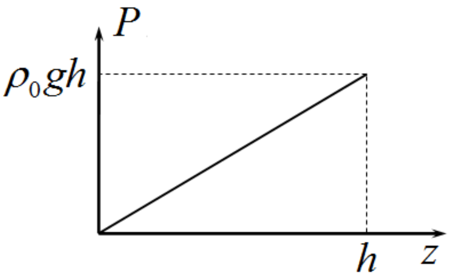
III этап Республиканской олимпиады по физике 2018 года

Решения задач

Задача 9-1. Переменная плотность

Часть 1. Обычная жидкость



1.1 Давление зависит от глубины по закону

$$P = \rho_0 gz \tag{1}$$

График этой зависимости – прямая линия, проходящая через начало координат.

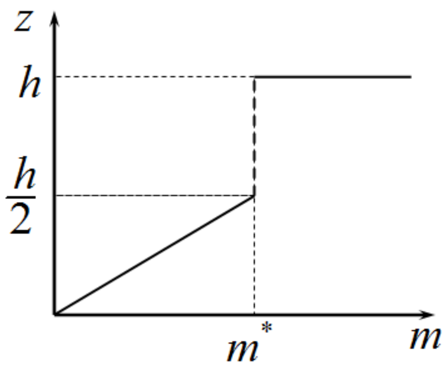
1.2 Сила тяжести трубки уравновешивается силой давления жидкости на нижнее основание

$$mg = P(z)S = \rho_0 gzS \quad \Rightarrow \quad z = \frac{mg}{\rho_0 gS}. \tag{2}$$

Когда трубка погрузится полностью, она сразу утонет. Масса, при которой начнет тонуть,

$$z = \frac{m^* g}{\rho_0 gS} = \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad m^* = \frac{\rho_0 gSh}{2g}. \tag{3}$$

График зависимости на рисунке.

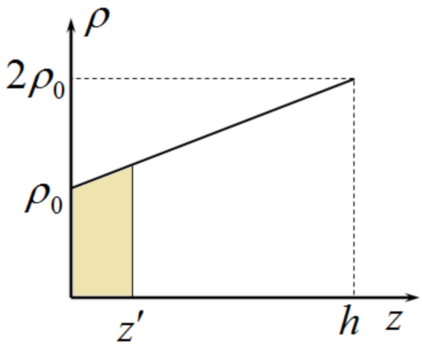


Часть 2. Необычная жидкость.

2.1 Формулу зависимости плотности жидкости от глубины $\rho(z)$

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{z}{h}\right). \tag{4}$$

Схематический график этой зависимости на рисунке.



2.2 Гидростатическое давление внутри жидкости на глубине z

$$P = m'gz \tag{5}$$

Где m' масса столба жидкости единичной площади над уровнем z. Эта масса может быть найдена как площадь под графиком $\rho(z)$ (выделена на рис.), или с использованием средней плотности в слое толщиной z. Поэтому искомая зависимость имеет вид

$$P = m'gz = \rho_0 gh\left(1 + \frac{z}{2h}\right)\frac{z}{h} \tag{6}$$

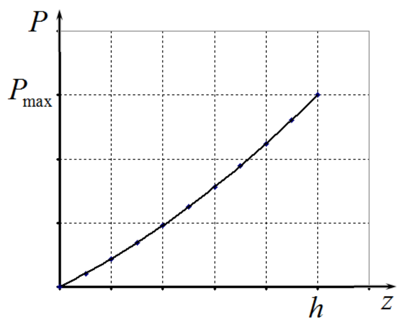


График парабола, проходящая через нуль, максимальное значение при $z = h$: $P_{\max} = \frac{3}{2}\rho_0 gh$.

2.3 Массу трубки m_0, при которой она полностью погрузится в жидкость, находится из уравнения

$$m_0 g = P\left(\frac{h}{2}\right)S \quad \Rightarrow \quad m_0 = \frac{S}{g}\rho_0 gh\left(1+\frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} = \frac{5}{8}\rho_0 Sh \ . \tag{7}$$

2.4.1 Если верхний конец трубки находится над водой, то справедливо уравнение

$$mg = P(z)S = \rho_0 ghS\left(1+\frac{z}{2h}\right)\frac{z}{h}. \tag{8}$$

Так как $m_0 = \frac{5}{8}\rho_0 Sh \quad \Rightarrow \quad \rho_0 Sh = \frac{8}{5}m_0$, то уравнение (8) преобразуется к виду

$$\frac{m}{m_0} = \frac{8}{5}\left(1+\frac{z}{2h}\right)\frac{z}{h} \quad \Rightarrow \quad y(y+2) = \frac{5}{4}n \tag{9}$$

Итак, при $n<1$ глубина погружение есть положительный корень уравнения (9). Легче рассчитать $n(y)$.

При $m > m_0$ трубка полностью погружена в воду. При этом справедливо уравнение, следующее из закона Архимеда:

$$mg = \rho\left(z-\frac{h}{4}\right)gS\frac{h}{2}. \tag{10}$$

Здесь $\rho\left(z-\frac{h}{4}\right) = \rho_0\left(1+\frac{z-\frac{h}{4}}{h}\right) = \rho_0\left(\frac{3}{4}+y\right)$ - плотность жидкости на уровне середины трубке (средняя плотность вытесненной жидкости). Из уравнения (10) следует

$$mg = \rho_0\left(\frac{3}{4}+y\right)gS\frac{h}{2} = \frac{4}{5}m_0 g\left(\frac{3}{4}+y\right) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{3+4y}{5} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5n-3}{4}. \tag{11}$$

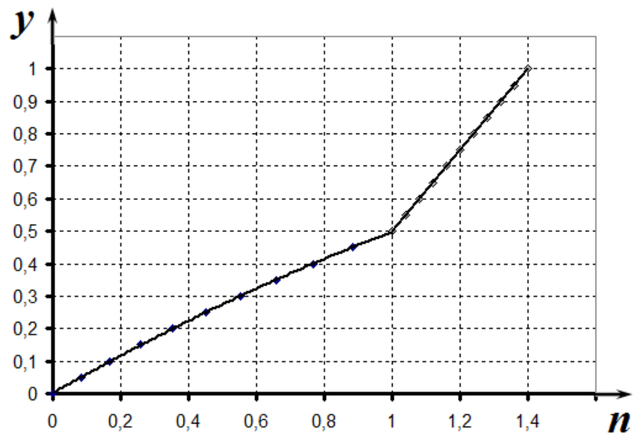
Таким образом, при $n>1$ зависимость глубины погружения от массы линейна.

2.4.2 Трубка полностью погрузится в воду при n_1=1 (по определению)

2.4.4 Центр трубки будет находиться на середине слоя жидкости (при этом $y = \frac{3}{4}$) при $n_2 = \frac{6}{5}$.

2.4.5 Трубка достигнет дна ($y=1$) при $n_3 = \frac{7}{5}$.

График искомой зависимости показан на следующем рисунке.



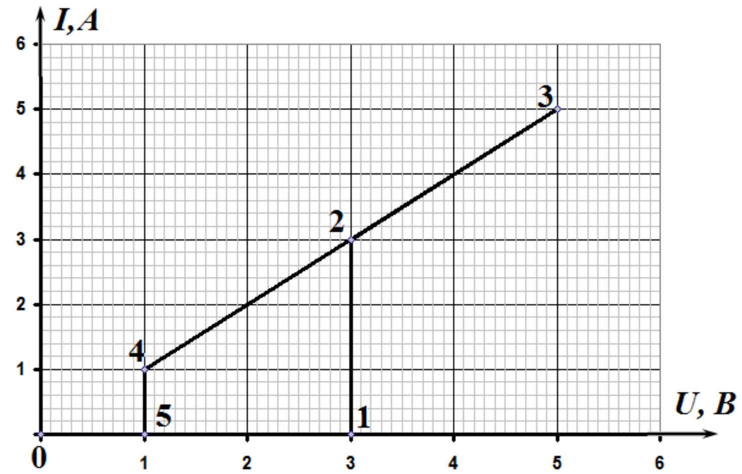
Задача 9-2 Газоразрядная лампочка

Комментарии к условию. Главная особенность данной задачи заключается в том, что в программе курса физики до 9 класса не изучаются ни конденсаторы, ни нелинейные электрические элементы. Но это олимпиадная задача, предполагается, что участники должны уметь извлекать нужную информацию из условия задачи (поэтому и размер условия заметно превышает задания ЦТ), использовать известные физические законы и принципы для описания неизвестных явлений. Кстати, последнее положение фигурирует и в правилах проведения международных физических олимпиад.

К удовольствию членов жюри, многие из участников олимпиад успешно справились с решением этой задачи. Отметим также, что каждому участнику были выданы подготовленные бланки для построения требуемых графиков.

Приступим к обсуждению решения данной задачи. Прежде всего следует сообразить, что неоновая лампочка является своеобразным выключателем: в диапазоне низких напряжений она «выключена», ток через нее практически не идет; при более высоких напряжениях она «включена» - ее сопротивление становиться малым. Существенно, что это сопротивление постоянно, не зависит от напряжения, поэтому в этом режиме лампочка работает как обыкновенный резистор, для которого выполняется закон Ома для участка цепи. Существенно, что эти диапазоны перекрываются: в диапазоне от 1 до 3 вольт лампочка может находиться в обоих состояниях. Выбор одного из них зависит от «предыстории» , от того, в каком состоянии находилась лампочка до попадания в этот бистабильный диапазон.

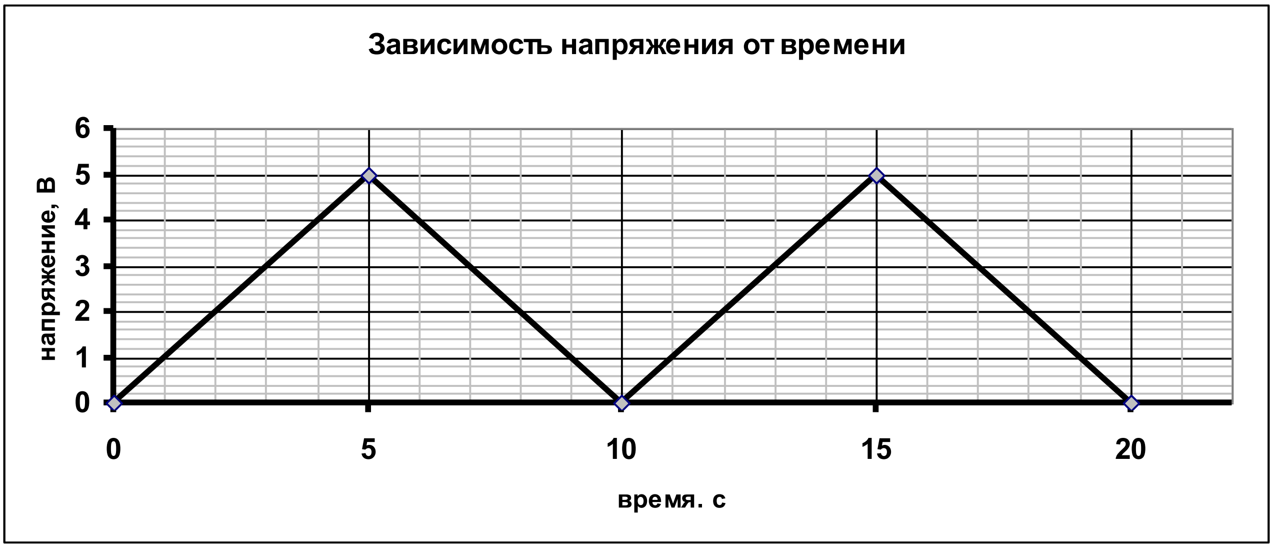
Понимание этих принципов работы достаточно, что выполнить первый пункт задачи, построение вольтамперной характеристики.

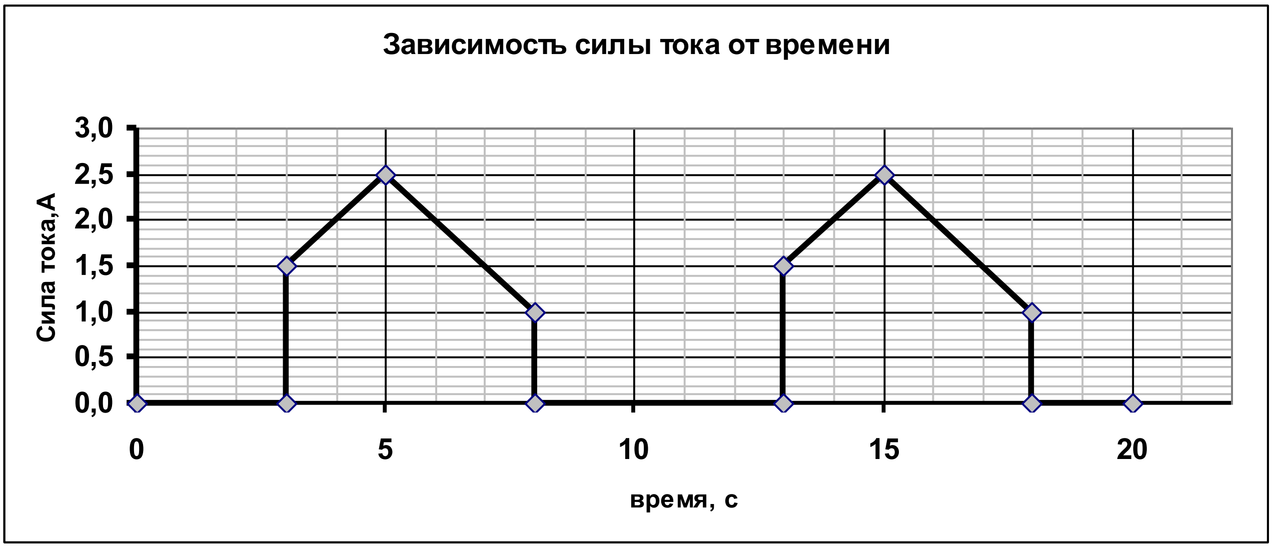


При увеличении напряжения от 0 до 3 вольт (участок 0-1) ток через лампочку отсутствует, при достижении напряжения в 3 В лампочка зажигается (переход 1-2), при дальнейшем увеличении напряжения сила тока прямо пропорциональная приложенному напряжению в соответствии с законом Ома (участок 2-3) . При уменьшении напряжения, линейное уменьшении силы тока будет наблюдаться, пока напряжение не упадет до 1 В (участок 3-4), после чего лампочка гаснет. Итак, с точки зрения математики, самое сложное на этом этапе – умение построить график функции $U = \frac{I}{R}$, причем при $R = 1{,}0 Ом$.

Небольшая сложность в решении следующего пункта заключается в том, что задана зависимость напряжения от времени не на лампочке, на всей цепи. Поэтому нужно аккуратно и с пониманием рассмотреть, как изменяется напряжение на именно лампочке, то есть правильно «поделить» суммарное напряжение между резистором и лампочкой: если лампочка не горит (ее сопротивление значительно больше сопротивление резистора), то напряжение на лампочке практически равно суммарному напряжению. Поэтому лампочка загорится, когда напряжение источника достигнет напряжения зажигания, т.е. 3 В. При горящей лампочке зависимость силы тока от напряжения описывается законом Ома $I = \frac{U}{R + R^*}$.

Если же лампочка горит, ее сопротивление равно сопротивлению резистора, следовательно, лампочка погаснет, когда напряжение источника упадет до 2 В (в это момент напряжение на лампочке будет равно 1В). Требуемый график показан на следующем рисунке.





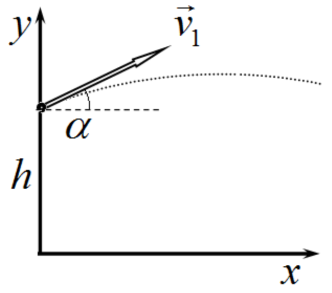
Во второй части задачи ситуация, в некотором смысле противоположная: пока напряжение меньше напряжения зажигания – напряжение растет по указанному закону. Когда напряжение достигает напряжение зажигания - открывается лампочка и конденсатор очень быстро разряжается до напряжения гашения. После этого процесс повторяется. Лампочка вспыхивает в момент разрядки конденсатора, когда напряжение скачком падает до нуля, после чего процесс зарядки повторяется. Лампочка вспыхивает в короткий промежуток времени разрядки конденсатора, когда напряжение на нем скачком падает до нуля. Отметим, что рассмотренная схема является схемой, так называемого, релаксационного генератора. Колебания в данном случае относятся к типу автоколебаний. Требуемая зависимость показана на рисунке.

Задача 9.3 Попади «в яблочко!»

Описание движения тела, брошенного под углом у горизонту, является настолько известной и банальной темой задач, что всякие подробные комментарии к решению будут излишними.

1.1 Закон движения тела задается функциями

$$x_1(t) = v_1 \cos\alpha \cdot t$$
$$y_1(t) = h + v_1 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1)$$



1.2 Горизонтальная дальность равна координате x в момент падения, т.е. при $y = 0$. Для определения времени движения следует решить уравнение

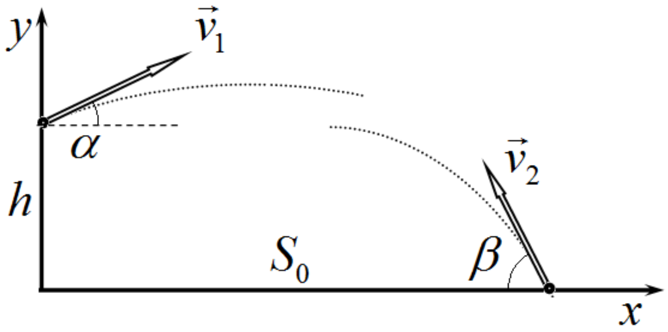
$$h + v_1 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{v_1 \sin\alpha + \sqrt{(v_1 \sin\alpha)^2 + 2gh}}{g} \approx 2{,}73 с. \qquad (2)$$

Тогда дальность полета

$$S = x(t^*) = v_1 \cos\alpha \cdot t^* \approx 47 м.$$

Часть 2. «Стрельба по движущимся мишеням»

Первое тело бросают так, как описано в Части 1, а второе с поверхности земли из точки, находящейся на расстоянии S_0 от начала координат. Модуль скорости второго тела равен v_2, вектор скорости направлен под углом β к горизонту, как показано на рисунке. Тела бросают одновременно.



2.1 Закон движения второго тела записывается аналогично

$$x_2(t) = S_0 - v_2 \cos\beta \cdot t$$
$$y_2(t) = v_2 \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (3)$$

2.2 Разностей координат тел $(x_1 - x_2)$ и $(y_1 - y_2)$ зависят от времени по законам:

$$(x_1 - x_2) = (v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta) \cdot t - S_0$$
$$(y_1 - y_2) = h + (v_1 \sin\alpha - v_2 \sin\beta) \cdot t. \qquad (4)$$

Важно отметить, что разности координат не зависят от времени от ускорения тел (так как они одинаковы), поэтому в дальнейшем «можно забыть» об ускорении свободного падения.
2.3 Расстояние между телами $S(t)$ определяется по теореме Пифагора

$$S(t) = \sqrt{((v_1 \cos\alpha + v_2 \cos\beta) \cdot t - S_0)^2 + (h + (v_1 \sin\alpha - v_2 \sin\beta) \cdot t)^2}. \qquad (5)$$

2.4 Так как ускорение можно не учитывать, то нужно целиться прямо в точку начала падения, поэтому

$$tg\beta = \frac{h}{S}. \qquad (6)$$

Минимальная скорость, когда тело долетает до основания уступа

$$S_0 = \frac{2v_2^2 \sin\beta\cos\beta}{g} \quad \Rightarrow \quad v_{2\min} = \sqrt{\frac{gS_0}{2\sin\beta\cos\beta}}\,. \tag{7}$$

2.4 Можно, конечно, анализировать условия обращения в нуль «простенького» выражения (5). Но гораздо проще перейти в систему отсчета связанную с первым телом. В этой системе отсчета относительная скорость второго тела должна быть направлена на точку вылета первого тела. Очевидно, что вертикальные компоненты скоростей должны быть одинаковы, поэтому

$$v_1 \sin\alpha = v_2 \sin\beta \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,. \tag{8}$$

Тела столкнутся в воздухе, если время их полета больше, чем время их сближения по горизонтали, т.е. при выполнении условия

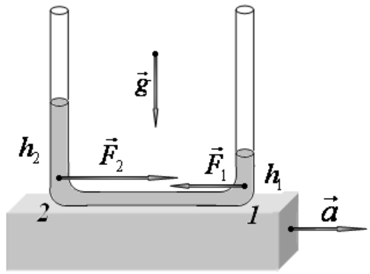
$$\frac{2v_2 \sin\beta}{g} > \frac{S_0}{v_1\cos\alpha + v_2\cos\beta} \quad \Rightarrow \quad v_2 > \sqrt{\frac{gS_0}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}}\,. \tag{9}$$

При выводе этого условия использовано соотношение (8).

Задача 10-1. Акселерометр

1. «Равномерное движение».
Из принципа относительности Галилея следует, что в этом случае уровни воды в трубках не изменяться $\Delta h = 0$.

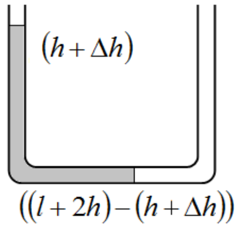
2. **«Равноускоренное движение»**



Разность сил давления в трубках должна обеспечивать ускорение воды в горизонтальном колене

$$2\rho g \Delta h S = \rho l S a \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{a}{2g} l \,. \qquad (1)$$

Это будет справедливо, пока $\Delta h < h$, Т.е. при $a < 2g\dfrac{h}{l}$.

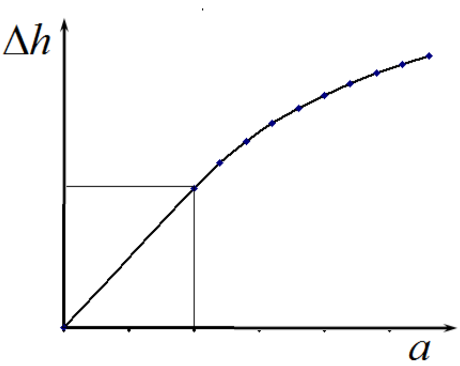


При большем ускорении правая вертикальная трубка окажется пустой. Пусть высота столба в вертикальном колене равна $h+\Delta h$, тогда на горизонтальном участке находится столб воды $((l+2h)-(h+\Delta h)) = (l+h)-\Delta h$. Уравнение его ускоренного движения имеет вид

$$\rho S (l + h - \Delta h) a = \rho S (h + \Delta h) g \qquad (2)$$

Откуда следует

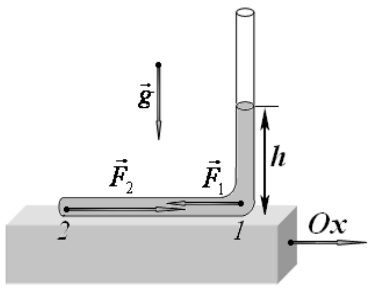
$$\Delta h = \frac{(l+h)a - hg}{a+g} \,. \qquad (3)$$



Схематический график показан на рисунке: сначала прямая линия, потом начинает загибаться и стремиться к предельному значению $(h+l)$

Другой способ решения задачи заключается в переходе в систему отсчета, связанную с самой трубкой. В этой системе отсчета эффективное ускорение равно $\vec{g}^{\,*} = \vec{g} - \vec{a}$. *Свободная поверхность жидкости перпендикулярна этому вектору.*

3. «Плохой стеклодув»



Основная идея решения остается прежней: разность сил давления создает необходимое ускорение воды.
Поэтому в данном случае:
3.1 В точке 1 давление атмосферное плюс гидростатическое:

$$P_1 = P_0 + \rho g h \qquad (4)$$

В точке 2

$$P_2 = P_0 + \rho g h + \rho a l \qquad (5)$$

3.2 При изменении направления ускорения достаточно поменять знак в формуле (5)

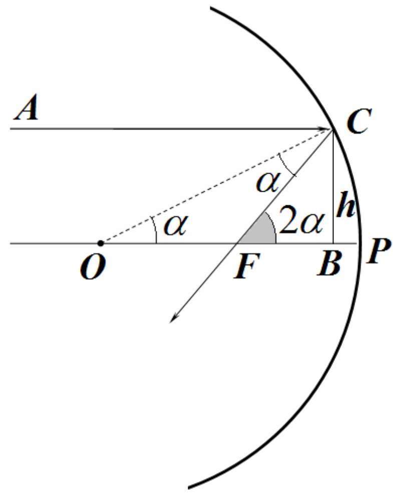
$$P_2 = P_0 + \rho g h - \rho a l \,. \qquad (6)$$

3.3 При отрицательном направлении ускорения столб воды может разорваться. Это значит, что вода закипит. Так как при комнатной температуре давление насыщенных паров значительно меньше атмосферного, то можно считать, что столб воды разорвется, если в его крайней точке давление станет равным нулю. Тогда из уравнения (6) следует (для оценки можно пренебречь и гидростатическим давлением) $\rho a l \approx P_0 \quad \Rightarrow \quad a \approx 10g$.

Возможны и такие оценочные рассуждения: в поле тяжести земли разрывается под действием собственного веса столб воды высотой в 10 м, чтобы разорвался столб воды высотой в 1 м ускорение должно быть в 10 раз больше ускорения свободного падения.

Задача 10-2 Сферическое зеркало.

1.1 Рассмотрим произвольный луч AC, идущий параллельно оптической оси. Отраженный луч - CF



Из закона отражения света и свойства внешнего угла треугольника следует, что

$$\angle CFP = 2\angle COP .$$

Из треугольника OCD можно выразить

$$h = R\sin\alpha \approx R\alpha \qquad (1)$$

При малых углах точка B практически совпадает с оптическим центром линзы P. Для треугольника FCB справедливо равенство

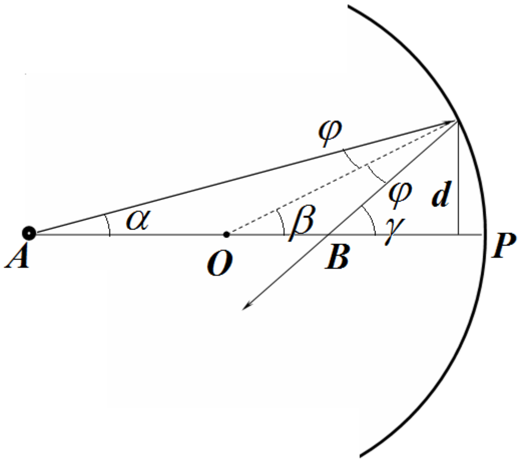
$$h = F\,tg2\alpha \approx 2F\alpha . \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), находим, что

$$F = \frac{R}{2}, \qquad (3)$$

Независимо от h, поэтому все лучи после отражения проходят через эту точку – следовательно, это и есть фокус.

1.2 На рисунке $AP = a$ - расстояние от источника до зеркала; $BP = b$ - расстояние от изображения до линзы; $OP = R$. Смотрим внимательно на углы, по свойствам треугольников и закону отражения записываем



$$\begin{cases} \beta = \alpha + \phi \\ \gamma = \beta + \varphi \end{cases} \Rightarrow \quad 2\beta = \alpha + \gamma . \qquad (4)$$

Также можно записать

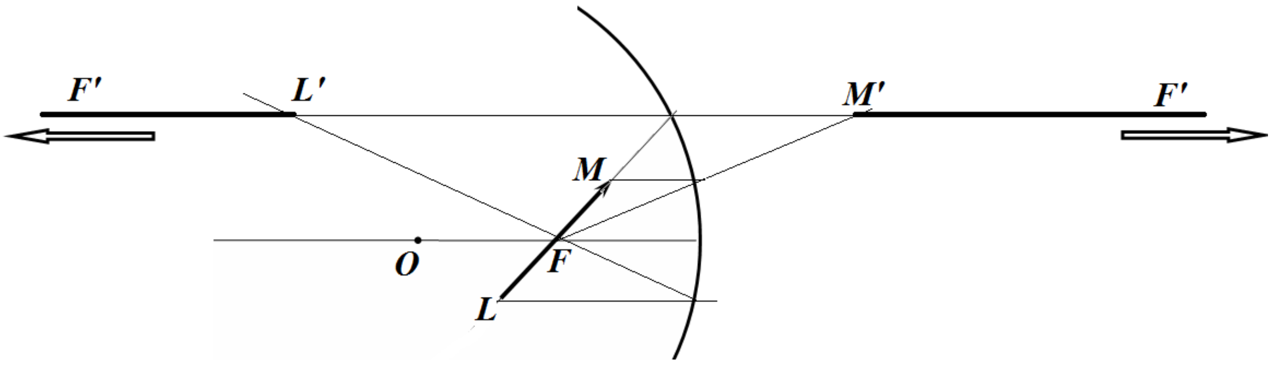
$$\begin{aligned} a\alpha &= d \\ R\beta &= d . \\ a\gamma &= d \end{aligned} \qquad (5)$$

Из (5) выражаем углы и подставляем в (4), и получаем формулу зеркала

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} . \qquad (6)$$

Независимо от выходящего из точки A луча, следовательно, B есть изображение точки A.

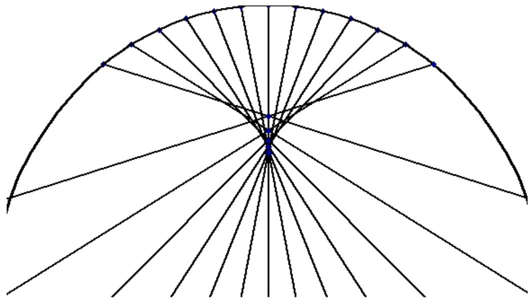
1.3 Изображение строится традиционными методами. Проводим прямую вдоль стрелки LM - отраженный луч параллельно оптической оси – все точки изображения на этой прямой. Находим изображение M: луч параллельно оптической оси – отраженный через фокус, продолжение луча до пресечения с первым лучом – получаем изображение M'. Аналогично



для точки L. Изображение фокуса «убегает» на бесконечность, причем в обе стороны. Таким образом, получаем разорванное бесконечное изображение.

Часть 2. «Аберрационная …дальние лучи»

2.1 ход отраженных лучей показан на рисунке.



2.2 Рассмотрим ход произвольного луча AB без использования параксиального приближения. Из закона отражения следует, что треугольник OBF равнобедренный, поэтому

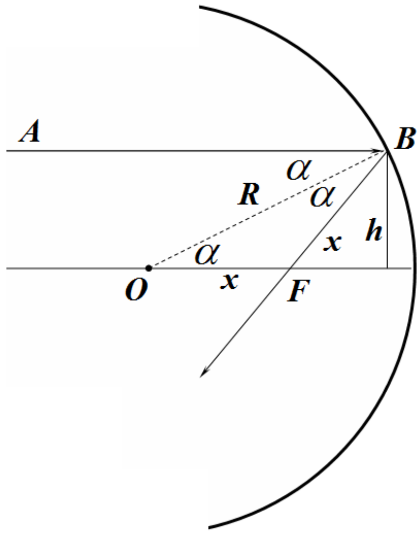
$$R = 2x\cos\alpha \qquad (7)$$

Где x – расстояние от центра зеркала до фокуса. Также запишем

$$h = R\sin\alpha . \qquad (8)$$

Исключая из этих выражений угол α, получим

$$\left(\frac{R}{2x}\right)^2 + \left(\frac{h}{R}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{R^2}}} . \qquad (9)$$



Тогда

$$F_1 = R - x = R - \frac{R}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{R^2}}} . \qquad (10)$$

Действительно расстояние зависит от параметра луча h. При малых h получаем найденное в параксиальном приближении значение фокусного расстояния.

2.3 Из формулы (9) следует, что x всегда больше $\frac{R}{2}$, т.е. отраженный луч приближается к зеркалу. Единственная возможность, чтобы аберрация луча стала равной 100%, $F_1 - F_0 = \frac{R}{2}$, или $x = R$. Это возможно при $\sqrt{1-\frac{h^2}{R^2}} = 2 \;\Rightarrow\; h = R\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \alpha = 60°$. В этом случае отраженный луч попадает в оптический центр зеркала P.

Задача 10-3. Вода из воздуха

Температуры воздуха вечером равнялась $t_0 = 25{,}5°C$, относительная влажность $\eta = 71{,}0\%$.

1. Для определения температуры точки росы t_1 необходимо решить уравнение

$$P_s(t_1) = \varphi P_s(t_0)\frac{T_1}{T_0} \qquad (1)$$

Сначала найдем приближенно, полагая, что $\frac{T_1}{T_0} \approx 1$

Для определения $P_s(t_0)$ для дробного значения температуры воспользуемся линейной интерполяцией

$$P_s(25{,}5) = \frac{P_s(25) + P_s(26)}{2} = 3266\,Па.$$

Рассчитываем парциальное давление водяных паров

$$P(t_0) = \varphi P_s(t_0) = 2319\,Па.$$

По таблице находим, что давление насыщенных паров при температуре, лежащей в диапазоне от 19° до 20°. В этом диапазоне зависимость давления насыщенных паром приблизим линейной функцией

$$P_s(t_1) = P_s(19) + \left(P_s(20) - P_s(19)\right)(t_1 - 19) = 2198 + 141(t_1 - 19)$$

И запишем уравнение (1) в числах

$$2198 + 141(t_1 - 19) = 2319\frac{t_1 + 273{,}15}{25{,}5 + 273{,}15} = 7{,}82(t_1 - 19) + 2284 \quad \Rightarrow$$

$$(t_1 - 19) = \frac{2284 - 2198}{141 - 7{,}82} \approx 0{,}6$$

Следовательно, температура точки росу равна $t_1 = 19{,}6°$.

2. Какой объем воздуха прошел через пирамиду, если в генераторе было получено 10 л воды. Конденсация началась при температуре $t_1 = 19{,}6°$, а закончилась при температуре $t_2 = 15{,}0°$ (в этом диапазоне температур пар оставался насыщенным). Плотность пара можно посчитать по формуле $\rho = \frac{P_s M}{RT}$. Следовательно, изменение плотности водяных паров равно

$$\Delta\rho = \frac{P_s(t_1)M}{RT_1} - \frac{P_s(t_2)M}{RT_2} = \frac{18\cdot 10^{-3}}{8{,}31}\left(\frac{2283}{293} - \frac{1706}{288}\right) = 4{,}05\cdot 10^{-3}\,\frac{кг}{м^3}.$$

Фактически эта величина показывает, какая масса воды выделилась из одного кубометра воздуха. Так как всего выделилось $m = 10\,кг$ воды, то через пирамиду прошел объем равный

$$V = \frac{m}{\Delta\rho} = 2{,}5\cdot 10^3\,м^3.$$

3. Максимальное количество сконденсируется, если вся теплота, выделяющаяся при конденсации, пойдет на нагревание камня от его начальной температуры до температуры точки росы:

$$Lm_{воды} = cm(t_1 - t_0) \quad \Rightarrow \quad m_{воды} = \frac{cm(t_1 - t_0)}{L} = \frac{1{,}8\cdot 10^3 \cdot 2{,}5\cdot 19{,}6}{2250\cdot 10^3} \approx 40\,г$$

В сосуд объемом $V = 10{,}0\,л$ вливают 1,00 л воды при температуре $t = 40{,}0°C$ и сосуд закрывают. Считайте, что в сосуде находился сухой воздух (без водяных паров).

Теплоемкостью воздуха и сосуда, а также теплообменом с окружающей средой следует пренебречь.

4. Проведем оценочный расчет. Будем считать, что насыщенный пар будет иметь температуру $40°C$, его давление при этой температуре $P_s = 6997\,Па$. Масса водяных паров (равная массе испарившейся воды)

$$m = \frac{P_s VM}{RT} = \frac{6997 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 313} \approx 4{,}4 \cdot 10^{-4}\,кг.$$

На испарение этого количества воды пошло $Q = Lm = 980\,Дж$ теплоты. Эта теплоты выделилась при остывании воды, поэтому ее температура понизилась на $\Delta t = \frac{Q}{cm} \approx 0{,}2°C$.

При расчете мы предположили, что температура насыщенного пара равна $40°C$, полученной отличие не значительно, поэтому наш расчет можно признать удовлетворительным. Итого, температура воды понизилась на $0{,}2°$ и стала равной $38{,}8°C$

Задача 11-1 Почти ЦТ: два бруска и веревочка!

Условия равновесия веревки:

$$2T\sin\alpha = m_0 g \tag{1}$$

Условия предельного положения грузов:

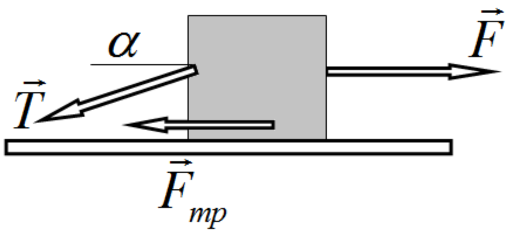
$$T\cos\alpha = \mu(mg + T\sin\alpha). \tag{2}$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{cases} T\cos\alpha = \mu\left(mg + \dfrac{m_0 g}{2}\right) \\ T\sin\alpha = \dfrac{m_0 g}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg\alpha = \dfrac{m_0}{\mu(2m + m_0)} \\ T = \sqrt{\mu^2\left(mg + \dfrac{m_0 g}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m_0 g}{2}\right)^2} \end{cases} \tag{3}$$

Чтобы сдвинуть брусок

$$\begin{cases} F > T\cos\alpha + \mu(mg + T\sin\alpha) \\ 2T\sin\alpha = m_0 g \end{cases}$$



Решая с учетом (3), получаем

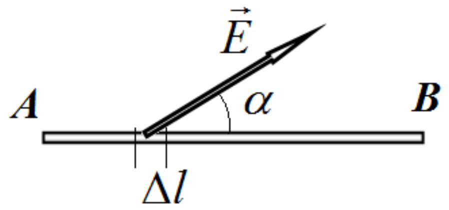
$$F > T\cos\alpha + \mu\left(mg + \frac{m_0 g}{2}\right) =$$
$$= \mu\left(mg + \frac{m_0 g}{2}\right) + \mu\left(mg + \frac{m_0 g}{2}\right) = \mu g(2m + m_0) \tag{4}$$

Очевидный результат – приложенная сила должна быть больше, чем суммарная сила трения, действующая на систему.
Чтобы сдвинуть второй

$$T\cos\alpha > \mu\left(mg + \frac{m_0 g}{2}\right) \tag{5}$$

Но, $T\cos\alpha = F - \mu\left(mg + \dfrac{m_0 g}{2}\right)$, подставляя в (5), получаем то же условие (4). Т.е. в данном случае сдвинуть один брусок нельзя – сразу сдвинуться оба.

Задача 11-2. Когда отрезок можно считать точкой?



Начнем с реализации подсказки. Разобьем равномерно заряженный стержень на малые участки длиной Δl. Проекция силы, действующей этот элемент, на ось стержня равна

$$\Delta F = \lambda \Delta l E \cos\alpha \,. \qquad (1)$$

Чтобы найти суммарную силу, следует просуммировать по всем отрезкам стрежня

$$F_l = \sum_i \lambda E_i \Delta l_i \cos\alpha_i = \lambda \sum_i E_i \Delta l_i \cos\alpha_i \,. \qquad (2)$$

Но стоящая здесь сумма есть разность потенциалов между концами стержня, поэтому эту силу можно представить в виде

$$F_l = \lambda(\varphi_A - \varphi_B). \qquad (3)$$

1.1 Используя формулу (3), запишем точное выражение для силы взаимодействия

$$F = \lambda k q_1 \left(\frac{1}{a-l} - \frac{1}{a+l}\right) = \lambda k q_1 \frac{2l}{a^2 - l^2} = k\frac{q_1 q_2}{a^2 - l^2} \qquad (4)$$

1.2 Приближение точечного заряда. Выражение для силы имеет вид

$$F = k\frac{q_1 q_2}{a^2} \qquad (5)$$

1.3 Приближение двух точечного заряда

Выражение для силы в этом приближении

$$F = \frac{k}{2}\frac{q_1 q_2}{(a-l)^2} + \frac{k}{2}\frac{q_1 q_2}{(a+l)^2} = k q_1 q_2 \frac{a^2 + l^2}{\left(a^2 - l^2\right)^2} \qquad (6)$$

1.4 Упростим формулы, считая отношение $\dfrac{l}{a}$ малым

Для формулы (4) (точной):

$$F = k\frac{q_1 q_2}{a^2 - l^2} = k\frac{q_1 q_2}{a^2}\frac{1}{1 - \left(\frac{l}{a}\right)^2} \approx k\frac{q_1 q_2}{a^2}\left(1 + z^2\right). \qquad (4a)$$

Для формулы (6)

$$F = k q_1 q_2 \frac{a^2 + l^2}{\left(a^2 - l^2\right)^2} = k\frac{q_1 q_2}{a^2}\frac{1 + z^2}{\left(1 - z^2\right)^2} \approx k\frac{q_1 q_2}{a^2}\left(1 + z^2\right)\left(1 + 2z^2\right) \approx k\frac{q_1 q_2}{a^2}\left(1 + 3z^2\right) \qquad (6a)$$

Сравнивая эти формулы, видим, что относительная погрешность приближения точечного заряда

$$\varepsilon_1 = -z^2 \qquad (7)$$

погрешность двухточечного приближения

$$\varepsilon_2 = 2z^2 \qquad (8)$$

Неожиданно, но приближение точечного заряда точнее!

1.5 Из выражения (7) получаем

$$\left(\frac{l}{a}\right)^2 \approx 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad a \approx 10l$$

Таким образом, «во много раз больше» оказалось всего лишь в десять!

Задача 11-3 Колебания магнитов

Комментарии к условию задачи.

1. Прежде всего отметим. что указанная зависимость силы взаимодействия магнитов от расстояния между ними действительно выполняется, при расстояниях между магнитами, превышающих размеры самих магнитов. Это выражение описывает диполь-дипольное взаимодействие. Кольцевой магнит можно рассматривать как круговой контур с током, взаимодействие двух контуров и описывается предложенной формулой. Кстати, проверка этой формулы служила и может послужить в дальнейшем темой для экспериментальных задач.

2. В задаче рассматриваются условия возникновения колебаний, причем при силах, отличных от квазиупругих. Поэтому для решения данной задачи необходимо использовать необходимое и достаточное условия возможности свободных колебаний (любых, не только гармонических): **колебания возможны вблизи положения устойчивого равновесия**! Поэтому почти все решение этой задачи сводится к определению положений устойчивого равновесия. Подчеркнем, важно не просто найти положения равновесия, а еще и проанализировать их устойчивость. Ну а в тех частях, где требуется определить период колебаний, следует использовать приближенное описание, т.е. считать, что возвращающая сила линейно зависит от смещения из положения равновесия. В этом приближении колебания описываются как знакомые гармонические колебания.

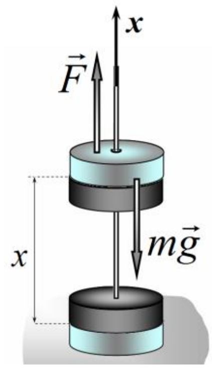
3. Математические подсказки в условии авторы заданий дают не для того, чтобы запутать участников (они с успехом это делают и без подсказок), а для того, чтобы помочь разрешить некоторые математические проблемы. Поэтому надо быть уверенным, что где-то касательную надо будет построить!

Теперь можно приступать к последовательному решению пунктов этой задачи.

Часть 1. Вертикальные колебания.

1.1 Так как магниты направлены полюсами навстречу, то они отталкиваются друг от друга. В положении равновесия сила тяжести, действующая на верхний магнит, уравновешивается силой магнитного отталкивания, т.е.

$$mg = F = \frac{b}{x_0^4}. \qquad (1)$$

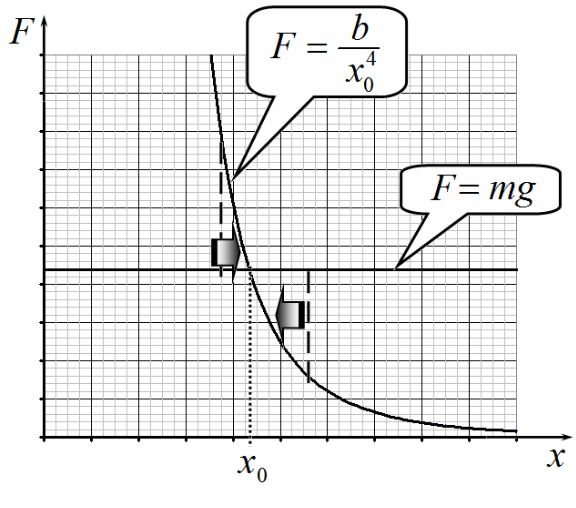


Из этого уравнения следует, что в положении равновесия

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{b}{mg}}. \qquad (2)$$

1.2 Условием возможности колебаний в любой системе – является наличие устойчивого положения равновесия.

Не сложно показать, что найденное положение равновесия устойчиво: при смещении магнита вверх, сила тяжести превышает магнитную силу, поэтому результирующая сила будет направлена вниз, т.е. к положению равновесия; и наоборот, при смещении магнита вниз возрастет магнитная сила, поэтому результирующая сила опять будет направлена к



положению равновесия. Графики зависимости сил от расстояния иллюстрируют эти рассуждения

Следовательно, **вблизи этого положения равновесия колебания верхнего магнита возможны**!

Для расчета периода колебаний запишем уравнение второго закона Ньютона для верхнего магнита

$$ma = \frac{b}{x^4} - mg\,. \tag{3}$$

Так как мы рассматриваем малые колебания, то представим координату магнита в виде

$$x = x_0 + \delta\,, \tag{4}$$

где $\delta(t)$ - малое отклонение от положения равновесия. Далее упростим уравнение (3), используя приведенную формулу

$$ma = \frac{b}{(x_0+\delta)^4} - mg = \frac{b}{x_0^4}\left(1+\frac{\delta}{x_0}\right)^{-4} - mg \approx \frac{b}{x_0^4}\left(1-4\frac{\delta}{x_0}\right) - mg = -4\frac{b}{x_0^5}\delta\,, \tag{5}$$

или

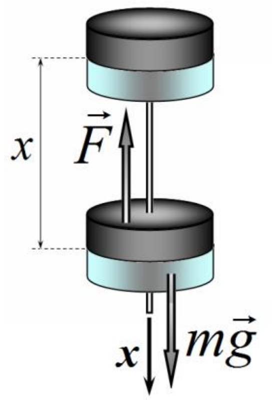
$$a = -4\frac{b}{mx_0^5}\delta\,. \tag{6}$$

Это уравнение есть известное уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mx_0^5}{4b}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4b}\left(\frac{b}{mg}\right)^{\frac{1}{4}}}\,. \tag{7}$$

<u>Примечание.</u> Полученное уравнение (5) также подтверждает устойчивость положения равновесия, так как показывает, что результирующая сила направлена в сторону, противоположную смещению от положения равновесия.

1.3 – 1.4 В данной части рассуждения полностью аналогичны, поэтому сразу запишем уравнение второго закона Ньютона для нижнего магнита (направление оси изменено):



$$ma = mg - \frac{b}{x^4}\,. \tag{8}$$

В положении равновесия справедливо уравнение

$$mg = \frac{b}{x_0^4}\,. \tag{9}$$

Поэтому положение равновесия определяется тем же выражением

$$x_0 = \sqrt[4]{\frac{b}{mg}}\,. \tag{10}$$

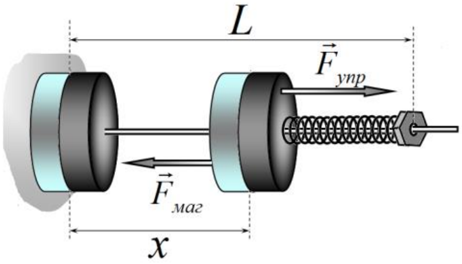
Однако, **данное положение равновесия является не устойчивым, поэтому здесь колебания не возможны!**

Доказать это можно с помощью логических рассуждений, графика, или непосредственно из уравнения (8). Преобразование этого уравнения в приближении малых отклонений приводит к результату

$$ma = mg - \frac{b}{(x_0+\delta)^4} \approx +4\frac{b}{x_0^5}\delta\,. \tag{11}$$

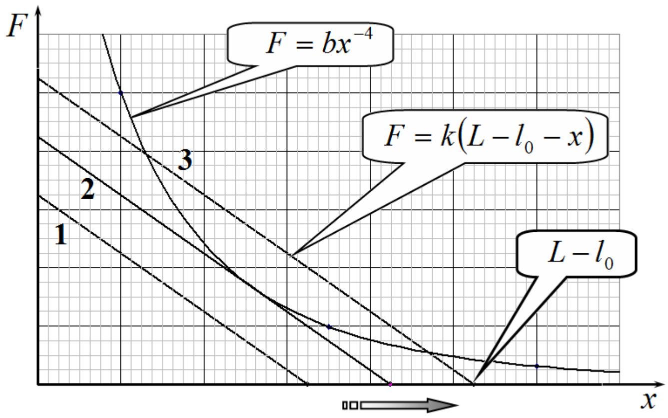
В этом уравнении знак «плюс» явно указывает, что результирующая сила направлена в ту же сторону, что и смещение, то есть эта сила еще дальше уводит магнит от положения равновесия.

Часть 2. Горизонтальные колебания.

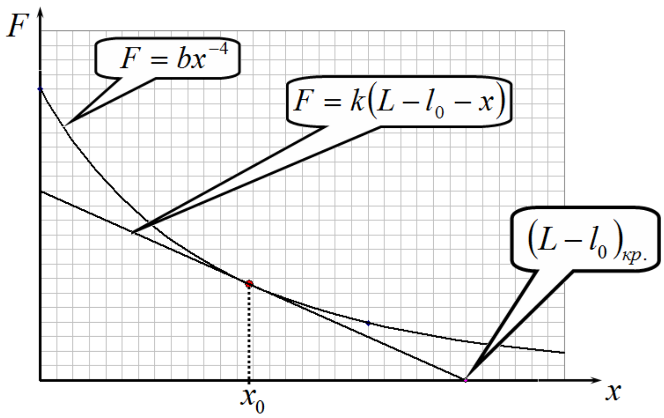


2.1 Колебания возможны только при наличии положения устойчивого равновесия, поэтому сначала найти эти положения. На подвижный магнит в рассматриваемом случае действует сила магнитного притяжения и сила упругости со стороны пружины. В положении равновесия эти силы равны по модулю. Из этого условия следует уравнение:

$$F_{маг} = F_{упр} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{x^4} = k(L - l_0 - x) \tag{12}$$



Это уравнение является уравнением пятой степени, поэтому попытки его аналитического решения обречены на неудачу. Однако нам пока и не требуется решать это уравнение, нам достаточно только проанализировать при каких значениях параметров оно имеет решения[1]. Для такого анализа схематически построим графики зависимостей действующих сил от координаты подвижного магнита x.
Зависимость силы притяжения – та же гладкая монотонно убывающая кривая. Зависимость силы упругости от координаты изображается прямой линией, коэффициент наклона которой равен коэффициенту жесткости пружины. Эта прямая пересекает ось x в точке с координатой $(L - l_0)$. Таким образом, при изменении L эта прямая смещается параллельно самой себе.
Не сложно заметить, что при малых L прямая (1) не пересекает кривую силы притяжения – в этом случае уравнение (12) корней не имеет! При этом модуль силы притяжения больше модуля силы упругости, поэтому при любом положении магнита. При больших L (прямая 3 на рисунке) имеется две точки пересечения, соответствующие двум положениям равновесия – одно из них устойчивое, второе – не устойчивое. Следовательно, именно в этом случае возможны колебания магнита. Таким образом, «критической» прямой является прямая (2), которая касается графика функции $F_{маг.}(x)$.



Рассмотрим параметры этой прямой. Обозначим координату точки касания x_0.

Воспользуемся «математической подсказкой» и запишем уравнение касательной к графику функции $F = bx^{-4}$:

$$y = \frac{b}{x_0^4}\left(5 - 4\frac{x}{x_0}\right). \tag{13}$$

Сравним эту функцию с функцией, описывающей силу упругости:

---

[1] Не такай уж редкая ситуация для олимпиадных задач: нужно найти не само решение, а только услвовия при которых это решение существует!

$$F = k(L - l_0 - x). \tag{14}$$

Эти функции описывают одну и ту же прямую, поэтому должны быть тождественны во всех точках. Из равенства

$$F = k(L - l_0 - x) = \frac{b}{x_0^4}\left(5 - 4\frac{x}{x_0}\right) = 4\frac{b}{x_0^5}\left(\frac{5}{4}x_0 - \frac{x}{x_0}\right). \tag{15}$$

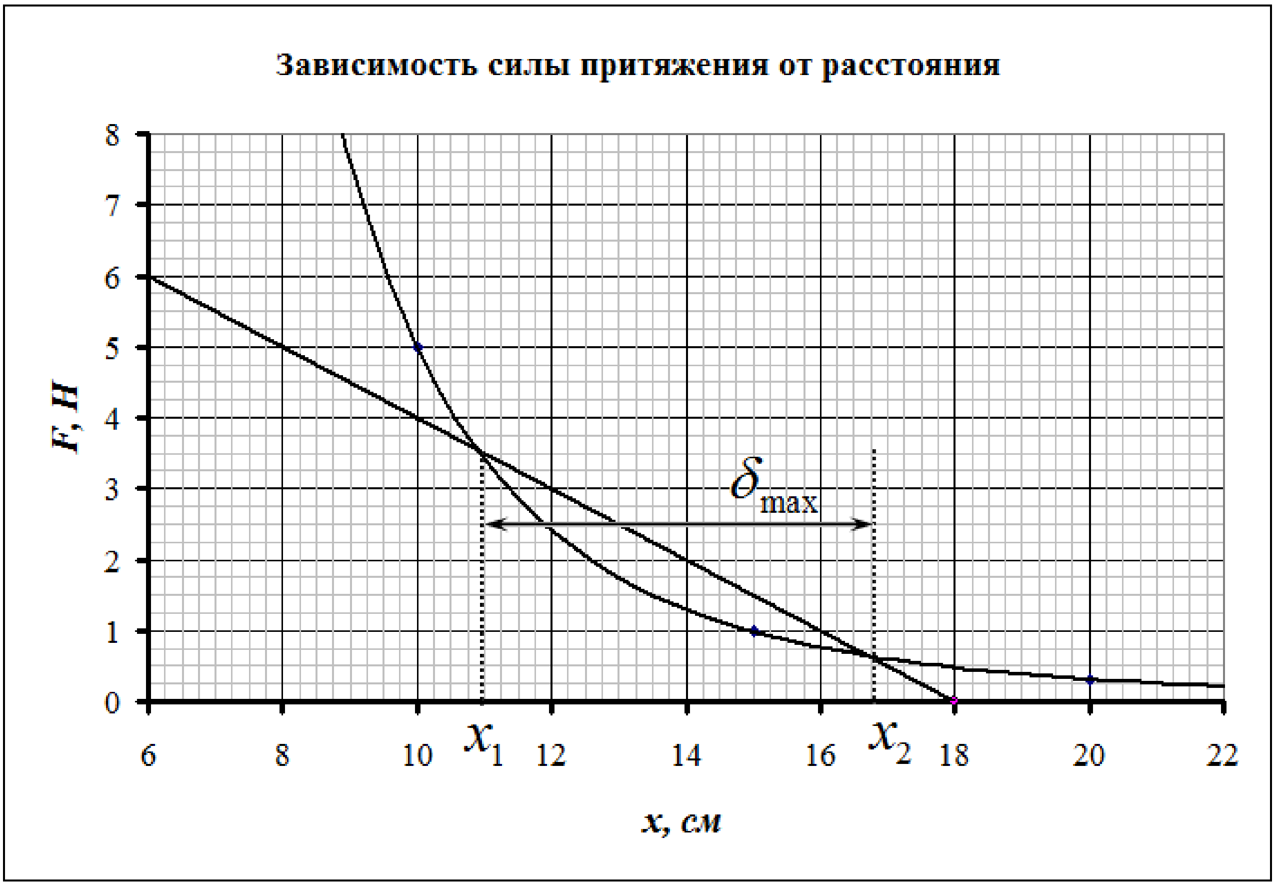
Следует:

$$\begin{cases} k = 4\dfrac{b}{x_0^5} \\ L - l_0 = \dfrac{5}{4}x_0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_0 = \left(\frac{4b}{k}\right)^{\frac{1}{5}}, \quad L = l_0 + \frac{5}{4}\left(\frac{4b}{k}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{16}$$

Итак, колебания возможны, если

$$L > l_0 + \frac{5}{4}\left(\frac{4b}{k}\right)^{\frac{1}{5}}. \tag{17}$$

2.2 На рисунке показано построение зависимости силы упругости от координаты при заданных в условии параметрах.



Эта прямая дважды пресекает график зависимости силы притяжения магнитов от координаты. Из проведенного анализа следует, что этим точкам соответствуют два положения равновесия. Координаты этих точек можно снять непосредственно из графика (с погрешностью порядка 1 мм). Первое положение равновесия $x_1 \approx 11{,}0\,см$, является неустойчивым, второе $x_1 \approx 16{,}8\,см$ - устойчивым. Колебания возможны возле второго положения равновесия. Однако, если координата подвижного магнита станет меньше, чем x_1, то магнит станет неотвратимо приближаться к первому магниту. Поэтому максимальное начальное смещение магнита равно

$$\delta_{\max} = x_2 - x_1 \approx 5{,}8\,см\,. \qquad (18)$$

Погрешность найденного значения оценивается в 0,2 см, что меньше, чем оговоренные в условии 10%, поэтому дальнейшее уточнение не требуется.