

Задача 9-1. «Физика на кухне»

1.1 В установившемся режиме мощность поступающей теплоты равна мощности теплоты, уходящей в окружающую среду:

$$P_0 = \beta(t_{\max} - t_0). \quad (1)$$

Из этого равенства определяем коэффициент теплоотдачи

$$\beta = \frac{P_0}{t_{\max} - t_0} = 10 \frac{Вт}{град}. \quad (2)$$

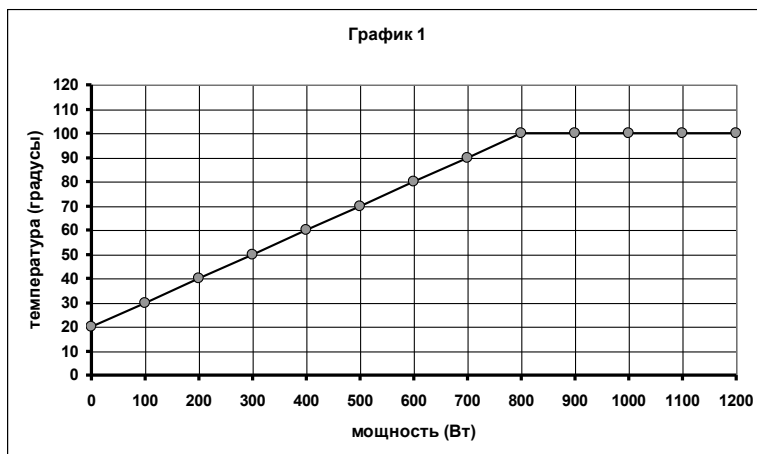
1.2 Из уравнения (1) находим мощность, необходимую для закипания воды

$$P_{0(\text{кипения})} = \beta(t_{\text{кипения}} - t_0) = 10 \cdot (100 - 20) = 800 \text{ Вт}. \quad (3)$$

1.3 Все из того же уравнения (1) находим установившуюся температуру:

$$\bar{t} = t_0 + \frac{P_0}{\beta} \quad (4)$$

Если установившаяся температура достигнет точки кипения 100° , то при дальнейшем увеличении мощности температура воды расти не будет. График этой зависимости показан на рисунке.



1.4 Требуемое уравнение есть уравнение теплового баланса: количество теплоты, которое поступает от нагревателя $P_0 \Delta \tau$, равно сумме теплот, которое идет на нагревание чайника с водой $C \Delta t$, и уходит в окружающую среду $\beta(t - t_0) \Delta \tau$:

$$P_0 \Delta \tau = C \Delta t + \beta(t - t_0) \Delta \tau \quad (5)$$

Это уравнение для удобства дальнейшего анализа удобно переписать в виде

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P_0}{C} - \frac{\beta}{C}(t - t_0) \quad (6)$$

1.5.1 В начальный момент времени скорость изменения температуры максимальна и равна

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_0 = \frac{P_0}{C} \approx 0,33 \frac{град}{с}. \quad (7)$$

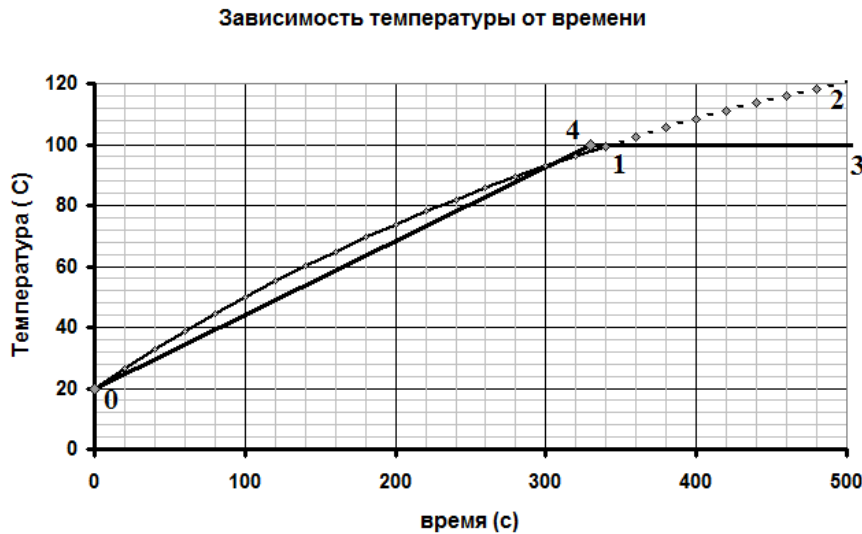
При увеличении температуры воды увеличивается мощность теплоотдачи, поэтому скорость роста температуры уменьшается. Когда температура воды достигает температуры кипения, скорость роста становится равной

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_1 = \frac{P_0 - \beta(t_k - t_0)}{C} = \frac{1500 - 10(100 - 20)}{4500} \approx 0,16 \frac{град}{с}. \quad (8)$$

Если бы вода не закипала, то ее температура достигла бы установившегося значения, равного

$$\bar{t} = t_0 + \frac{P_0}{\beta} = 170^\circ\text{C} \quad (9)$$

Поэтому график зависимости должен был стремиться к этому значению, если бы воды не закипела. Схематически этот график показан на рисунке:



1.5.2 Приближенную зависимость, состоящую из двух отрезков прямых, можно построить следующим образом. Можно приближенно считать, что температура воды возрастает по линейному закону. В качестве средней скорости роста температуры можно взять среднее арифметическое этой величины (среднее между (7) и (8)): $V \approx 0,24 \frac{\text{град}}{\text{с}}$. Тогда до температуры закипания зависимость температуры воды от времени описывается функцией:

$$t = t_0 + V\tau \quad (10)$$

Из этой формулы легко оценить время закипания

$$\tau_1 = \frac{t_{\text{кмп}} - t_0}{V} \approx 330 \text{ с} \quad (11)$$

Заметим, что строгий расчет дает значение 340 с. Кстати, и график на рисунке построен точный!

1.5.3 Используя полученную оценку времени закипания, не сложно оценить долю потерь. Так, за время нагревания чайник получил количество теплоты, равное

$$Q_0 = P_0\tau_1 \approx 500 \text{ кДж} \quad (12)$$

из них на нагревание пошло

$$Q_1 = C\Delta t \approx 360 \text{ кДж} \quad (13)$$

Следовательно, доля потерь составила

$$\eta = \frac{Q_0 - Q_1}{Q_0} = 28\% \quad (14)$$

Задача 9-2. Единица измерения энергии – рубль!

Часть 1. Шкала Фаренгейта.

1.1 Так как связь линейна, то формулы, связывающие эти шкалы, должны быть линейными. В задаче требуется получить точные формулы, поэтому коэффициенты в этих формулах должны быть точными. Заметим, что изменению температуры на 100 градусов Цельсия соответствует изменение на 180 градусов Фаренгейта, т.е.

$$100^{\circ}C = 180^{\circ}F. \quad (1)$$

$$\text{или } \frac{1^{\circ}C}{1^{\circ}F} = \frac{9}{5}.$$

Кроме того, нули шкал сдвинуты. Так $t^{\circ}C = 0,0^{\circ}$ соответствует $32^{\circ}F$, что свидетельствует о том, что шкала Фаренгейта сдвинута на $32^{\circ}F$. Поэтому формула, связывающая шкалу Цельсия со шкалой Фаренгейта, имеет вид

$$t^{\circ}F = \frac{9}{5}t^{\circ}C + 32^{\circ}F \quad (2)$$

Для проверки полученного соотношения можно воспользоваться второй опорной точкой: рассчитаем по полученной формуле значение температуры $100^{\circ}C$ по шкале Фаренгейта

$$\frac{9}{5} \cdot 100^{\circ}C + 32^{\circ}F = 212^{\circ}F.$$

Из формулы (2) легко получить формулу для обратного перехода

$$t^{\circ}C = \frac{5}{9}(t^{\circ}F - 32^{\circ}F) \quad (3)$$

Отметим, что записи этих же формул, с использованием десятичных дробей, не будут точными.

1.2 Для расчета воспользуемся формулой (2):

$$t^{\circ}F = \frac{9}{5} \cdot 36,6^{\circ}C + 32^{\circ}F = 97,9^{\circ}F \quad (4)$$

Так как формулы перехода являются точными, то округлять следует до разряда, соответствующего последнему разряду в исходных данных

1.3 Для перехода используем формулу (3):

$$t^{\circ}C = \frac{5}{9}(0,0^{\circ}F - 32^{\circ}F) = -18^{\circ}C. \quad (5)$$

$$t^{\circ}C = \frac{5}{9}(100^{\circ}F - 32^{\circ}F) = 37,8^{\circ}C. \quad (6)$$

В соответствии с исходными данными первое число округлено до двух значащих цифр, второе – до трех.

Часть 2. В каких единицах измерял работу Дж. Джоуль?

2.1 Работа при поднятии груза массы m на высоту h рассчитывается по формуле

$$A = mgh \quad (1)$$

Для того, чтобы получить работу в Джоулях, необходимо в эту формулу подставить значения величин, измеренных в единицах системы СИ:

$$A(1\phi \cdot \phi) = 0,4536\text{кг} \cdot 9,811 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \cdot 0,3048\text{м} = 1,356\text{Дж}. \quad (2)$$

2.2 По определению 1 калория равна количеству теплоты, которое требуется, чтобы нагреть 1 грамм воды на 1 градус Цельсия. По результатам измерений Дж. П. Джоуля на нагревание $m_0 = 1 \text{ фунт}$ на $\Delta t = 1^\circ F$ потребовалась энергия, равная потенциальной энергии 838 футо-фунтов, поднятых на высоту в 1 фут. Следовательно, энергия в 1 калорию рассчитывается по формуле, в которой массу воды надо выразить в граммах, а разность температур в градусах Цельсия:

$$Q(1\text{кал}) = \frac{mgh}{m_0 \Delta t(^{\circ}C)} = \frac{773 \cdot 0,4536 \cdot 9,811 \cdot 0,3048}{1000 \cdot 0,4536 \cdot \frac{5}{9}} = 4,159 \frac{\text{Дж}}{\text{кал}} . \quad (3)$$

Часть 3. Измерение энергии в рублях.

3.1 При мощности в 1 Вт за 1 секунду совершается работа в 1 Дж. Поэтому $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Вт} \cdot 1 \text{ с}$. Тогда

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{час} = 1000 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж} (\text{точно}). \quad (4)$$

Цена (price) одного «электроджоуля» равна

$$\text{Pr}(1 \text{ Дж}) = \frac{0,15}{3,6 \cdot 10^6} = 4,2 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} . \quad (5)$$

или 4,2 микрокопейки.

3.2 1 Гигакалория в джоулях равна

$$1 \text{ Гкал} = 4,159 \cdot 10^9 \text{ Дж} \approx 4,2 \cdot 10^9 \text{ Дж} . \quad (6)$$

Цена (price) одного «теплоджоуля» равна

$$\text{Pr}(1 \text{ Дж}) = \frac{18,5}{4,16 \cdot 10^9} = 4,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{руб}}{\text{Дж}} . \quad (5)$$

или 4,5 микрокопейки, что немного дороже «электроджоуля».

3.3 Из формулы для потенциальной энергии в поле тяжести земли находим

$$E = mgh \quad m = \frac{E}{gh} = \frac{3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}}{9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 10 \text{ м}} = 3,6 \cdot 10^4 \text{ кг} . \quad (6)$$

Итак, чтобы заработать 15 копеек по тарифам за электроэнергию, необходимо поднять 36 тонн на высоту 10 м – и кто скажет, что цена электроэнергии высока?

3.4 Используем формулу для количества теплоты, необходимо для нагревания

$$Q = cm\Delta t . \quad (7)$$

По определению калории теплоемкость воды равна $c = 1 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}}$, или $c = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кал}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$.

Масса 1 кубометра воды (т.е. плотность) равна $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Подставим эти значения в формулу (7):

$$Q = cm\Delta t = \left(1 \cdot 10^3 \frac{\text{кал}}{\text{кг} \cdot \text{град}} \right) \cdot \left(1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot V \right) \Delta t^{\circ} = 1,0 \cdot 10^6 \frac{\text{кал}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}} V \Delta t^{\circ} . \quad (8)$$

Наконец, переходим к Гигакалориям:

$$Q = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{кал}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}} V \Delta t^{\circ} = 1,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Гкал}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}} V \Delta t^{\circ} . \quad (9)$$

Таким образом, формула расчета полученной теплоты звучит так: объем использованной воды в кубометрах умножаем на нагрев в градусах и делим на тысячу»

3.5 Используя полученную формулу, рассчитываем количество теплоты (в Гигакалориях):

$Q = \frac{0,2 \cdot 25}{1000} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гкал}$, и умножая на цену, получаем стоимость тепловой энергии в ванне

$Pr = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гкал} \cdot 18,5 \frac{\text{руб}}{\text{Гкал}} = 0,093 \text{ руб}$, или примерно 10 копеек.

Задача 9-3. «Формула Торричелли»

Часть 1. Дальность полета струи.

1.1 В соответствии с формулой Торричелли скорость струи на выходе из отверстия равна

$$v = \sqrt{2gz}. \quad (1)$$

Так как сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то горизонтальная составляющая скорости струи будет сохраняться. Поэтому дальность полета струи можно вычислить, как произведение горизонтальной скорости на время падения

$$S = v\tau. \quad (2)$$

Вертикальное движение струи является равноускоренным с ускорением свободного падения, поэтому справедливо соотношение

$$h - z = \frac{g\tau^2}{2}. \quad (3)$$

Из которого легко найти время падения

$$\tau = \sqrt{2\frac{h-z}{g}}. \quad (4)$$

Подставляя формулы для скорости и времени падения в формулу (2), получим формулу для дальности полета струи:

$$S = v\tau = \sqrt{2gz} \sqrt{2\frac{h-z}{g}} = 2\sqrt{z(h-z)}. \quad (5)$$

1.2 В формуле (5) под корнем стоит квадратичная функция от z , которая обращается в нуль при $z = 0$ и $z = h$. Так как парабола – симметричная кривая, то ее максимум находится по середине между нулями, т.е. при $z' = \frac{h}{2}$. Тогда максимальная дальность струи равна

$$S_{\max} = 2\sqrt{\frac{h}{2}\left(h - \frac{h}{2}\right)} = h. \quad (6)$$

1.3 По рисунку следует определить глубины, на которых находятся отверстия z_k , высоту Уровня воды h . Затем дальности струй рассчитываются по формуле (6). Результаты представлены в таблице 1.

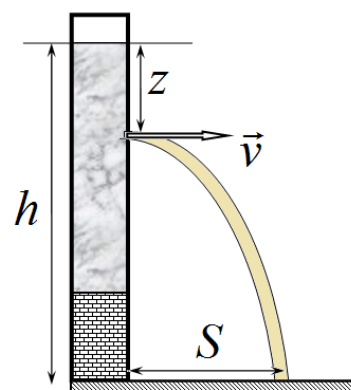


Таблица 1.

Номер струи k	Высота h_k (см)	Глубина отверстия z_k (см)	Дальность струи S_k , (см)
1	80	14	61
2	80	26	75
3	80	41	80

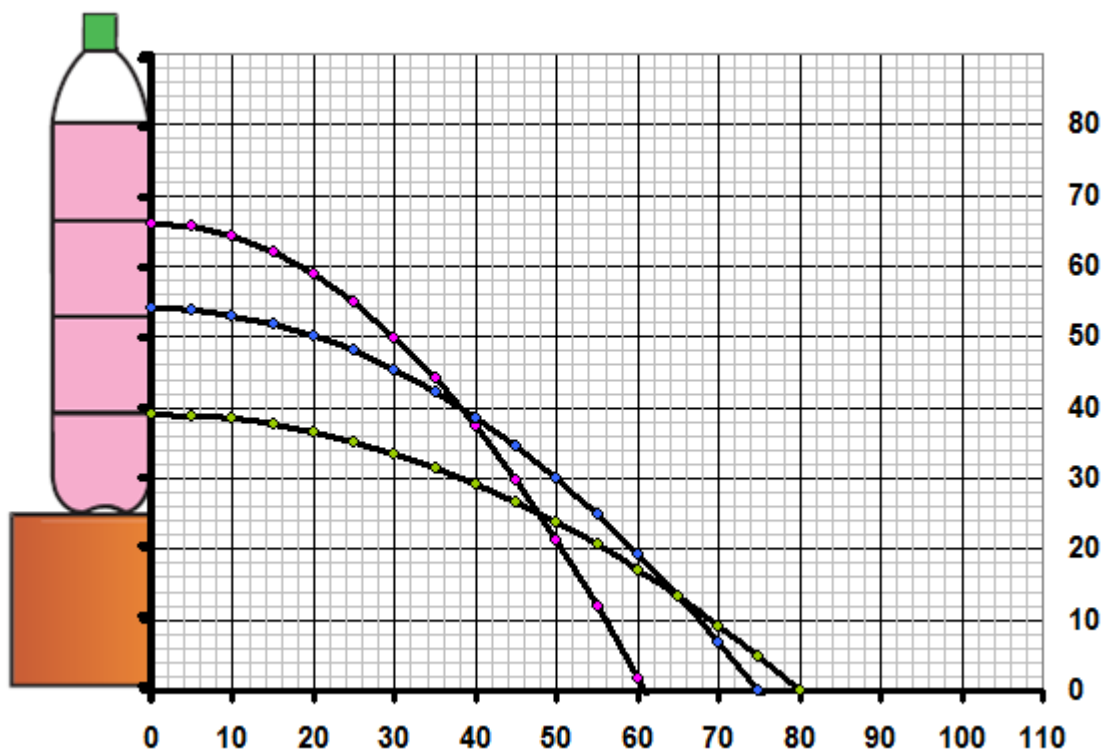
1.4 Зависимости координат точек струи от времени описываются функциями

$$\begin{cases} x = vt \\ y = (h - z) - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Из первого уравнения выразим $t = \frac{x}{v}$ и подставим во второе, в результате получим уравнение траектории

$$y = (h - z) - \frac{g}{2v^2} x^2 = (h - z) - \frac{x^2}{4z}, \quad (8)$$

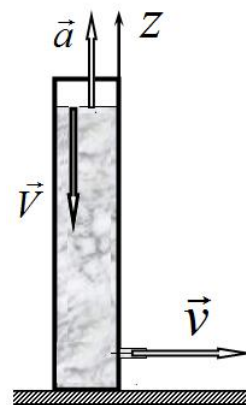
где использована формула Торричелли для начальной скорости струи. Рисунок струй, рассчитанных по формуле (8), показан на рисунке.



Часть 2. Время вытекания.

2.1 Качественное описание.

2.1.1 Очевидно, что вектор скорости \vec{V} движения уровня воды направлен вниз. При понижении уровня воды скорость вытекания, а, следовательно, и модуль скорости движения уровня воды уменьшаются. Поэтому вектор ускорения \vec{a} уровня воды направлен вверх.



2.1.2 Так как общий объем воды остается неизменным, то между скоростью вытекания v и скоростью опускания уровня V выполняется соотношение

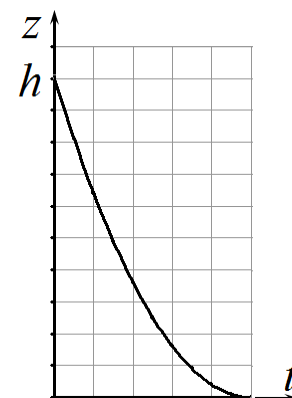
$$SV = sv. \quad (9)$$

Скорость вытекания определяется формулой Торричелли, поэтому искомая зависимость имеет вид

$$V_z = -\frac{s}{S}v = -\frac{s}{S}\sqrt{2gz} = -\sqrt{2\eta^2 gz}. \quad (10)$$

Знак минус указывает направление вектора скорости.

2.1.3 Модуль скорость опускания уровня воды изменяется от максимального значения до нуля (при $z = 0$). Графически это означает, что угол наклона касательной к графику зависимости координаты от времени уменьшается от максимального значения до нуля, когда уровень воды достигает нулевой отметки. Схематический график такой зависимости показан на рисунке.



2.2 Вспомогательная задача.

2.2.1 Тело будет двигаться равноускоренно с ускорением свободного падения g . Учитывая направления векторов начальной скорости и ускорения зависимости, проекции скорости $V_y(t)$ и координаты $y(t)$ от времени имеют вид:

$$V_y(t) = V_0 - gt \quad (11)$$

$$y(t) = V_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad (12)$$

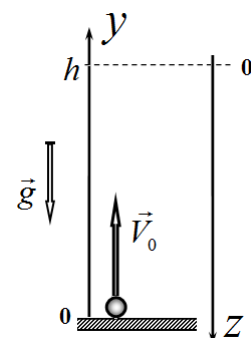
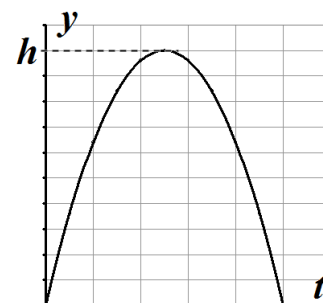


График зависимости координаты от времени $y(t)$ является параболой, ветви которой направлены вниз (см. рис)



2.2.2 Максимальная высота подъема тела $h = z_{\max}$ определяется по известной формуле

$$h = \frac{V_0^2}{2g}. \quad (13)$$

2.2.3 Координаты z и y , и проекции скорости на эти оси связаны простыми геометрическими соотношениями

$$\begin{aligned} z &= h - y \\ V_z &= -V_y \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя найденные ранее зависимости в эти формулы, получим

$$V_z(t) = -V_0 + gt \quad (15)$$

$$z(t) = \frac{V_0^2}{2g} - V_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad (16)$$

2.2.4 Для нахождения зависимости проекции скорости тела на ось z от его координаты $V_z(z)$ преобразуем формулу (16) к виду

$$z = \frac{V_0^2}{2g} - V_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{1}{2g} (V_0^2 - 2gV_0 t + g^2 t^2) = \frac{1}{2g} (V_0 - gt)^2 = \frac{V_z^2}{2g}. \quad (17)$$

Из которого следует, что

$$V_z = \mp \sqrt{2gz}, \quad (18)$$

Причем знак «-» соответствует этапу подъема тела, знак «+» - его падению.

2.3 Возвращение к вытеканию воды.

2.3.1 Сравним результаты решения вспомогательной задачи (п.2.2 на этапе подъема тела) и анализа процесса вытекания воды из сосуда (п.2.1). Для удобства сравнение проведем в Таблице 2.

Таблица 2.

Характеристика	Вспомогательная задача	Вытекание воды
Начальная координата	$z_0 = h$	$z_0 = h$
Модуль начальной скорости: Из формул (13) и (10)	$V_0 = \sqrt{2gh}$	$V_0 = \sqrt{2\eta^2 gh}$
Зависимость скорости от координаты	$V_z = -\sqrt{2gz}$	$V_z = -\sqrt{2\eta^2 gz}$
Зависимость координаты от времени	$z = \frac{1}{2g} (V_0 - gt)^2$???

Как хорошо видно, эти задачи практически полностью эквивалентны друг другу! Отличие заключается только в величине ускорения. Из сравнения следует, что ускорение, с которым опускается уровень воды постоянно и равно

$$a = \eta^2 g \quad (19)$$

Поэтому и закон движения уровня воды в сосуде будет таким же, только с измененным ускорением (19):

$$z(t) = \frac{1}{2\eta^2 g} (V_0 - \eta^2 gt)^2 = \frac{1}{2\eta^2 g} (\sqrt{2\eta^2 gh} - \eta^2 gt)^2 \quad (20)$$

2.3.2 Время вытекания находится из формулы (20), в которой следует положить $z = 0$

$$\sqrt{2\eta^2 gh} - \eta^2 g \tau = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (21)$$

Оказывается, что время вытекания столба воды высотой h в η раз меньше, чем время падения с той же высоты.

2.3.3 При расчете следует учесть, что отношение площадей двух кругов пропорционально отношению квадратов их радиусов. Поэтому формула для расчета времени вытекания может быть записана в виде

$$\tau = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \left(\frac{5,0}{0,1}\right)^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,20}{9,8}} = 5,0 \cdot 10^2 \text{ c}. \quad (22)$$

Задача 10-1. «Бруски и пружинки»**Часть 1. Два бруска.**

1.1 Чтобы сдвинуть с места второй брусок, к нему необходимо приложить силу равную максимальной силе трения покоя, т.е.

$$F_2 = \mu mg . \quad (1)$$

Такой силой может быть только силы упругости пружинки. Следовательно, ее необходимо растянуть на величину

$$x = \frac{F_2}{k} = \frac{\mu mg}{k} . \quad (2)$$

Очевидно, что на такую же величину необходимо сместить первый брусок. Если к бруску приложить постоянную силу (превышающую силу трения), то он начнет двигаться ускоренно, по мере растяжения пружинки ускорение будет уменьшаться. После того, как сила упругости в сумме с силой трения превысит приложенную силу, брусок будет продолжать двигаться в том же направлении (по инерции) с уменьшающейся скоростью. Когда скорость бруска станет равной нулю, смещение бруска будет максимально. Именно в это момент смещение бруска должно стать равным величине, определяемой формулой (2). Для движения первого бруска запишем уравнение закона сохранения и превращения энергии: работа постоянной силы пойдет на увеличение потенциальной энергии пружины и работу против силы трения:

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu mgx . \quad (3)$$

Из этого уравнения находим (с учетом формулы (2)):

$$F = \frac{kx}{2} + \mu mg = \frac{3}{2} \mu mg . \quad (4)$$

Отметим, что эта сила меньше, чем суммарная сила трения, действующая на два бруска.

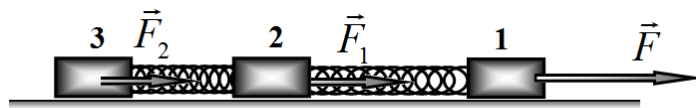
1.2 Все предыдущие рассуждения, касающиеся второго бруска, остаются в силе. Теперь учтем, что в используемом приближении сумма сил, действующих на первый брусок, также должна равняться нулю. Следовательно, к нему должна быть приложена сила, равная сумме сил упругости и силы трения, т. е.

$$F = 2\mu mg . \quad (5)$$

Деформация пружины в этом случае также определяется формулой (2).

Часть 2. Три бруска.

Обозначим модули сил упругости пружинок F_1 и F_2 . А деформации пружинок x_1, x_2 . Нумерация брусков и пружинок показана на рисунке.



2.1 Последний брусок сдвинется, если на него подействует сила упругости $F_2 = \mu mg = f_0$. Сила упругости первой пружинки в этот момент будет равна сумме сил упругости второй пружинки и силы трения, т.е. $F_1 = F_2 + \mu mg = 2f_0$. Приложенная сила в этот момент времени должна превысить F_2 также на величину силы трения, т.е. минимальная сила, необходимая для того, чтобы сдвинуть все бруски, равна

$$F_{\min} = F_1 + \mu mg = 3f_0 . \quad (6)$$

Этот же результат можно получить и другим, более простым способом. Рассмотрим цепочку целиком. Силы упругости являются внутренними силами для всей цепочки, поэтому они не влияют на ускорение центра масс (которое равно нулю). Поэтому сумма внешних сил также должна быть равна нулю. Поэтому прикладываемая сила должна быть равна суммарной силе трения, действующей на цепочку, т.е. $F_{\min} = 3\mu mg = 3f_0$.

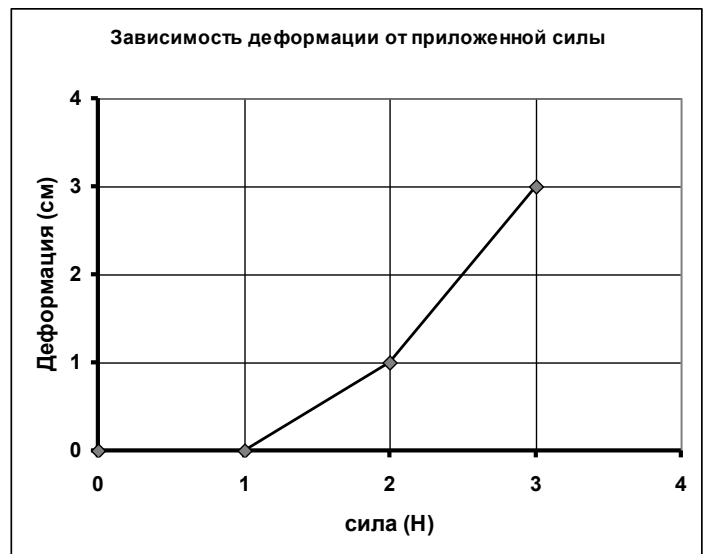
2.2 Рассмотрим движение по этапам. Для удобства все выкладки отразим в таблице. Величину силы выразим как $F = zf_0$, где z - безразмерный параметр.

Сила F	Сила F_1	Деформация x_1	Сила F_2	Деформация x_2	Суммарная деформация $x = x_1 + x_2$
1 этап: все бруски поются					
$F \in [0, f_0]$	$F_1 = 0$	$x_1 = 0$	$F_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x = 0$
2 этап: сдвинулся первый брусок, второй и третий покоятся					
$F \in [f_0, 2f_0]$	$F_1 = F - f_0 = (z-1)f_0$	$x_1 = (z-1)l_0$	$F_2 = 0$	$x_2 = 0$	$x = (z-1)l_0$
3 этап сдвинулся второй брусок, третий покоится					
$F \in [2f_0, 3f_0]$	$F_1 = (z-1)f_0$	$x_1 = (z-1)l_0$	$F_2 = F - f_0 = (z-2)f_0$	$x_2 = (z-2)l_0$	$x = (2z-3)l_0$

Таким образом, искомая зависимость представляет собой ломаную линию, состоящую из прямолинейных отрезков.

Значения координат в «узловых» точках (когда начинается движение очередного бруска) показаны в следующей таблице и на графике.

$z = \frac{F}{f_0}$	$\lambda = \frac{x}{l_0}$
0	0
1	0
2	1
3	3



2.3 В рассматриваемую систему (цепочку) энергия поступает благодаря работе внешней силы F . Работу этой силы легко подсчитать с помощью построенного графика. Численно работа равна площади между осью x (на графике вертикальна) и графиком зависимости $F(l)$. Простой расчет дает следующее значение для работы силы:

$$A = f_0 l_0 \left(\frac{1+2}{2} \cdot 1 + \frac{2+3}{2} \cdot 2 \right) = \frac{13}{2} f_0 l_0. \quad (7)$$

Часть этой энергии пошла на увеличение потенциальной энергии пружин. Деформация первой пружины равна $2l_0$, второй - l_0 . Поэтому энергия деформированных пружин равна

$$U = \frac{k}{2}(2l_0)^2 + \frac{k}{2}(l_0)^2 = \frac{5}{2}f_0l_0. \quad (8)$$

Часть энергии была израсходована на работу против сил трения (т.е. перешла во внутреннюю, тепловую энергию). Первый брусок сместился на расстояние $3l_0$, второй на расстояние l_0 , поэтому количество выделившейся из-за трения теплоты равно

$$Q = 3f_0l_0 + f_0l_0 = 4f_0l_0. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение энергетического баланса

$$A = U + Q \quad (10)$$

выполняется.

2.4 Так как внешняя сила заставила все бруски двигаться, то после прекращения колебаний все бруски будут двигаться с одинаковым ускорением равным

$$a = \frac{F - 3\mu mg}{3m} = \frac{2 \cdot 3\mu mg - 3\mu mg}{3m} = \mu g. \quad (11)$$

Для последнего бруска уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$ma = F_2 - \mu mg. \quad (12)$$

Откуда следует, что $F_2 = \mu mg + ma = 2\mu mg$, а удлинение второй пружины

$$x_2 = \frac{F_2}{k} = \frac{2\mu mg}{k} = 2l_0. \quad (13)$$

Из второго закона Ньютона для центрального бруска

$$ma = F_1 - \mu mg$$

Следует, что сила упругости первой пружины на $2f_0$ больше силы упругости второй, а ее удлинение на $2l_0$ больше второй, т.е. $x_2 = 4l_0$. В итоге получаем, что суммарное удлинение цепочки в этом случае равно

$$x = x_1 + x_2 = 6l_0. \quad (14)$$

Часть 3. Цепочка из N брусков.

3.1 Подробное рассмотрение предыдущих частей задачи показывает, что сила упругости последней пружинки равна $f_0 = \mu mg$, а сила упругости каждой следующей возрастает на величину $f_0 = \mu mg$. Соответственно, деформация крайней равна $l_0 = \frac{\mu mg}{k}$, каждой

следующей возрастает на величину $l_0 = \frac{\mu mg}{k}$. Следовательно, общая деформация цепочки вычисляется как сумма

$$x = l_0 + 2l_0 + 3l_0 + \dots + (N-1)l_0 = \frac{N(N-1)}{2}l_0. \quad (15)$$

3.2 Из 2 закона Ньютона (см. п. 2.3) следует, что в данном случае деформация каждой цепочки возрастает на величину $2l_0$. Поэтому и общее удлинение будет в 2 раза больше, чем в предыдущем пункте

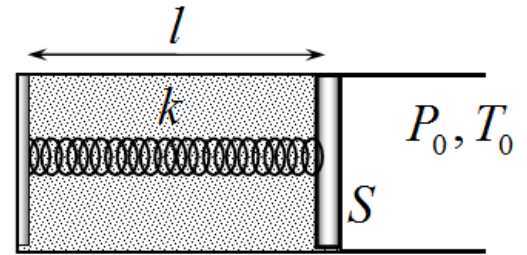
$$x = 2l_0 + 4l_0 + 6l_0 + \dots + 2(N-1)l_0 = N(N-1)l_0. \quad (16)$$

Задача 10-2. «Газ под поршнем»

Часть 1. Воздух сухой.

1.1 Из условия равновесия поршня следует, что давление газа равно

$$P = P_0 + \frac{k(l-l_0)}{S}. \quad (1)$$



С учетом связи между параметрами $P_0 S = k l_0$, приведенной в условии задачи, данная зависимость упрощается:

$$P = P_0 + \frac{k(l-l_0)}{S} = \frac{kl}{S} = \frac{k l_0}{S} \frac{l}{l_0} = P_0 \frac{l}{l_0}. \quad (2)$$

1.2 Для нахождения связи между температурой и объемом (который определяется положением поршня), используем уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона для воздуха внутри сосуда

$$\frac{Pl}{T} = \frac{P_0 l_0}{T_0} \quad (3)$$

Из этих двух выражений следует, что зависимость температуры от объема имеет вид

$$T = T_0 \frac{P}{P_0} \frac{l}{l_0} = T_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^2. \quad (4)$$

Откуда следует, что зависимость положения поршня от температуры воздуха описывается функцией

$$l = l_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (5)$$

1.3 Расчет температуры следует проводить по формуле (4):

$$T = T_0 (1 + \eta)^2 = 422 \text{ K} = 149^\circ \text{C}. \quad (6)$$

Часть 2. Влажный воздух.

2.1 Условие равновесия поршня в данном случае имеет вид

$$P + P_{\text{нас}} = P_0 + \frac{k(l-l_0)}{S} = P_0 \frac{l}{l_0}. \quad (7)$$

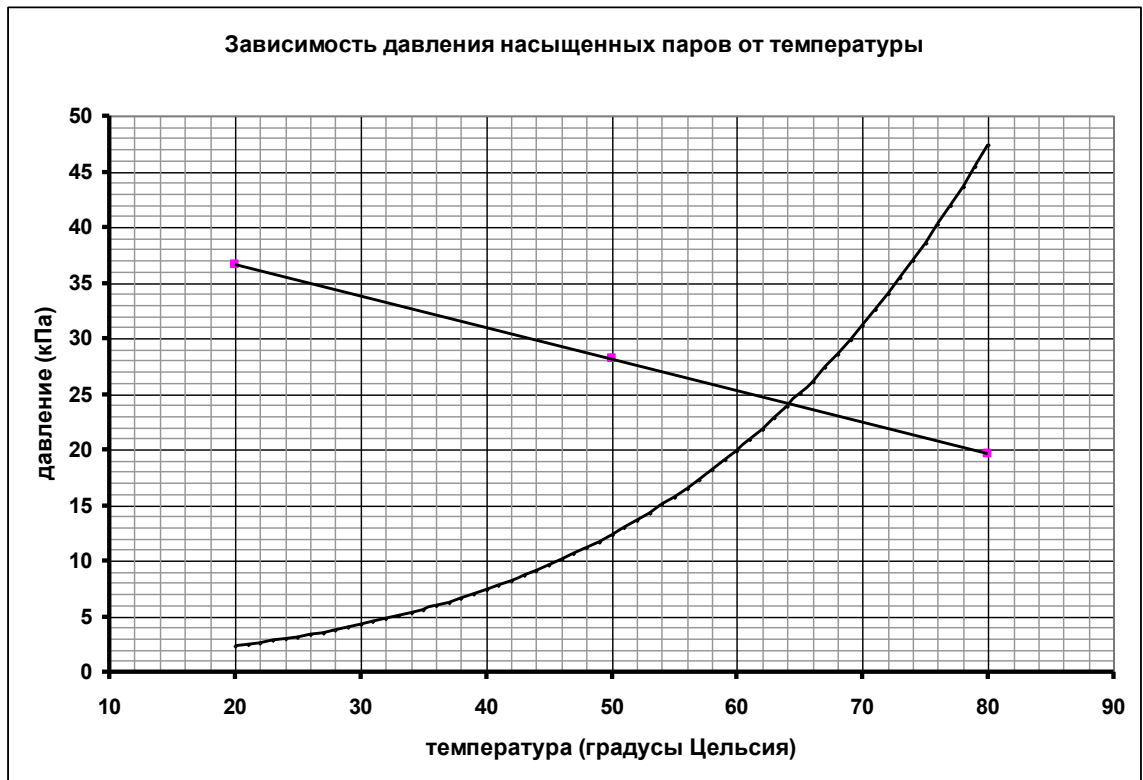
Где P - давление сухого воздуха, $P_{\text{нас}}$ - давление насыщенных паров воды в сосуде. Выразим из этого условия

$$P_{\text{нас}} = P_0 \frac{l}{l_0} - P = P_0 \frac{l}{l_0} - P_0 \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} = P_0 \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} \right) \quad (8)$$

Здесь использовано уравнение состояния (3), из которого выражено давление сухого воздуха. Уравнение (8) может быть решено графически. Для этого на графике зависимости давления насыщенных паров от температуры следует построить линейный график функции

$F(T) = P_0 \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} \right)$, все параметры которой известны. Для его построения достаточно

рассчитать координаты двух точек. Ниже показано необходимое построение. Точка пересечения этих графиков дает решения уравнения (8), т.е. необходимую температуру. В случае влажного воздуха она равна $t_1 = 64^\circ \text{C}$, что значительно ниже, чем для сухого воздуха.



2.2 Рассчитаем количество теплоты Q_1 , которое получил сухой воздух. По первому закону термодинамики количество полученной теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершенной работы

$$Q = \Delta U + A. \quad (9)$$

Изменение внутренней энергии воздуха рассчитывается по формуле

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T. \quad (10)$$

Используя уравнение процесса (4), находим, что

$$\Delta T = T_0 \left(\left(\frac{l}{l_0} \right)^2 - 1 \right) = T_0 \left((1 + \eta)^2 - 1 \right) = \eta(2 + \eta) T_0. \quad (11)$$

Тогда

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \eta(2 + \eta) \nu R T_0 = \frac{5}{2} \eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (12)$$

При выводе использовано уравнение состояния газа $P_0 S l_0 = \nu R T_0$.

В процессе расширения давление изменяется пропорционально объему. Работа может быть рассчитана по формуле

$$A = \frac{P_0 + P_1}{2} S \Delta l = \frac{P_0 + P_0(1 + \eta)}{2} \eta S l_0 = \frac{1}{2} \eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (13)$$

Таким образом, количество полученной теплоты равно

$$Q_1 = 3\eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (13)$$

Во втором случае значительное количество теплоты пойдет на испарение воды. Рассчитаем это количество:

$$Q_{исп.} = L \Delta m, \quad (14)$$

где Δm - масса испарившейся воды. Ее находим, используя уравнение состояния для водяного пара (пренебрегая давлением насыщенных паров при начальной температуре),

$$P_{нас.} S(1+\eta)l_0 = \frac{\Delta m}{M} RT \Rightarrow \Delta m = \frac{P_{нас.} M(1+\eta)}{RT} Sl_0. \quad (15)$$

В этом выражении $T = (64 + 273) = 337 K$, конечная температура, $P_{нас.} = 24 \text{ кПа}$ - давление насыщено водяного пара при этой температуре, $M = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ - молярная масса воды.

Вычислим отношение

$$\frac{Q_{исп}}{Q_1} = \frac{L \frac{P_{нас.} M(1+\eta)}{RT} Sl_0}{3\eta(2+\eta)P_0 Sl_0} = \frac{LM}{RT P_0} \frac{P_{нас.} (1+\eta)}{3\eta(2+\eta)} \approx 3,2. \quad (16)$$

При нагревании влажного воздуха изменение его температуры меньше, чем при нагревании сухого. Поэтому количество, теплоты, которое пойдет на нагревание сухого воздуха и совершение работы будет меньше, чем Q_1 . Поэтому в пределах допустимой погрешности можно считать, что $Q_2 \approx Q_{исп}$. То есть во втором случае, при нагревании влажного воздуха потребуется примерно в 3 раза большее количество теплоты.

Задача 10-3. Неоднородное гравитационное поле.

Часть 1. Ускорение свободного падения.

1.1 В соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли равно

$$g_r = G \frac{M}{r^2} \quad (1)$$

Это выражение можно представить в виде

$$g_r = G \frac{M}{r^2} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = g_0 \frac{R^2}{r^2}, \quad (2)$$

где $g_0 = G \frac{M}{R^2}$ - ускорение на поверхности Земли, M - масса Земли, R - ее радиус.

1.2 На расстоянии $r + x$ ускорение свободного падения можно описать формулой

$$g_{r+x} = g_0 \frac{R^2}{(r+x)^2} = g_0 \frac{R^2}{r^2} \left(1 + \frac{x}{r}\right)^{-2} \approx g_r \left(1 - 2 \frac{x}{r}\right), \quad (3)$$

при выводе которой использована приближенная формула (1) из условия задачи. Таким образом, требуемый коэффициент α оказывается равным

$$\alpha = -\frac{2}{r}. \quad (4)$$

1.3 Так как изменение ускорения свободного падения мало, то и искомая высота будет малой по сравнению с радиусом Земли. Поэтому можно воспользоваться приближенной формулой (3), полагая в ней $r = R$:

$$g \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right). \quad (5)$$

Из этой формулы следует, что относительное изменение ускорения свободного падения на высоте h равно

$$\eta = \frac{g - g_0}{g_0} = -2 \frac{h}{R}. \quad (6)$$

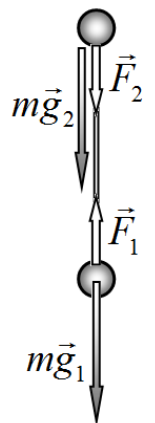
Из этой формулы находим

$$h = \frac{R}{2} \eta = \frac{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}}{2} \cdot 0,010 = 3,2 \cdot 10^4 \text{ м}. \quad (7)$$

Т.е. ускорение свободного падения уменьшается на 1% на высоте 32 километра.

Часть 2. Свободное падение.

2.1 Земля притягивает шары, строго говоря, с разной силой, так как они находятся на разных расстояниях от центра Земли: сила тяжести, действующая на нижний шар, больше силы, действующей на верхний шар. Но так как шары соединены стержнем, то ни падают с одинаковым ускорением. Это возможно только в том случае, когда на нижний шар со стороны стержня будет действовать «тормозящая» сила упругости \vec{F}_1 , направленная вверх, а на верхний шар «разгоняющая» сила \vec{F}_2 , направленная вниз. Эти простые рассуждения позволяют сделать вывод, что стержень должен быть растянут. Так как масса стержня пренебрежимо мала, то модули этих сил будут равны,



т.е. $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$. Таким образом, неоднородность гравитационного поля, приводит к появлению сил, стремящихся растянуть стержень.

Для расчета силы упругости в стержне запишем уравнения 2 закона Ньютона для каждого из шаров в проекции на вертикальную ось

$$\begin{aligned} ma &= mg_1 - F \\ ma &= mg_2 + F \end{aligned} \quad (8)$$

В этих уравнениях g_1, g_2 - ускорения свободного падения на расстояниях $\left(r - \frac{l}{2}\right)$ и $\left(r + \frac{l}{2}\right)$, соответственно. Из этой системы уравнений следует, что искомая сила определяется как

$$F = m \frac{g_1 - g_2}{2}. \quad (9)$$

Так как длина стержня мала по сравнению с радиусом Земли, то эти ускорения можно выразить с помощью формулы (3):

$$g_{r \pm \frac{l}{2}} = g_r \left(1 \mp \frac{l}{r}\right). \quad (10)$$

Подстановка этих выражений в формулу (9) дает окончательный результат

$$F = mg_r \frac{l}{r} = mg_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{l}{r}. \quad (11)$$

2.2 Для численного расчета при $r = R + h$ можно заметить, что не высокая точность исходных данных (две значащие цифры) позволяет пренебречь высотой h по сравнению с радиусом Земли (т.к. на этой высоте ускорение свободного падения изменяется менее чем на 1%), поэтому

$$\begin{aligned} F &= mg_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{l}{r} = mg_0 \frac{R+h}{R} \frac{l}{R} = mg_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right) \frac{l}{R} \approx mg_0 \frac{l}{R} = \\ &= 10_{кг} \cdot 9,8 \frac{м}{с^2} \cdot \frac{10_{м}}{6,4 \cdot 10^6_{м}} = 1,5 \cdot 10^{-4} Н \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 Как и следовало ожидать, сила, растягивающая стержень в процессе его падения, крайне мала. Однако, следует ее сравнить с силой гравитационного взаимодействия шаров

$$F_G = G \frac{m^2}{l^2}. \quad (13)$$

Их отношение выражается следующим образом

$$\frac{F}{F_G} = \frac{mg_0 \frac{l}{R}}{G \frac{m^2}{l^2}} = \frac{G \frac{M}{R^2} \frac{l}{R}}{G \frac{m}{l^2}} = \frac{M}{m} \frac{l^3}{R^3} = \frac{R^3}{b^3} \frac{l^3}{R^3} = \left(\frac{l}{b}\right)^3. \quad (14)$$

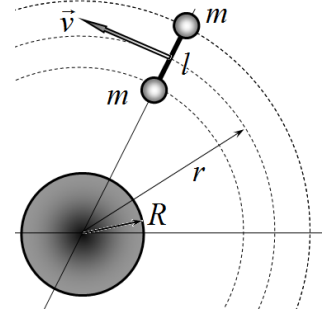
При выводе учтено, что отношение масс шаров при одинаковой плотности равно отношению кубов их радиусов $\frac{M}{m} = \frac{R^3}{b^3}$. При заданных численных параметрах это отношение равно

$$\frac{F}{F_G} = \left(\frac{l}{b}\right)^3 = \left(\frac{10}{0,10}\right)^3 = 1,0 \cdot 10^6. \quad (15)$$

Таким образом, найденная «разрывающая сила» в миллион (!) раз превышает силу гравитационного притяжения.

Часть 3. Орбитальная станция.

Решение этой части полностью аналогично решению предыдущей. Только необходимо учесть, что в данном случае ускорения, с которыми движутся отсеки станции, являются центростремительными, зависящими от радиусов их орбит. При описанном характере движения одинаковыми являются угловые скорости движения отсеков. Поэтому уравнения 2 закона Ньютона в проекции на радиальное направление для каждого из отсеков имеют вид



$$\begin{aligned} m\omega^2\left(r - \frac{l}{2}\right) &= mg_1 - F \\ m\omega^2\left(r + \frac{l}{2}\right) &= mg_2 + F \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, как и ранее g_1, g_2 , - ускорения свободного падения на расстояниях $\left(r - \frac{l}{2}\right)$ и $\left(r + \frac{l}{2}\right)$ от центра Земли:

$$g_1 = g_r\left(1 + \frac{l}{r}\right), \quad g_2 = g_r\left(1 - \frac{l}{r}\right) \quad (17)$$

Вычитая из второго уравнения системы (16) первое, получим

$$m\omega^2 l = mg_2 - mg_1 + 2F .$$

или

$$F = \frac{m\omega^2 l}{2} + \frac{mg_1 - mg_2}{2} . \quad (18)$$

Угловую скорость движения станции можно определить из уравнения Ньютона для центра масс станции

$$2m\omega^2 r = mg_1 + mg_2 . \quad (19)$$

Из которого следует

$$\omega^2 = \frac{g_1 + g_2}{2} \frac{1}{r} . \quad (20)$$

Подстановка выражений для ускорений и угловой скорости в формулу (18) дает:

$$F = \frac{m\omega^2 l}{2} + \frac{mg_1 - mg_2}{2} = m\left(\frac{g_1 + g_2}{2} \frac{l}{r} + \frac{g_1 - g_2}{2}\right) = m\left(g_r \frac{l}{r} + g_r \frac{l}{r}\right) = 2mg_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{l}{r} . \quad (21)$$

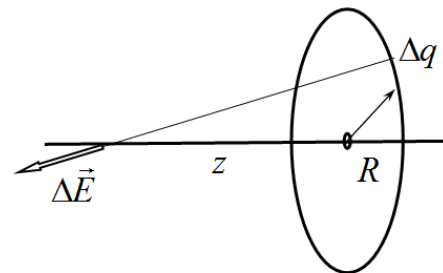
Заметим, что полученный результат в два раза превышает полученный ранее в формуле (11). Это связано с тем, что помимо различия в силах тяжести, существует различие в ускорениях связанных тел¹.

¹ Это же различие легко объяснить, если перейти во вращающуюся неинерциальную систему отсчета, связанной с самой станцией. В этой системе отсчета, на отсеки действуют различные центробежные силы, помимо сил гравитационных.

Задача 11-1. «Электростатическая пушка»

1.1 Вектор напряженности электростатического поля кольца направлен вдоль его оси. Модуль вектора напряженности легко находится с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$



1.2 В промежутке времени, когда шарик и кольцо заряжены, на шарик действует электрическая сила

$$F = qE. \quad (2)$$

Так время действия силы мало, то можно пренебречь смещением шарика за время действия силы. В этом случае скорость шарика может быть найдена из 2 закона Ньютона в импульсной форме

$$mv = qE\tau \Rightarrow v = \frac{q\tau}{m} E. \quad (3)$$

Как следует из последнего равенства, скорость шарика будет максимальна, если он находится в точке с максимальной напряженностью.

Для того, чтобы найти эту точку вычислим производную от функции (1)

$$\left(\frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right)' = \frac{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - z \cdot \frac{3}{2}(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z}{(z^2 + R^2)^3} = \frac{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}(z^2 + R^2 - 3z^2)}{(z^2 + R^2)^3} = 0$$

И приравняем ее к нулю. Из этого условия следует, что напряженность поля максимальна на расстоянии

$$z^* = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

от центра кольца. Это максимальное значение равно

$$E_{\max}(z^*) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{R^2}{2} + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в формулу (3) для скорости, получим ответ на поставленный вопрос:

$$v_{\max} = \frac{\tau}{m} \frac{q^2}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (6)$$

Часть 2 Шарик не заряжается.

2.1 Сила, действующая на диполь, также находится с помощью принципа суперпозиции:

$$F = qE(z+a) - qE(z) = qa \frac{\Delta E}{a} = p \frac{\Delta E}{\Delta z}. \quad (7)$$

2.2 Сила, действующая на шарик с индуцированным дипольным моментом, рассчитывается по формуле

$$F = p \frac{dE}{dz} = 4\pi\epsilon_0 r^3 E \frac{dE}{dz}. \quad (8)$$

На больших расстояниях напряженность поля кольца совпадает с напряженностью поля точечного заряда (что следует из формулы (1)):

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^2} \quad (9)$$

Производная от этой функции равна

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^3}. \quad (10)$$

Собирая все записанные формулы воедино, получим выражение для силы, действующей на незаряженный проводящий шарик

$$F = p \frac{dE}{dz} = 4\pi\epsilon_0 r^3 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^2} \right) \left(-\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^3} \right) = -\frac{q^2 r^3}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^5}. \quad (11)$$

Задача 11-2 «Монгольфьер и шарльер».

Часть 1. Стандартная атмосфера.

1.1 Для расчета плотности воздуха следует воспользоваться уравнением состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M}RT \quad (1)$$

Из которого следует, что плотность газа рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}. \quad (2)$$

Подстановка численных значений для уровня моря дает следующее численное значение:

$$\rho_0 = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 28,97 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot (15,00 + 273,16) \text{ К}} = 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (3)$$

1.2 Описание стандартной атмосферы позволяет записать зависимость температуры от высоты в виде

$$T = T_0 - \frac{\Delta t^\circ}{\Delta z} z = T_0 \left(1 - \left(\frac{1}{T_0} \frac{\Delta t^\circ}{\Delta z} \right) z \right). \quad (4)$$

Сравнивая с формулой $T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{h} \right)$, приведенной в условии задачи, видим, что параметр h определяется формулой

$$h = T_0 \left(\frac{\Delta t^\circ}{\Delta z} \right)^{-1} = \frac{288,16 \text{ К}}{6,500 \cdot 10^{-3} \frac{\text{К}}{\text{м}}} = 4,433 \cdot 10^4 \text{ м} \quad (5)$$

Величина $T_0 = 15,00 + 273,16 = 288,16 \text{ К}$ - абсолютная температура на уровне моря.

1.3 Для получения зависимости давления от высоты следует учесть, что плотность воздуха также изменяется с высотой. Однако при изменении высоты на малую величину Δz изменением плотности в пределах слоя Δz можно пренебречь. В этом случае уменьшение давления с высотой описывается формулой (для гидростатического давления)

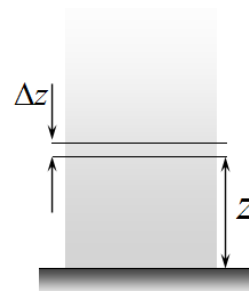
$$\Delta P = -\rho g \Delta z. \quad (6)$$

Здесь ρ - плотность воздуха на высоте z . Для плотности воздуха следует воспользоваться формулой (2) и найденной зависимостью температуры от высоты, поэтому

$$\rho = \frac{PM}{RT_0 \left(1 - \frac{z}{h} \right)}. \quad (7)$$

Таким образом, уравнение для определения зависимости давления от высоты имеет вид:

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = - \frac{Mg}{RT_0 \left(1 - \frac{z}{h} \right)} P. \quad (8)$$



1.4 Используем указанную зависимость давления от высоты. Не сложно получить, что если

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha, \text{ то}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\frac{\alpha P_0}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} \quad (9)$$

Отметим, что эту формулу можно получить как производную от функции $P(z)$, так и с помощью приближенной формулы, приведенной в условии задачи. С помощью этой формулы можно найти, что

$$\begin{aligned} P(z + \Delta z) &= P_0 \left(1 - \frac{z + \Delta z}{h}\right)^\alpha = P_0 \left(1 - \frac{z}{h} - \frac{\Delta z}{h}\right)^\alpha = P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\frac{\Delta z}{h}}{\left(1 - \frac{z}{h}\right)}\right)^\alpha \approx \\ &\approx P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha \left(1 - \alpha \frac{\frac{\Delta z}{h}}{\left(1 - \frac{z}{h}\right)}\right) = P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha - \frac{\alpha P_0}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} \Delta z \end{aligned}$$

Откуда и следует формула (9)

Подставляя найденные выражения в уравнение (8), получим:

$$-\frac{\alpha P_0}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} = -\frac{Mg}{R} \frac{P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha}{T_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)} = -\frac{Mg}{RT_0} P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1}. \quad (10)$$

Из этой формулы следует, что, во-первых, указанная в условии функция, действительно является решением уравнения (8); во-вторых, показатель степени в этой формуле равен

$$\alpha = \frac{Mgh}{RT_0} = 5,257 \quad (11)$$

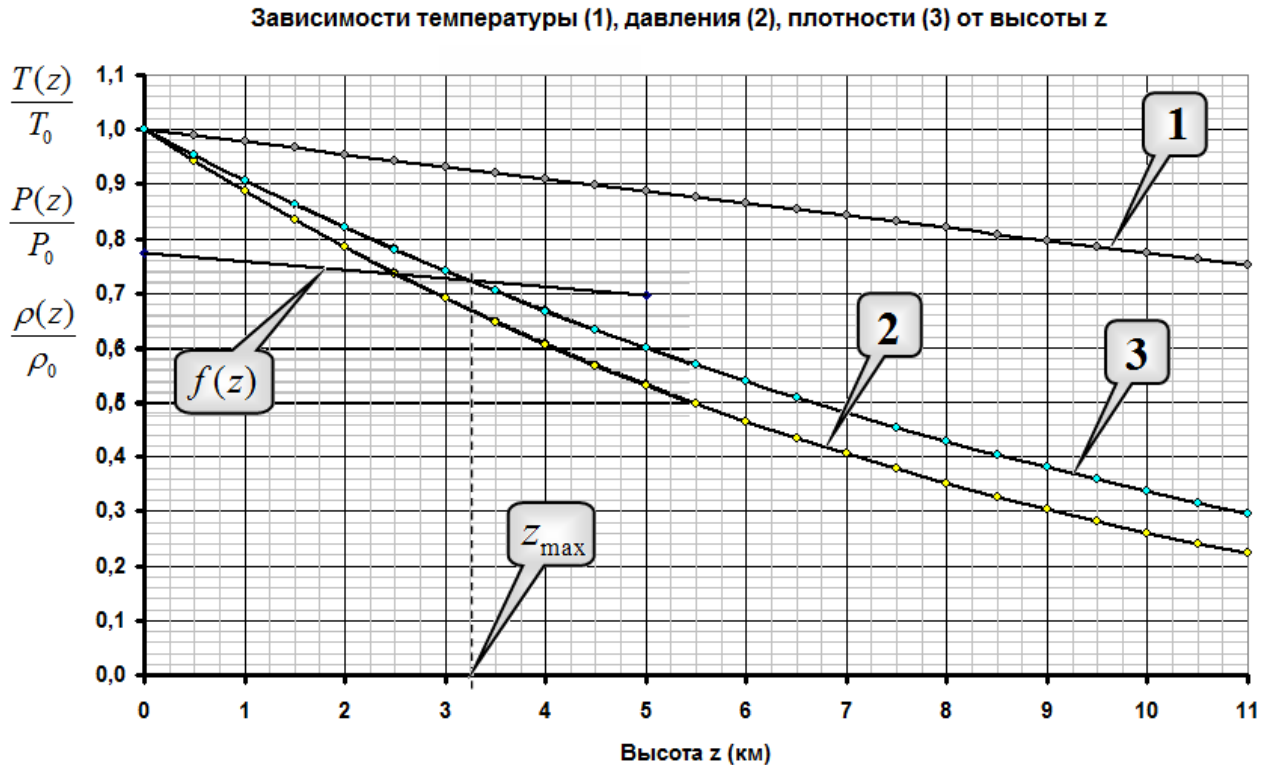
Зависимость плотности от высоты описывает следующая функция

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha M}{RT_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)} = \frac{P_0 M}{RT_0} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1}. \quad (12)$$

Следовательно, показатель степени в этой зависимости равен

$$\beta = \alpha - 1 = \frac{Mgh}{RT_0} - 1 = 4,257. \quad (13)$$

1.5 Требуемые графики показаны на рисунке.



Часть 2. Шарльер.

2.1 В соответствии с законом Архимеда максимальная масса шара равна массе вытесненного шаром, т.е.

$$m_{\max} = \rho_0 V = 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 400 \text{ м}^3 = 490 \text{ кг} . \quad (14)$$

2.2 Так как оболочка закрыта, то масса водорода остается неизменной. Кроме того, в условии оговорено, что объем оболочки остается постоянным, поэтому и средняя плотность воздушного шара также остается неизменной.

На максимальной высоте масса вытесненного воздуха равна $(m_{\max} - m_1)$, при этом выполняется условие:

$$\rho(z_{\max}) V = (m_{\max} - m_1) , \quad (15)$$

из которого следует уравнение:

$$\rho_0 \left(1 - \frac{z_{\max}}{h} \right)^\beta = (m_{\max} - m_1) . \quad (16)$$

Разделим это уравнение на равенство (14), в результате чего получим

$$\left(1 - \frac{z_{\max}}{h} \right)^\beta = \left(1 - \frac{m_1}{m_{\max}} \right) . \quad (17)$$

Откуда находим максимальную высоту подъема

$$z_{\max} = h \left(1 - \left(1 - \frac{m_1}{m_{\max}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right) \approx 2,0 \text{ км} \quad (18)$$

Допустимо и приближенное решение уравнения (16), с использованием приближенной формулы $\left(1 - \frac{z_{\max}}{h}\right)^\beta \approx 1 - \beta \frac{z_{\max}}{h}$. В этом приближении уравнение имеет вид

$$1 - \beta \frac{z_{\max}}{h} = 1 - \frac{m_1}{m_{\max}}, \text{ а его решение } z_{\max} = \frac{h}{\beta} \frac{m_1}{m_{\max}} = 1,9 \text{ км.}$$

Также можно воспользоваться построенным графиком зависимости $\rho(z)$. Для этого нужно рассчитать среднюю плотность шара $\bar{\rho} = \frac{m_{\max} - m_1}{V} \approx 1,00 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и ее отношение к плотности воздуха на уровне моря $\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \approx 0,82$. По графику не сложно найти, что плотность воздуха опускается до этого значения на высоте примерно равной 2,0 км.

Отметим, что согласно историческим данным Ж. Шарль поднялся на высоту в 3 км, возможно, наша оценка оказалась заниженной, потому что при расчетах не принималось во внимание расширение оболочки шара по мере подъема.

Часть 3. Монгольфьер.

3.1 Так как оболочка монгольфьера открыта, то на любой высоте одинаковыми будут давления воздуха внутри шара и снаружи. Масса воздуха внутри оболочки не будет изменяться при изменении его температуры и давления.

Используя закон Архимеда, можно записать условие равновесия шара на произвольной высоте

$$\rho V g = m g + \rho_1 V g, \quad (19)$$

Где ρ - плотность атмосферного воздуха на произвольной высоте z , ρ_1 - плотность воздуха внутри шара на той же высоте, $V = 2200 \text{ м}^3$ - объем шара, m - масса шара без массы воздуха внутри его. Это соотношение удобно переписать в виде

$$(\rho - \rho_1) V = m, \quad (19)$$

Так как давления воздуха внутри и вне оболочки одинаковы, то разность плотностей можно представить в виде

$$(\rho - \rho_1) = \frac{PM}{RT} - \frac{PM}{R(T + \Delta T)} = \frac{PM}{RT} \left(1 - \frac{T}{T + \Delta T}\right) = \rho \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \quad (20)$$

Тогда условие равновесия шара принимает вид

$$\rho V \frac{\Delta T}{T + \Delta T} = m. \quad (21)$$

В частности, на уровне моря, это выражение позволяет рассчитать общую массу монгольфьера

$$m = \rho_0 V \frac{\Delta T_0}{T_0 + \Delta T_0} = 1,22 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 2200 \text{ м}^3 \frac{30}{288 + 30} = 2,5 \cdot 10^2 \text{ кг}. \quad (22)$$

3.2 С помощью соотношений (21) и (22) можно получить уравнение для нахождения максимальной высоты подъема:

$$\rho(z) \frac{\Delta T_1}{T(z) + \Delta T_1} = \rho_0 \frac{\Delta T_0}{T_0 + \Delta T_0}. \quad (23)$$

Преобразуем его к виду

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{\Delta T_0}{T_0 + \Delta T_0} \frac{T(z) + \Delta T_1}{\Delta T_1} = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \frac{T(z)}{T_0} + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)}. \quad (24)$$

Это уравнение слишком сложно для аналитического решения. Поэтому необходимо использовать приближенные методы. Одним из возможных способов такого решения является графический. Заметим, что функция, стоящая в правой части, является линейной

$$f(z) = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \frac{T(z)}{T_0} + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)} = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \left(1 - \frac{z}{h}\right) + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)}.$$

Рассчитаем коэффициенты этой линейной зависимости

$$f(z) = b - cz$$

$$b = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)} = \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)} \frac{T_0 + \Delta T_1}{\Delta T_1} \approx 0,77. \quad (25)$$

$$c = \frac{1}{h} \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \approx \frac{0,68}{h} = 0,015 \text{ км}^{-1}$$

Далее на Бланке с графиком зависимости плотности атмосферы от высоты следует построить график этой функции $f(z)$ (см. на рисунке) и найти точку их пересечения. Координата этой точки и дает максимальную высоту подъема монгольфьера

$$z_{\max} \approx 3,2 \text{ км}. \quad (26)$$

Другой способ приближенного расчета – воспользоваться приближением для функции

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\beta \approx 1 - \beta \frac{z}{h}.$$

Тогда уравнение (24) становится линейным и решается элементарно. Значение высоты в этом приближении оказывается равным $z_{\max} \approx 2,8 \text{ км}$.

Задача 11-3. «Сейсморазведка»

Часть 1. Одна плоская горизонтальная граница.

1.1 Закон отражения волн (угол падения равен углу отражения) одинаков для волн любой природы. Поэтому для расчета времени прохождения волны можно построить изображение точки взрыва E' зеркально симметрично относительно нижней границы (рис. 1)

Как следует из рисунка, время прохождения волны до приемника определяется формулой

$$t_k = \frac{\sqrt{L_k^2 + 4h^2}}{c} \quad (1)$$

1.2 Чтобы получить линейную зависимость достаточно возвести полученное выражение в квадрат

$$t_k^2 = \frac{L_k^2}{c^2} + \frac{4h^2}{c^2} \quad (2)$$

В этом случае следует построить зависимость величины $Y = t_k^2$ от величины $x = L_k^2$. Тогда параметры линейной зависимости $Y = aX + b$ выражаются через характеристики пласта следующим образом:

$$a = \frac{1}{c^2}, \quad b = \frac{4h^2}{c^2} \quad (3)$$

1.3 В таблице 1 приведены результаты расчетов этих величин. Ниже показан график этой зависимости.

Таблица 1.

L_k , км	0,80	1,50	2,30	3,70	4,20	5,30
t_k , с	1,11	1,13	1,18	1,35	1,43	1,59
L_k^2 , км ²	0,64	2,25	5,29	13,69	17,64	28,09
t_k^2 , с ²	1,19	1,27	1,42	1,82	2,01	2,52

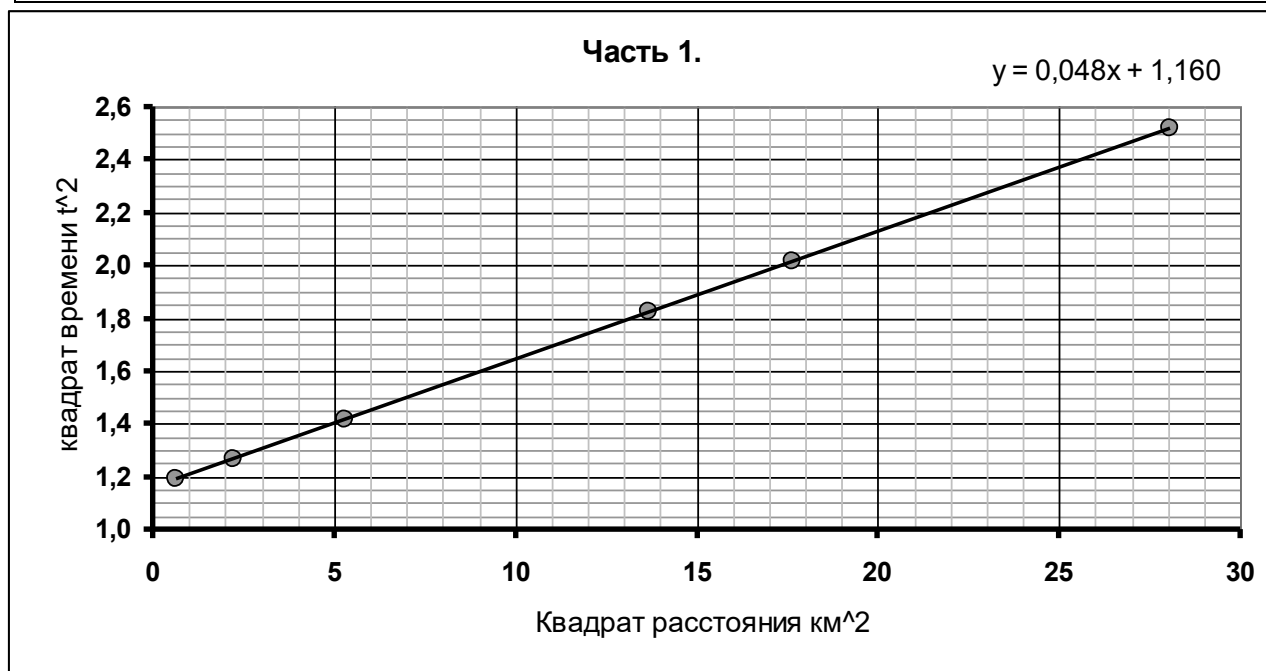


Рис. 2

Параметры этой зависимости оказываются равными

$$a = 0,048 \frac{c^2}{m^2}, \quad b = 1,16c^2 \quad (4)$$

Значения скорости волны и высоты пласта легко выражаются из формул (3)

$$c = \frac{1}{\sqrt{a}} \approx 4,6 \frac{км}{с};$$

$$h = \sqrt{\frac{b}{4a}} \approx 2,46 км \quad (5)$$

Часть 2. Одна плоская наклонная граница.

2.1 В этой части также проще построить изображение точки взрыва E' и рассчитать расстояние от этой точки до приемника R_k (рис. 2). Расчет этого расстояния является простой геометрической задачей. Расстояние между источником и его изображением равно

$$|EE'| = 2h \cos \alpha. \quad (6)$$

Путь, который проходит волна, равен расстоянию от изображения до приемника, которое можно определить с помощью теоремы косинусов для треугольника $EE'R_k$ (с учетом того, что

$$\angle E'ER = \frac{\pi}{2} - \alpha):$$

$$S_k = |E'R| = \sqrt{L_k^2 + (2h \cos \alpha)^2 - 4L_k h \cos \alpha \cdot \sin \alpha}. \quad (7)$$

Следовательно, время прихода отраженной волны равно

$$t_k = \frac{\sqrt{L_k^2 + (2h \cos \alpha)^2 - 4L_k h \cos \alpha \cdot \sin \alpha}}{c}. \quad (8)$$

Что бы линейаризовать эту зависимость, перепишем формулу (8) в виде

$$c^2 t_k^2 - L_k^2 = (2h \cos \alpha)^2 - 4L_k h \cos \alpha \cdot \sin \alpha. \quad (9)$$

Таким образом, величина

$$Y_k = c^2 t_k^2 - L_k^2 \quad (10)$$

Линейно зависит от квадрата расстояния до приемника $X = L_k^2$: $Y = aX + b$. Параметры этой зависимости определяются формулами

$$a = 4h \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$b = (2h \cos \alpha)^2 \quad (11)$$

В Таблице 2 Приведены результаты расчетов величин Y_k , ниже приведен график линейаризованной зависимости.

Таблица 2.

L_k , км	0,60	1,10	2,00	2,60	3,30	3,90
t_k , с	0,95	0,93	0,95	0,98	1,03	1,09
$Y_k = c^2 t_k^2 - L_k^2$, км ²	17,8	16,3	14,4	12,7	10,5	9,0

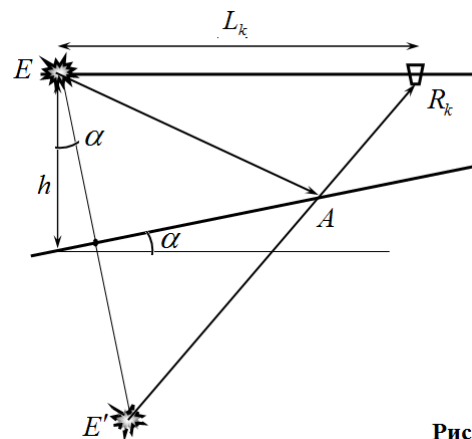
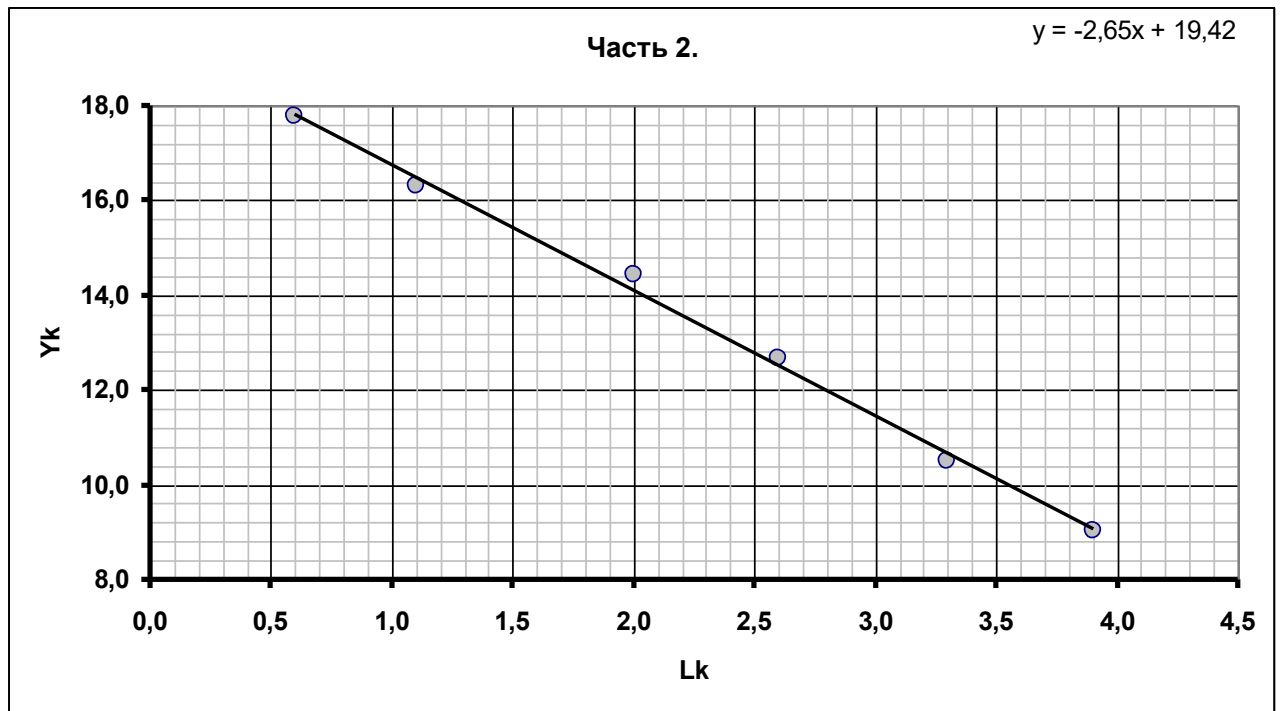


Рис. 2



Параметры этой зависимости, определенные по построенному графику, оказались равными $a = -2,65 \text{ км}$, $b = 19,42 \text{ км}^2$. (12)

Из формул (11) следует, что требуемые характеристики пласта равны

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = 2 \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{a}{2\sqrt{b}} \approx 0,31 \approx 17,5^\circ \quad (13)$$

$$h = \frac{a}{2 \sin 2\alpha} \approx 2,3 \text{ км}$$

Часть 3. Промежуточный пласт.

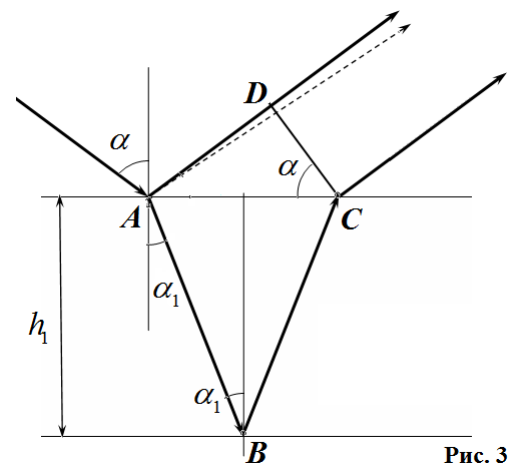
3.1 Так как ширина пласта мала, то с хорошей точностью можно считать, что разность времен прихода равна разности времени движения волн по путям ABC и AD (рис. 3). Здесь отрезок CD перпендикулярен отраженным лучам и является фронтом волны.

Из рисунка не сложно найти длины этих путей:

$$|AB| = \frac{h_1}{\cos \alpha_1}$$

$$|AC| = 2 \frac{h_1}{\cos \alpha_1} \sin \alpha_1$$

$$|AD| = |AC| \sin \alpha = 2 \frac{h_1}{\cos \alpha_1} \sin \alpha_1 \sin \alpha$$



Тогда разность времен определится по формуле

$$\tau = \frac{2|AB|}{c_1} - \frac{|AD|}{c} \quad (14)$$

Используя закон преломления $\sin \alpha = n \sin \alpha_1$ и полученные геометрические соотношения, эта формула преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2|AB|}{c_1} - \frac{|AD|}{c} = \frac{2}{c} \frac{nh_1}{\cos \alpha_1} - 2 \frac{h_1}{c \cdot \cos \alpha_1} \sin \alpha_1 \sin \alpha = \\ &= \frac{2nh_1}{c} \frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{2nh_1}{c} \cos \alpha_1 = \frac{2nh_1}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} = \frac{2h_1}{c} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \end{aligned} \quad (15)$$

3.2 Из полученной формулы (15) следует, что величина

$$Y = c^2 \tau^2 \quad (16)$$

линейно зависит от квадрата синуса угла падения

$$X = \sin^2 \alpha \quad (17)$$

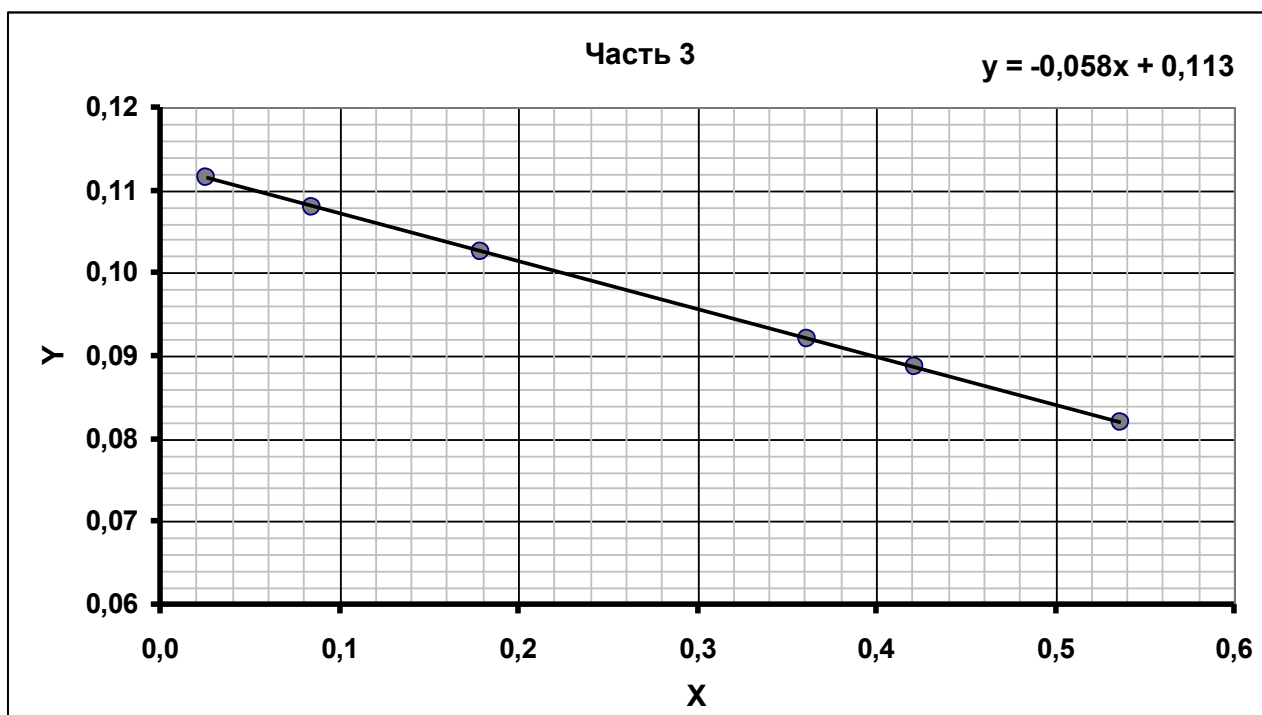
В свою очередь синус угла падения рассчитывается по формуле (см. рис. 1):

$$\sin \alpha = \frac{(L/2)}{\sqrt{(L/2)^2 + h^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4h^2}} \quad (18)$$

Толщина соленого пласта вычислена в Части 1, поэтому синусы угла падения могут быть вычислены для всех приемников. В таблице 3 приведены результаты расчетов величин Y_k и X_k , ниже приведен график зависимости $Y(X)$.

Таблица 3.

L_k , км	0,80	1,50	2,30	3,70	4,20	5,30
t_k , с	1,11	1,13	1,18	1,35	1,43	1,59
τ , мс	74	73	71	67	66	64
$\sin \alpha$	0,160	0,292	0,423	0,601	0,649	0,733
$X_k = \sin^2 \alpha_k$	0,026	0,085	0,179	0,361	0,422	0,537
$Y_k = c^2 \tau_k^2$, км ²	0,111	0,108	0,103	0,092	0,089	0,082



Из формулы (15) следует, что данная зависимость выражается функцией

$$c^2 \tau^2 = -4h_1^2 \sin^2 \alpha + 4h_1^2 n^2. \quad (19)$$

Следовательно, параметры линейной зависимости $Y = aX + b$ задаются формулами

$$a = -4h_1^2, \quad b = 4h_1^2 n^2. \quad (20)$$

Численные значения параметров зависимости, найденные из построенного графика, оказались равными

$$a = -0,058 \text{ км}^2, \quad b = 0,113 \text{ км}^2. \quad (21)$$

Характеристики пласта рассчитываются по формулам

$$h_1 = \frac{\sqrt{-a}}{2} \approx 0,12 \text{ км};$$
$$n = \sqrt{-\frac{b}{a}} \approx 1,4. \quad (22)$$

Скорость волн в этом пласте

$$c_1 = \frac{c}{n} \approx 3,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (23)$$