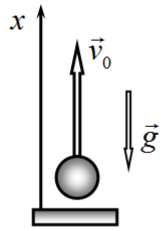
Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!
Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Пакет заданий содержит:
- титульный лист (1 стр.);
- условия 3 теоретических задач (6 стр.).

Задание 1. Разминка.

*Задание состоит из трех разных задач,
объединенных одной общей математической идеей.*

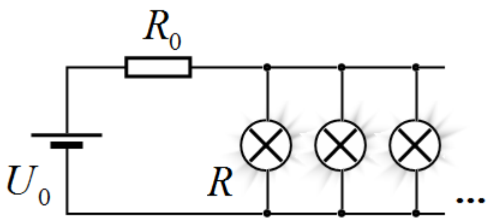
Задача 1.1



Небольшой шарик бросают вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Направим ось x вертикально, начало отсчета совместим с точкой бросания шарика. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.1.1 Запишите закон движения шарика (зависимость его координаты от времени) $x(t)$.
1.1.2 Запишите уравнение, позволяющее определить, через какое время τ шарик будет находиться на высоте h.
1.1.3 Укажите, при каком соотношении между параметрами: начальной скорости v_0, ускорения свободного падения g, высоты h, уравнение для времени движения τ имеет: два различных решения; единственное решение; не имеет решений. Укажите физический смысл того, что задача имеет разное число решений.
1.1.4 Определите максимальную высоту h_{max}, на которую поднимется шарик при своем движении.

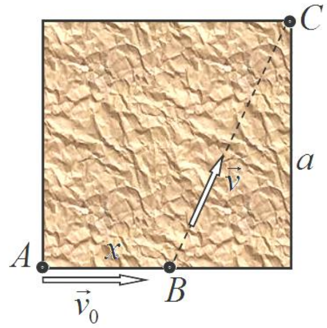
Задача 1.2.



Новогодняя гирлянда состоит из n одинаковых, параллельно соединенных лампочек подключена к источнику постоянного напряжения $U_0 = 9{,}0\,В$. Общее сопротивление подводящих проводов и источника равно $R = 1{,}2\,Ом$. Сопротивлением проводов между лампочками можно пренебречь. Сопротивление каждой лампочки равно $R_0 = 20{,}0\,Ом$ и не зависит от силы тока, протекающего через лампочку.

1.2.1 Найдите, при каком числе лампочек, суммарная мощность гирлянды будет равна P.
1.2.2 Определите, чему может быть равна максимальная мощность гирлянды P_{max}. При каком числе лампочек n_1, достигается эта максимальная мощность?

Задача 1.3.

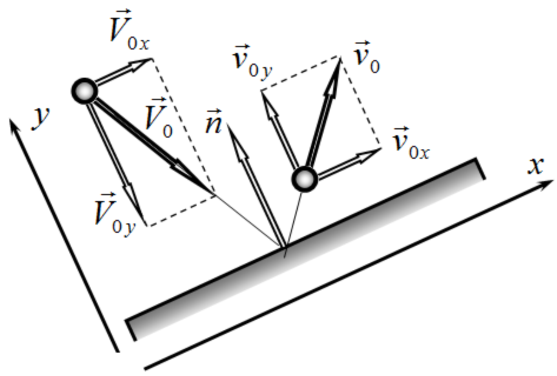


Человек должен пересечь квадратное вспаханное поле, длина стороны которого равна a от одного угла поля A до противоположного угла C. Скорость движения человека по краю поля равна v_0, а по пашне в n раз меньше $v = \frac{v_0}{n}$. Человек решает пройти вдоль края поля некоторое расстояние x (до точки B), а потом по пашне по прямой до точки C.

1.3.1 При каком значении x время движения от точки A до точки C будет минимально?

Задание 9-2. Неупругий удар.

При описании удара движущегося тела о неподвижную стенку часто используется модель абсолютно упругого удара, при котором модуль скорости тела не изменяется, а угол падения равен углу отражения. Однако такая модель не всегда корректно описывает реальные столкновения.



Более общей является модель неупругого удара, которая используется в данной задаче. Пусть движущееся тело (которое рассматривается как материальная точка) сталкивается с неподвижной плоской поверхностью. Направим ось Ox вдоль поверхности, а ось Oy перпендикулярно ей.

Вектор скорости движущегося тела $\vec{V}_0$ удобно разложить на две составляющие: параллельную плоскости - $\vec{V}_{0x}$ (тангенциальная составляющая); перпендикулярную плоскости - $\vec{V}_{0y}$ (нормальная составляющая). Обозначим вектор скорости после удара $\vec{v}_0$. Будем считать, что проекции этого вектора связаны с компонентами вектора скорости до удара следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \gamma_1 V_{0x} \\ v_{0y} &= -\gamma_2 V_{0y} \end{aligned} . \qquad (1)$$

В этих формулах безразмерные коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2 < 1$ называется коэффициентами восстановления. Коэффициент γ_1, описывающий изменение тангенциальной компоненты скорости, определяется силой трения, действующей на тело в ходе столкновения. Коэффициент γ_2, описывающий изменение нормально компоненты скорости, определяется упругими свойствами поверхности и движущегося тела.

Во всех частях данной задаче используется модель, в которой

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0{,}80 . \qquad (2)$$

Т.е. модули обеих проекций скорости при ударе уменьшаются в одно и тоже число раз.

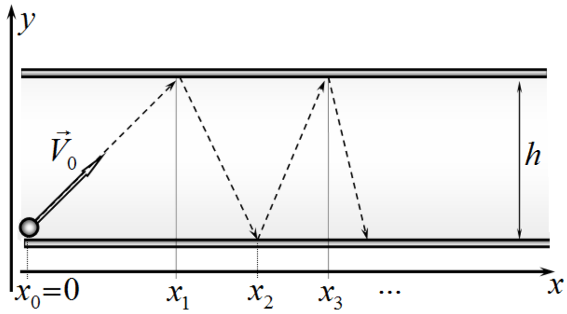
<u>Подсказка.</u>
При решении данной задачи вам может понадобиться формула для суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} . \qquad (3)$$

Все, приведенные в условии рисунки, являются схематическими и носят иллюстративный характер. Ссылаться на них в решении задачи не следует!

Часть 1. Движение в горизонтальной плоскости.

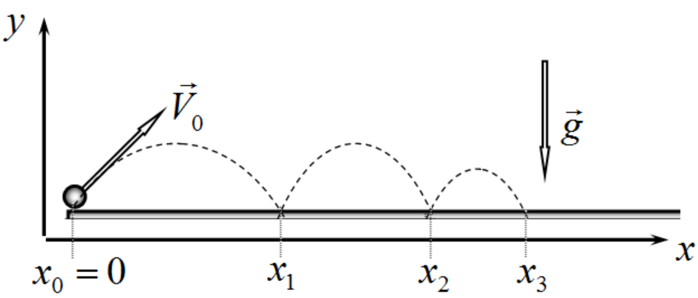
На горизонтальной плоскости на расстоянии h друг от друга закреплены две параллельные стенки. Между этими стенками движется небольшое тело (материальная точка), периодически сталкиваясь со стенками. Введем систему координат, ось Ox которой направлена параллельно стенкам, а ось Oy перпендикулярно им. В начальный момент времени тело касается одной из стенок (в начале координат). Телу толчком сообщают скорость $\vec{V}_0$, такую, что проекции этого вектора на ось координат равны $V_{0x} = V_{oy} = v_0$. Трением тела о горизонтальную поверхность можно пренебречь.



1.1	Получите общую формулу для координат точек столкновения тела со стенками $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$
1.2	В выбранном Вами масштабе постройте траекторию движения тела до его 5-го столкновения со стенками.
1.3	Найдите, чему равна средняя скорость движения шарика за время от начала движения до n-го столкновения со стенками.

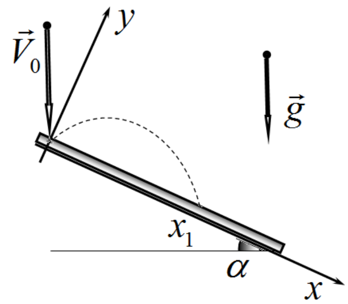
Часть 2. Прыжки по горизонтальной поверхности.

Рассматриваемое тело может двигаться в вертикальной плоскости, испытывая столкновения с плоской горизонтальной поверхностью. В начальный момент времени тело находится в начале координат (ось Ox горизонтальна, ось Oy - вертикальна), и ему сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, такую, что проекции этого вектора на оси координат равны $V_{0x} = V_{oy} = v_0$. Ускорение свободного падения равно $\vec{g}$, сопротивление воздуха не учитывать.



2.1	Получите общую формулу для координат точек столкновения тела с горизонтальной поверхностью $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$
2.2	Найдите, на какое максимальное расстояние вдоль оси Ox сместится шарик.

Часть 3. Столкновения с наклонной плоскостью.



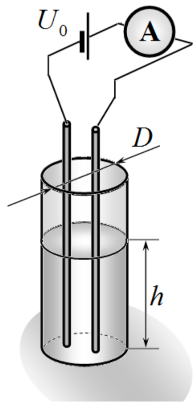
Рассматриваемое тело падает вертикально на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. В момент удара о плоскость скорость тела равна $\vec{V}_0$. Совместим начало системы отсчета с точкой первого столкновения тела с наклонной плоскостью. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости, ось Oy перпендикулярно ей.

3.1 Рассчитайте координату x_1 следующего столкновения тела с плоскостью.
3.2 При каком значении γ все «прыжки» тела будут одинаковыми?

Задание 9-3. Форма полости.

Для определения размеров внутренней полости сосуда можно использовать электрические измерения. Два тонких проводящих параллельных проводящих стержня опускают вертикально в сосуд с жидкостью и измеряют электрическое сопротивление между ними. В процессе всех измерений расстояние между стержнями остается неизменным, используется одна и та же жидкость. Стержни располагаются вблизи середины сосудов.

Часть 1. Цилиндрические сосуды.



Стержни опускают в вертикальный цилиндрический сосуд до его дна, в который медленно добавляют жидкость. К стержням подключают источник постоянного напряжения $U_0 = 4{,}5 B$ и последовательно подключенный амперметр.

Проведены измерения зависимости силы электрического тока I (в Амперах) от объема налитой жидкости V (в миллилитрах – см^3). Результаты измерений для трех разных сосудов показаны на Графике 1.

Оказалось, что полученные все полученные зависимости оказались линейными и описываются простой формулой

$$I = kV \qquad (1)$$

Коэффициент k зависит от диаметра сосуда. Численные значения этого коэффициента для разных значений внутреннего диаметра D (в см) сосуда приведены в Таблице 1.

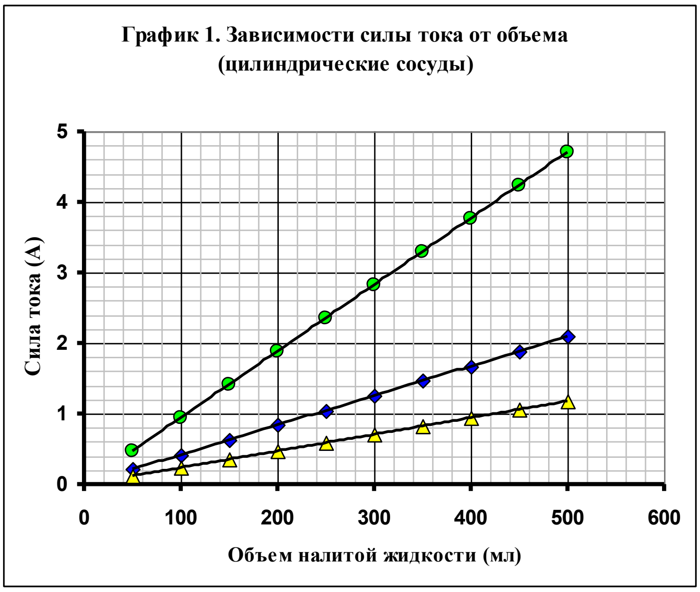


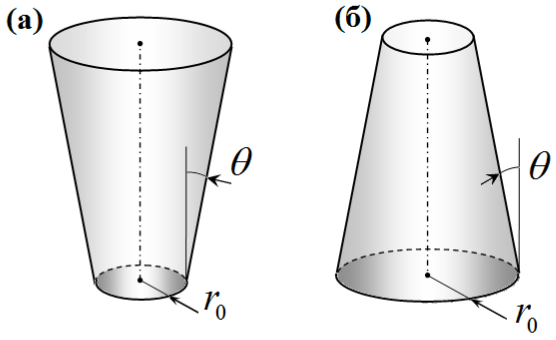
Таблица 1.

D, см	$k \cdot 10^3$, $A \cdot см^{-3}$
4,0	9,4
6,0	4,2
8,0	2,4

1.1	Найдите теоретическую зависимость электрического сопротивления R между стержнями от высоты уровня жидкости в сосуде h - $R(h)$. Эта функция должна содержать только переменную h и численные параметры (или один параметр). Укажите физический смысл этих параметров (параметра) функции $R(h)$.
1.2	Используя данные Таблицы 1, рассчитайте численные значения параметров (параметра) зависимости $R(h)$ для всех значений диаметров сосудов.
1.3	Укажите, подтверждается или нет полученная Вами в п.1.1 теоретическая формула.

Часть 2. Конический сосуд.

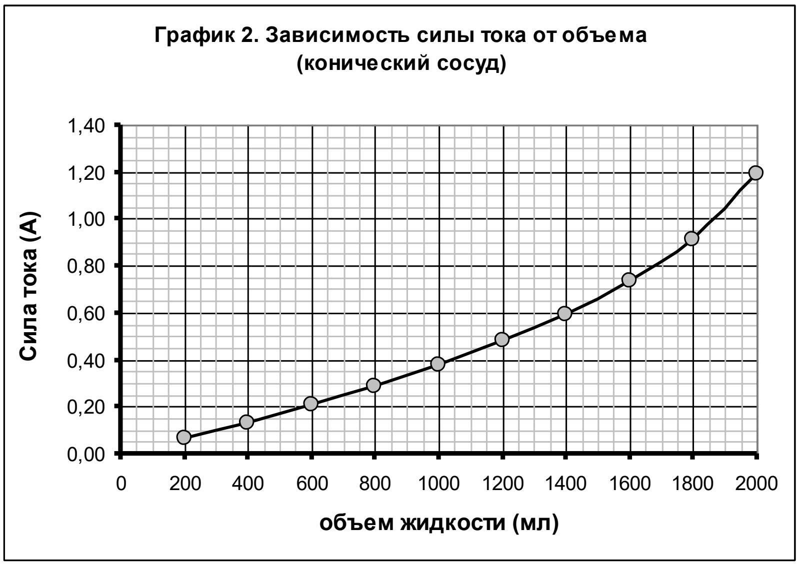
Стержни опускают до дна в сосуд, внутренняя полость которого имеет вид усеченного конуса. Заметим, что форма полости может иметь вид либо (а), либо (б), как показано на рисунке – далее Вам будет необходимо определить, в каком сосуде проведены измерения. Затем с помощью той же электрической схемы проводят измерения зависимости электрического силы тока I между стержнями от объема V налитой в сосуд жидкости. Результаты измерений этой зависимости приведены в Таблице 2 и на Графике 2.



Результаты измерений имеют некоторые погрешности.

Таблица 2.

$V, см^3$	I, A
200	0,064
400	0,133
600	0,208
800	0,289
1000	0,379
1200	0,479
1400	0,596
1600	0,735
1800	0,915
2000	1,189

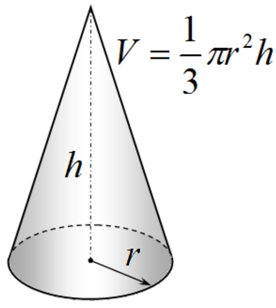


2.1 Укажите, какой сосуд (а), или (б) использовался в данном эксперименте.
2.2 Используя экспериментальные данные Таблицы 2, постройте график зависимости радиуса сосуда r от расстояния до его дна h - $r(h)$. Рассчитайте с максимальной точностью геометрические параметры сосуда – радиус основания r_0 и угол θ, который образует боковая стенка сосуда с вертикалью. Приведите все формулы, по которым Вы провели расчеты.

Подсказка. Можно считать, что при добавлении очередной порции жидкости в сосуд изменение уровня жидкости в сосуде значительно меньше радиуса дна сосуда.

<u>Примечание.</u> Объем прямого кругового конуса равен одной трети от произведения площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(III этап)

Теоретический тур

<u>10 класс.</u>

1. Полный комплект состоит из трех заданий.

2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.

3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!

3. Подписывать рабочие листы запрещается.

4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.

5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!
Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Пакет заданий содержит:
- титульный лист (1 стр.);
- условия 3 теоретических задач (6 стр.).

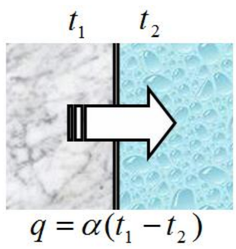
Задание 10-1. Теплоотдача.

В данном задании рассматриваются процессы установления теплового равновесия в различных системах. Для решения задачи Вам понадобятся следующие (почти очевидные) теоретические сведения.

1. Если два тела приведены в тепловой контакт, то количество теплоты, перетекающее через единицу площади соприкосновения (поток теплоты) в единицу времени пропорционально разности температур тел

$$q = \alpha(t_1 - t_2)\,, \qquad (1)$$

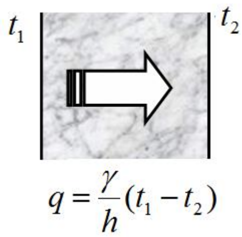
коэффициент α называется коэффициентом теплоотдачи и является характеристикой соприкасающихся тел.



2. Поток теплоты в единицу времени через слой вещества толщиной h пропорционален разности температур границ слоя и обратно пропорционален толщине слоя h:

$$q = \frac{\gamma}{h}(t_1 - t_2)\,. \qquad (2)$$

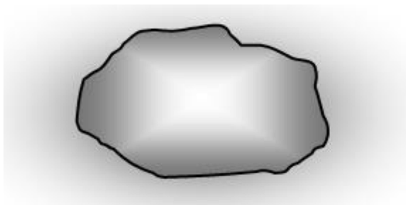
Коэффициент γ называется коэффициентом теплопроводности и является характеристикой вещества.



Во всех задачах данного раздела рассматривается стационарный режим, когда распределение температур не зависит от времени.

Задача 1.1. Радиоактивный метеорит.

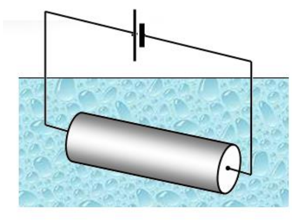
Оказалось, что сплошной однородный метеорит состоит из радиоактивного материала. Вследствие радиоактивного распада внутри метеорита постоянно выделяется теплота. Теплопроводность метеорита очень велика. Метеорит помещают в жидкость, температура которой поддерживается постоянной. Оказалось, что установившаяся температура метеорита превышает температуру окружающей жидкости на величину $(\Delta t)_0$.



1.1.1 Чему будет равна разность температур метеорита и окружающей жидкости $(\Delta t)_1$, если все линейные размеры метеорита увеличить в n раз?

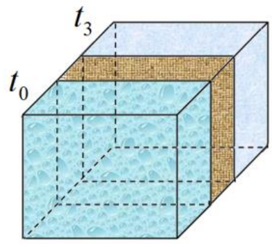
Задача 1.2. Цилиндрический нагреватель.

В качестве нагревателя электронагревателя служит однородный цилиндр, подключенный торцами к токоподводящим контактам, электрическим сопротивлением которых можно пренебречь. Теплопроводность нагревателя очень велика. Нагреватель подключен к источнику постоянного напряжения. В кипящей воде (при нормальном атмосферном давлении) температура нагревателя равна $t_0 = 120°C$. Все линейные размеры цилиндра увеличивают на 25%.



1.2.1 Чему будет равна температура такого увеличенного цилиндра в кипящей воде, при его подключении к тому же источнику напряжения?

Задача 1.3. Теплоизоляция.



Для изучения теплоизоляционных свойств материала, из него изготовили плоскую пластину, которую поместили в сосуд в качестве перегородки, разделив сосуд на две части. Сосуд заполняют водой. Причем с одной стороны от пластины температуру воды поддерживают постоянной и равной $t_0 = 100°C$. С другой стороны пластины - вода, находящаяся при постоянной температуре $t_3 = 10{,}0°C$. После установления теплового равновесия проводят измерения температур поверхностей пластины, которые обозначим: t_1 - температура стороны пластины, обращенной к горячей воде; t_2 - температуру стороны, контактирующей с холодной водой. По результатам измерений оказалось, что $t_2 = 15{,}0°C$.

1.3.1 Чему равна температура другой стороны пластины t_1?
1.3.2 Чему будут равны температуры обеих сторон пластины, если толщину пластины увеличить в 2 раза? Температуры воды с разных сторон от пластины остались неизменными.

При решении данной задачи допускается проведение промежуточных численных расчетов.

Задание 10-2. Молекулярная физика с химией.

Многие химические реакции протекают в газовой фазе. При изменении химического состава газовых смесей (вследствие протекания химических реакций) зависимости параметров газов (давления, температуры) меняют свой привычный вид. В данном задании вам необходимо рассмотреть влияние простой обратимой химической реакции на параметры газов. Все газы можно считать идеальными.

Трехатомная молекула A_2B (A и B - символы химических элементов, например, молекула CO_2) может самопроизвольно распасться под действием теплового движения на две молекулы:

$$A_2B \to AB + B \tag{1}$$

Если в сосуде находится N_1 молекул A_2B, то за малый промежуток времени Δt распадается

$$\Delta N_1 = aN_1\Delta t \tag{2}$$

молекул A_2B. Постоянная a называется скоростью распада (считайте ее известной). Возможна и обратная реакция рекомбинации (объединения) молекул:

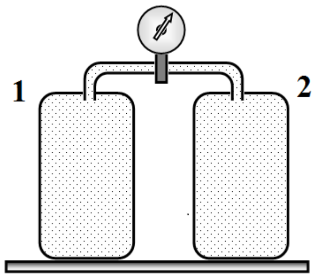
$$AB + B \to A_2B + q\,. \tag{3}$$

Если в сосуде находится N_2 молекул AB, то за малый промежуток времени Δt в реакцию вступают

$$\Delta N_2 = bN_2 n_3\Delta t \tag{4}$$

молекул AB. Постоянная b называется скоростью рекомбинации (эта величина также известна). В формуле (4) n_3 - концентрация молекул B. При рекомбинации молекул выделяется теплота q (в расчете на одну образовавшуюся молекулу).

Для исследования этой реакции используется следующая установка. Два одинаковых герметических сосуда соединены трубкой, в которую вмонтирован манометр, позволяющий измерять малую разность давлений в сосудах $\Delta P = P_1 - P_2$. Также имеется возможность измерять температуры газов в сосудах. Объемы сосудов равны V. Первый сосуд заполняют одним молем исследуемого газа A_2B. Во втором сосуде содержится один моль идеального стабильного газа (т.е. никаких реакций в этом сосуде не происходит). Температура газа в этом сосуде поддерживается постоянной и равной T_0.



Считайте, что в начальный момент времени $t = 0$ в сосуде содержится только трехатомный газ A_2B. Затем в этом сосуде начинаются описанные реакции (1) и (3). Обозначим: число молекул A_2B, AB, B в сосуде 1: N_1, N_2, N_3, соответственно, а концентрации этих молекул - n_1, n_2, n_3. Начальную концентрацию молекул A_2B (когда других молекул в сосуде нет) - n_0.

Часть 1. Изотермический процесс.

В этой части задания будем считать, что температура газа в сосуде 1 поддерживается постоянной и равной T_0.

1.1 Выразите начальную концентрацию молекул в сосуде n_0 через параметры, приведенные в условии задачи. Выразите концентрации молекул A_2B и B n_1, n_3 через концентрацию молекул AB - n_1.

Так как все концентрации выражаются через концентрацию молекул AB, то далее эту концентрацию будем обозначать $n_2 = n$. Также можете использовать значение начальной концентрации n_0 как известное.

1.2 Получите уравнение, описывающее скорость изменения концентрации молекул AB с течением времени $\frac{\Delta n}{\Delta t}$.

По прошествии некоторого времени в сосуде устанавливается динамическое равновесие, при котором значения концентраций газов в сосуде не изменяются.

1.3 Рассчитайте равновесные концентрации всех газов в сосуде после достижения теплового равновесия $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$.

Далее будем считать, что скорость распада молекул значительно меньше скорости их рекомбинации $a << bn_0$.

1.4 Получите приближенные формулы для равновесных концентраций всех газов в сосуде после достижения теплового равновесия $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ при выполнении условия (5).

Далее используйте эти приближенные формулы для равновесных концентраций.
Также используйте приближенные методы и формулы. Например, при $x, y << 1$ можно использовать приближенную формулу

$$\frac{1+x}{1+y} \approx 1 + x - y.$$

При наличии в формулах малого безразмерного параметра в разных степенях, оставляют слагаемые, в которых степень малого параметра минимальна.

1.5 Найдите разность давлений в сосудах ΔP после достижения динамического равновесия.
1.6 Оцените характерное время τ достижения динамического равновесия.

Часть 2. Процесс без теплообмена.

В этой части задания считайте, что сосуды являются теплоизолированными. Теплоемкостью сосудов можно пренебречь. По-прежнему, считайте, что в момент времени $t = 0$ в сосуде 1 содержится только газ A_2B при температуре T_0 в количестве одного моля. Молярные теплоемкости двухатомного AB и данного трехатомного газов A_2B в изохорном процессе равны $C_V = \frac{5}{2}R$, а одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$.

2.1 Рассчитайте изменение температуры газа $\Delta T = T - T_0$ при достижении динамического равновесия в сосуде.
2.2 Найдите разность давлений в сосудах ΔP после достижения динамического равновесия в теплоизолированном сосуде 1.

Задание 10-3. Скатывание без проскальзывания.

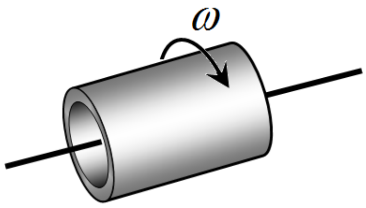
Существует множество задач, в которых брусок движется по наклонной плоскости при наличии трения. В зависимости от коэффициента трения и угла наклона плоскости брусок может либо скользить по плоскости, либо покоится.

Если на наклонную плоскость поместить трубку, то она всегда будет скатываться, но может катиться либо без проскальзывания, либо проскальзывать.

Целью данного задания является анализ такого движения. Далее будем рассматривать однородную тонкостенную трубку, радиус которой равен R, а масса m равномерно распределена по стенкам трубки. Толщина стенок трубки значительно меньше ее радиуса.

Часть 1. Динамика вращательного движения.

Сложное движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию двух составляющих: поступательного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Движение центра масс подчиняется уравнению второго закона Ньютона. Вращение тела описывается углом поворота φ, угловой скоростью $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ и угловым ускорением – скоростью изменения угловой скорости $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (величиной аналогичной обычному ускорению). В этой части на основании закона сохранения энергии Вы должны самостоятельно получить основное уравнение динамики вращательного движения трубки, определяющее угловое ускорение вращения трубки.

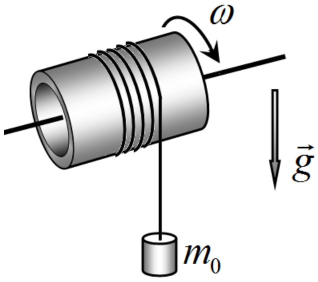


1.1 Трубка вращается вокруг неподвижной собственной оси с угловой скоростью ω. Чему равна кинетическая энергия трубки?

Для реализации такого движения можно считать, что трубка насаженна на очень легкий вал, диаметр которого равен внутреннему диаметру трубки.

1.2 Трубка катится (с проскальзыванием) по горизонтальной поверхности. Скорость оси трубки равна $\vec{v}_c$, угловая скорость вращения вокруг оси трубки ω. Чему равна кинетическая энергия трубки в этом случае?
1.3 Чему равна кинетическая энергия трубки, которая катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, если скорость ее оси равна $\vec{v}_c$?

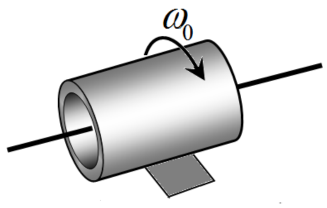
Трубку снова насадили на неподвижную горизонтальную ось, на его поверхность намотали легкую прочную нить, к концу которой привязали груз массы m_0. Груз отпускают, он начинает опускаться, раскручивая трубку.



1.4 Чему равно изменение кинетической энергии трубки при опускании груза на малую величину Δh?
1.5 Найдите ускорение груза a угловое ускорение трубки β.
1.6 Выразите угловое ускорение трубки через момент силы натяжения нити $M = TR$ (это и будет уравнение динамики вращательного движения).

Рекомендуем использовать следующую формулу: если некоторая величина x изменяется на малую величину Δx, то ее квадрат изменяется на величину

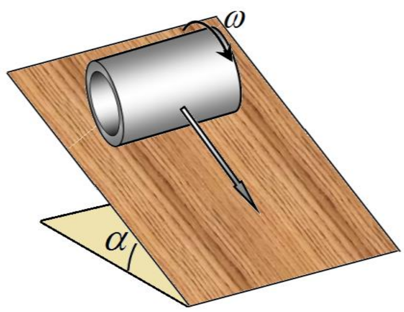
$$\Delta\left(x^2\right) = 2x\Delta x.$$



Трубке, закрепленной на неподвижной горизонтальной оси, сообщили угловую скорость ω_0. После чего к ее поверхности поднесли пластинку, которая действует на трубку с постоянной силой трения F.

1.7 Найдите зависимость угловой скорости трубки от времени $\omega(t)$. 1.8 Сколько оборотов сделает обруч до остановки?

Часть 2. Скатывание с наклонной плоскости.



Трубку кладут на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, так что ось трубки располагается горизонтально, и отпускают. Трубка начинает скатываться с наклонной плоскости. Коэффициент трения трубки о плоскость равен μ. Обозначим силу трения, действующую на боковую поверхность трубки F.

2.1 Найдите ускорение оси трубки a и ее угловое ускорение β в зависимости от силы трения F. 2.2 Найдите значение силы трения, если трубка катится без проскальзывания. 2.3 Определите, при каких углах наклона плоскости α к горизонту, качение цилиндра будет проходить без проскальзывания (при фиксированном значении коэффициента трения μ).

Республиканская физическая олимпиада 2022 года
(III этап)

Теоретический тур

<u>11 класс.</u>

1. Полный комплект состоит из трех заданий.

2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.

3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!

3. Подписывать рабочие листы запрещается.

4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.

5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!
Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Пакет заданий содержит:
- титульный лист (1 стр.);
- условия 3 теоретических задач (6 стр.).

Задание 11-1. Степенные зависимости.

Задание состоит из двух задач, связанных одной математической идеей: если некоторая величина Y зависит от величины x по степенному закону

$$Y(x) = Y_0 + ax^{\gamma},$$

то скорость изменения этой величины описывается формулой, справедливой при любом показателе степени γ и малых значениях Δx

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = a\gamma x^{\gamma-1}.$$

Задача 1.1. Атмосфера с переменной температурой.

У поверхности земли атмосферное давление равно $P_0 = 1{,}0 \cdot 10^5\,Па$, а температура $T_0 = 290K$. Температура воздуха убывает с высотой z по линейному закону

$$T = T_0(1 - \alpha z).$$

Температура убывает на $\Delta T = 1{,}0°$ при подъеме на каждые $\Delta h = 100\,м$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9{,}8\frac{м}{с}$. Молярная масса воздуха $M = 29\frac{г}{моль}$. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3\frac{Дж}{моль \cdot K}$. Атмосфера неподвижна.

1.1.1	Найдите зависимость давления воздуха от высоты $P(z)$.
1.1.2	Рассчитайте численное значение давления воздуха на высоте $H = 1{,}0\,км$.

Задача 1.2. Радиоактивные шары.

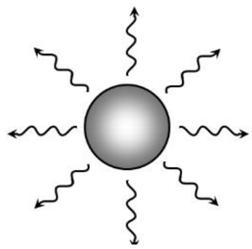
Два однородных шара изготовлены из одного радиоактивного материала. Благодаря радиоактивному распаду внутри материала постоянно выделяется теплота (мощность выделения этой теплоты постоянна). Шары находятся в вакууме, поэтому потери теплоты в окружающую среду осуществляются только посредством излучения. Радиус первого шара равен R_1, температура его поверхности равна $T_{S1} = 400K$, а температура в его центре - $T_{C1} = 500K$. Радиус второго шара равен $R_2 = 2R_1$.

1.2.3 Рассчитайте температуры на поверхности T_{S2} и в центре T_{C2} второго шара.

Подсказки:

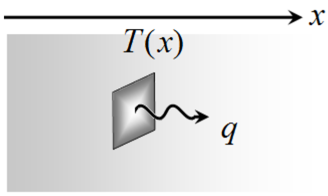
1. Согласно закону Стефана – Больцмана мощность теплового излучения с единицы площади пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$p = \sigma T^4. \qquad (1)$$



2. Закон теплопроводности Фурье утверждает, что плотность потока теплоты (количество теплоты, перетекающей в единицу времени через площадку единичной площади) пропорционален градиенту температуры (изменению температуры на единицу длины):

$$q = -\kappa\frac{\Delta T}{\Delta x}. \qquad (2)$$



Задание 11-2. Магнетизм и теплота.

Однослойная обмотка длинного кругового соленоида (катушки) содержит N плотно намотанных витков. Длина соленоида равна l, его радиус равен r_0 намного меньше длины соленоида.

В работе используется источник постоянного напряжения U_0 (фактически это ЭДС), его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

<u>Подсказка.</u> Если по обмотке соленоида протекает электрический ток силой I, то внутри соленоида создается однородное магнитное поле, индукция которого определяется по формуле:

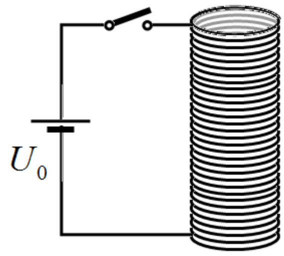
$$B = \mu_0 n I, \tag{1}$$

где $n = \dfrac{N}{l}$ - число витков на единицу длины (плотность намотки).

Часть 1. Основные понятия.

1.1 Определите индуктивность L данного соленоида.

Далее индуктивность соленоида L можно считать известной. Соленоид подключают к источнику и замыкают ключ.
Пусть сопротивление обмотки соленоида равно R.



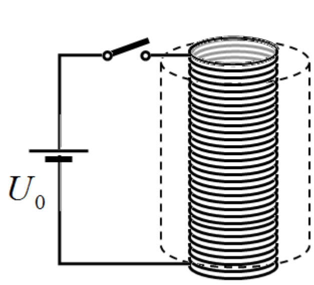
1.2 Запишите уравнение, описывающее скорость изменения силы тока в цепи со временем $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$.

1.3 Нарисуйте схематический график зависимости силы тока в цепи от времени. 1.4 Определите максимальное значение силы тока в цепи I_{max}. 1.5 Оцените время установления тока в цепи τ (время за которое сила тока в цепи достигнет постоянного значения).

1.6 Найдите закон изменения силы тока в обмотке при замыкании ключа, если обмотка соленоида находится сверхпроводящего состоянии.

Часть 2. Соленоид в трубке.

Соленоид помещают внутрь алюминиевой трубки, радиус которой r_1 ($r_1 > r_0$). Длина трубки равна длине соленоида. Толщина стенок трубки равна h и значительно меньше ее радиуса. Оси соленоида и трубки совпадают.



Удельное электрическое сопротивление алюминия (из которого сделана трубка) равно ρ. Индуктивностью трубки в данной части следует пренебречь (т.е. можно пренебречь магнитным полем, создаваемым током, возникающим в стенках трубки).

Соленоид, находящийся в сверхпроводящем состоянии, подключают к источнику и замыкают ключ.

2.1 Определите силу тока I_1, возникающего в стенках трубки. Укажите направление протекания этого тока.
2.2 Рассчитайте мощность P_0, развиваемую источником тока. Укажите, в какой вид энергии преобразуется энергия, передаваемая источником в цепь
2.3 Определите мощность теплоты P_h, выделяющейся в стенках трубки.
2.4 Укажите источник энергии, благодаря которому трубка нагревается.

Часть 3. Передача энергии.

В этой части Вам необходимо показать, как и откуда поступает энергия в стенки трубки.

Подсказка. Следует принять во внимание магнитное поле, создаваемое электрически током в трубке.

Обмотку соленоида (с сопротивлением R) подключают к источнику, как показано на рисунке в Части 2, и замыкают ключ.

3.1 На одном рисунке (с катушкой в трубке) укажите направления тока в обмотке I_0, направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}_0$, создаваемого током в обмотке соленоида; направление тока I_1 в стенках трубки, направление вектора индукции магнитного поля $\vec{B}_1$, создаваемого током в стенках трубки.
3.2 Выразите индукцию магнитного поля B_1, создаваемого током в стенках трубки, через силу тока в ее стенках I_1.
3.3 Запишите систему уравнений, описывающих скорости изменения сил токов в обмотке соленоида $\frac{\Delta I_0}{\Delta t}$ и стенках трубки $\frac{\Delta I_1}{\Delta t}$. В эти уравнения помимо параметров установки должны входить только силы токов.
3.4 Получите формулу для мощности, развиваемой источником тока. Укажите, какое слагаемое описывает мощность теплоты, выделяющейся в стенках трубки. Укажите физический смысл остальных слагаемых, входящих в эту формулу.

Задание 11-3. Шар в потоке.

Расчет сил, действующих на различные тела, движущиеся в газах и жидкостях, является чрезвычайно сложной задачей. Уравнения гидро- и аэродинамики очень сложны, их решение возможно только для простых моделей обтекания тел набегающими потоками. Так как эти проблемы имеют громадное практическое значения, то для их решения применяют различные методы и их комбинации. Одним из эффективных (и эффектных) из них является метод размерностей и подобия, который рекомендуется использовать при решении данной задачи.

Введение. Метод размерностей в физике.

Пусть Вам необходимо установить вид зависимости физической величины A от ряда величин $x, y, z...$

$$A = f(x, y, z...). \tag{1}$$

Предположим, что эта зависимость имеет степенной вид

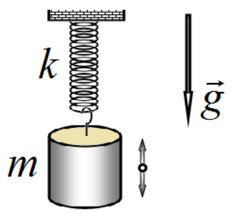
$$A = Cx^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} ..., \tag{2}$$

где C - безразмерный численный коэффициент. Любая физическая формула должна удовлетворять условию размерностей, т.е. размерность величины, стоящей справа, должна совпадать с размерностью величины, стоящей слева. Это условие можно записать в виде символического равенства

$$[A] = [x]^{\alpha} [y]^{\beta} [z]^{\gamma} ... \tag{3}$$

Здесь и далее обозначено $[A]$ - размерность величины A. Равенство (3) иногда позволяет получить систему уравнений для показателей степеней $\alpha, \beta, \gamma ...$. Для этого размерности величин следует выразить через основные единицы системы СИ и записать равенства показателей степеней для этих основных единиц. Сразу заметим, что определить значение коэффициента C в уравнении (2) этим способом не возможно, но… и с этой проблемой иногда можно побороться. Как? - что покажем дальше.

Для того, чтобы прочнее усвоить метод размерностей, решите этим методом следующую простую задачку (ответ которой Вам, конечно, известен).



Груз массы m подвешен на невесомой пружине жесткости k. Предположим, что период колебаний подвешенного груза зависит от его массы, жесткости пружины и ускорения свободного падения g. Представим эту зависимость в виде

$$T = Cm^{\alpha} k^{\beta} g^{\gamma} \tag{4}$$

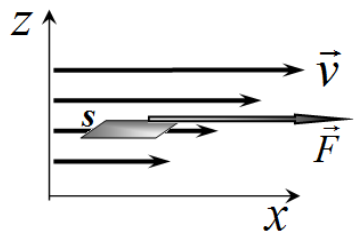
0.1 Используя метод размерностей, запишите систему уравнений для определения показателей степеней α, β, γ в формуле (4). Найдите эти показатели. Запишите формулу для периода колебаний подвешенного пружинного маятника.

Часть 1. «Вязкое» лобовое сопротивление.

Перейдем к основному содержанию данного задания. Рассмотрим движение шарика в жидкости или газе.

При движении тела в среде, на него действует сила сопротивления со стороны среды.

Первой основной причиной возникновения сил сопротивления является вязкость среды, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия между слоями движущейся жидкости или газа, и взаимодействия жидкости и поверхности тела.



При движении вязкой жидкости, когда скорость жидкости различна в различных точках, между слоями жидкости возникают силы вязкости. Простейший случай: скорость жидкости $\vec{v}$ зависит только от одной координаты z (см. рис.), тогда сила, действующая на площадку площади S (верхний более быстрый слой «тянет» нижний), задается законом Ньютона для вязкого трения

$$F = \eta \frac{dv_x}{dz} S \qquad (5)$$

где η - и есть вязкость (коэффициент вязкости) жидкости или газа.

Если вязкость является основной причиной возникновения силы лобового сопротивления, сила, действующая на шарик, зависит от вязкости среды η, радиуса шарика r, скорости его движения v. Иными словами, формула для этой силы имеет вид

$$F = C\eta^{\alpha} r^{\beta} v^{\gamma}. \qquad (6)$$

1.1 Определите значения показателей степеней α, β, γ в формуле (6), запишите эту формулу в явном виде.

1.2 Пластилиновый шарик радиуса r_1 медленно опускается в глицерине с постоянной скоростью v_1. С какой скоростью v_2 будет опускаться пластилиновый шарик в глицерине, если его радиус равен $r_2 = 2r_1$? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (6).

Часть 2. «Динамическое» сопротивление.

Второй причиной возникновения лобового сопротивления является «динамика» движения жидкости: при обтекании жидкостью тела изменяется направление и модуль скорости течения жидкости. Тем самым изменяется импульс жидкости (газа), который передается телу. Как известно, импульс, переданный в единицу времени, есть сила.

Итак, в данной модели сила определяется импульсом, преданным от среды к шарику. Разумно предположить, что этот импульс определяется плотностью среды ρ, радиусом шарика r и его скоростью v. Поэтому формула для динамического сопротивления должна иметь вид

$$F = C\rho^{\alpha} r^{\beta} v^{\gamma}. \qquad (7)$$

2.1 Определите значения показателей степеней α, β, γ в формуле (6), запишите эту формулу в явном виде.

2.2 Дождевая капля воды радиуса r_1 падает в воздухе с некоторой установившейся скоростью v_1. С какой скоростью v_2 будет опускаться в воздухе капля, радиус которой в два раза больше $r_2 = 2r_1$? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (7).

Часть 3. Общий случай: действуют обе причины.

В общем случае сила, действующая на шарик, движущийся в вязкой среде, зависит от четырех величин: плотности среды, радиуса шарика, его скорости и вязкости среды. Представим эту зависимость в виде

$$F = C\rho^{\alpha} r^{\beta} v^{\gamma} \eta^{\delta}. \tag{8}$$

Размерности величин, входящих в эту формулу, выражается через три основных единицы: метр, секунда килограмм. А неизвестных показателей – четыре! Поэтому эти показатели не могут быть определены однозначно.

3.1 Выразите показатели степени α, β, γ в формуле (8), через показатель δ. Запишите формулу (8) в явном виде.

Представим теперь формулу (8) в виде

$$F = C(\mathrm{Re})\rho^{\alpha} r^{\beta} v^{\gamma}, \tag{9}$$

Где $C(\mathrm{Re})$ - неизвестная функция от безразмерного параметра Re, который называется числом Рейнольдса. Эта функция не известна, но… как известно, «всякая неизвестная функция приблизительно линейна…»

3.2 Выразите безразмерное число Рейнольдса Re через параметры задачи ρ, r, v, η.

Часть 4. Экспериментальные измерения.

Экспериментально измерены силы лобового сопротивления, действующие на различные шарики, движущиеся в различных средах, с различными скоростями. В Таблице 1 представлены результаты таких измерений, в ней указаны: вещество окружающей среды; вязкость этой среды η; ее плотность ρ, радиус шарика r, скорость движения шарика v, измеренное значение силы лобового сопротивления F.

Таблица 1.

	$\eta, Па \cdot с$	$\rho, \frac{кг}{м^3}$	$r, м$	$v, \frac{м}{с}$	$F, Н$
воздух	$1{,}8 \cdot 10^{-4}$	1,20	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	5,0	$1{,}66 \cdot 10^{-4}$
вода	$1{,}14 \cdot 10^{-3}$	$1{,}0 \cdot 10^{3}$	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	1,0	$2{,}04 \cdot 10^{-3}$
оливковое масло	$8{,}4 \cdot 10^{-2}$	$1{,}26 \cdot 10^{3}$	$1{,}0 \cdot 10^{-2}$	1,0	$8{,}45 \cdot 10^{-1}$
глицерин	1,48	$0{,}92 \cdot 10^{3}$	$1{,}0 \cdot 10^{-1}$	10,0	**?**

4.1 Используя данные таблицы, найдите значение силы лобового сопротивления, действующую на шарик, движущийся в глицерине. Характеристики шарика и глицерина указаны в последней строке Таблицы 1.