

III этап Республиканской олимпиады по физике 2018 года

Экспериментальный тур. Решения задач

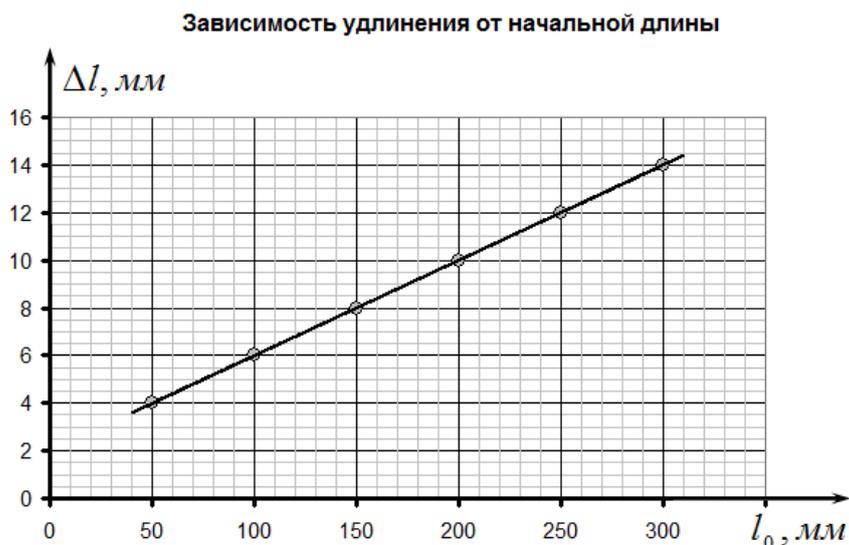
Задача 9-1. Измерение деформаций.

Задание 1.

Результаты измерений приведены в Таблице 1. График, построенный по этим данным, показан на рисунке.

Таблица 1.

$l_0, \text{мм}$	$\Delta l, \text{мм}$	ε
300	14	0,047
250	12	0,048
200	10	0,050
150	8	0,053
100	6	0,060
50	4	0,080



Используя графический метод, не сложно записать уравнение полученной зависимости

$$\Delta l = 0,040l_0 + 2,0 \quad (1)$$

Наличие сдвига обусловлено систематической ошибкой измерения удлинения. Линейность полученной зависимости указывает, что относительное удлинение $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ можно считать постоянным и равным коэффициенту наклона в уравнении (1). Таким образом, численное значение относительного удлинения равно

$$\varepsilon = 0,040 .$$

Так как при измерениях груз находится в состоянии равновесия, сила упругости численно равна силе тяжести, поэтому значение коэффициента упругости равно

$$K = \frac{F}{\varepsilon} = \frac{1,0H}{0,040} = 25H \quad (2)$$

Основной вклад в погрешность вносит приборная погрешность измерения удлинения, которую можно считать равной половине цены деления линейки, $\delta(\Delta l) = 0,5 \text{ мм}$.

Относительная погрешность измерения $\frac{\delta(\Delta l)}{\Delta l} \approx \frac{0,5}{10} = 5\%$. Такова же относительная погрешность измерения коэффициента упругости.

Задание 2. «Творческое»

Для исследования зависимости силы упругости от деформации можно использовать следующую методику: часть жгута длиной l_0 растянуть и закрепить на двух кнопках, к середине жгута бподвесить груз и измерить прогиб жгута x . Из рисунка следует, что сила натяжения может быть рассчитана по формуле:

$$F = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = \frac{mg}{2} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}}{x}. \quad (3)$$

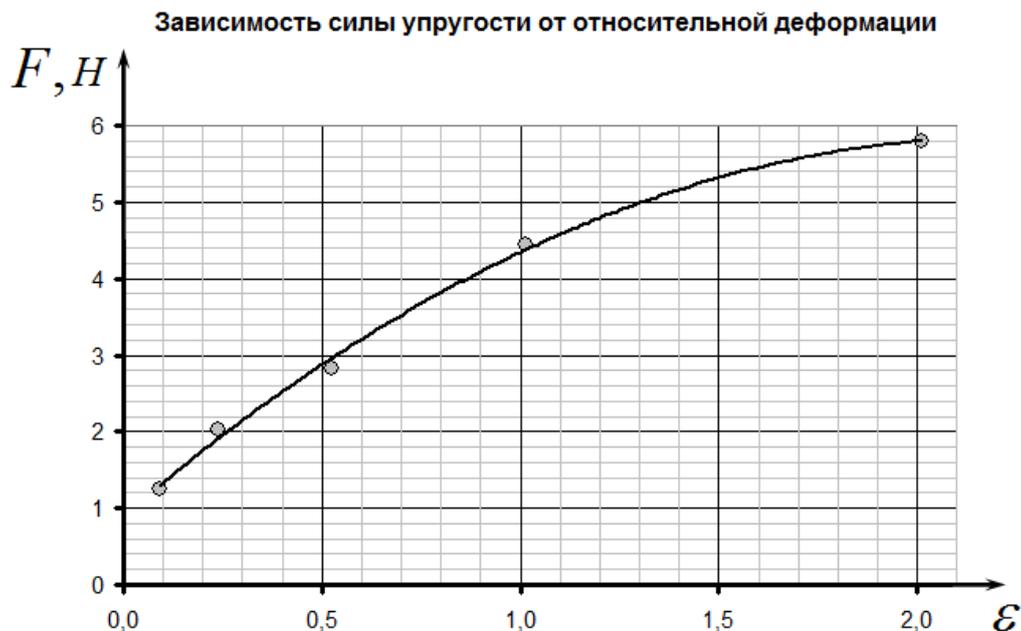
Относительное удлинение резины равно

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}} - l_0}{l_0}. \quad (4)$$

Результаты измерений и расчеты по формулам (3) и (4) приведены в таблице 2. График зависимости показан на рисунке.

Таблица 2.

$l_0, \text{мм}$	$x, \text{мм}$	$\Delta l, \text{мм}$	ε	$F, \text{Н}$
300	65	27,0	0,09	1,26
250	38	59,5	0,24	2,04
200	27	104,8	0,52	2,82
150	17	151,9	1,01	4,44
100	13	201,1	2,01	5,79



Полученная зависимость монотонная, но нелинейная. Вывод: резина не подчиняется закону Гука, так как является полимером.

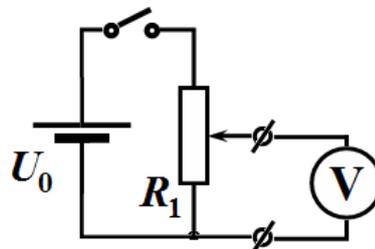
Задача 9-2. Выполняется ли закон Ома?

Задание 1.

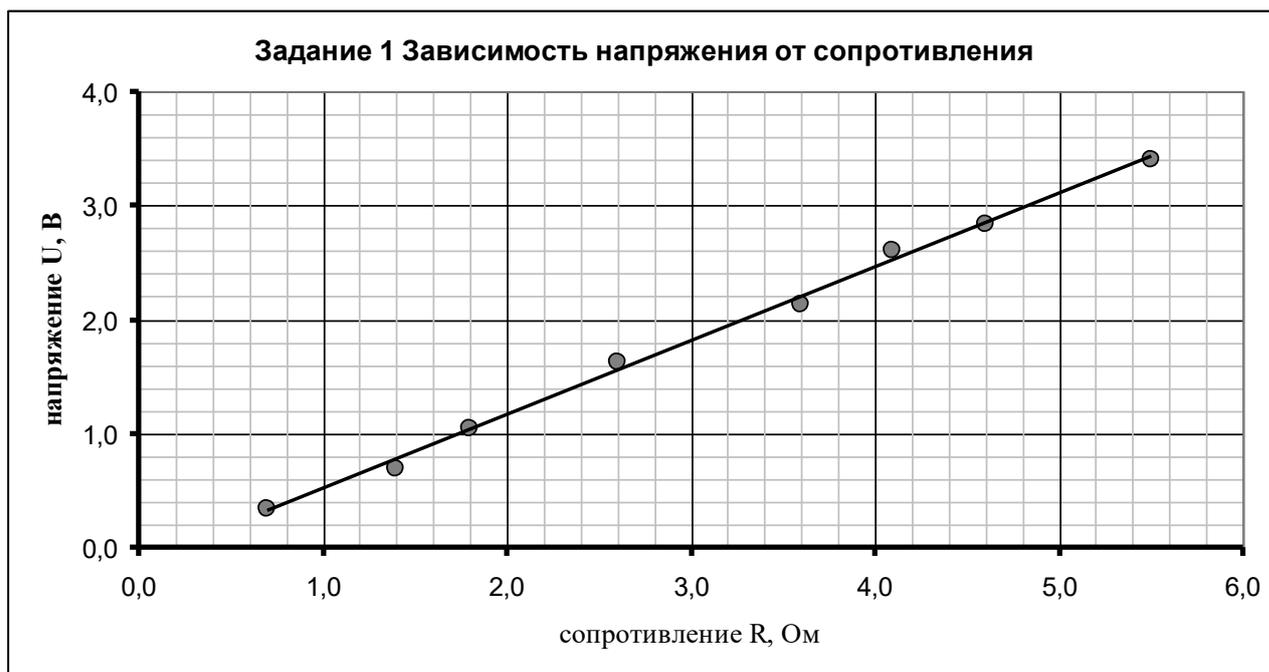
1.1 Результаты измерений зависимости напряжения на выходе регулятора U_1 от сопротивления участка реостата R_1 приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

$R_1, \text{ Ом}$	$U_1, \text{ В}$
5,5	3,40
4,6	2,84
4,1	2,60
3,6	2,13
2,6	1,62
1,8	1,04
1,4	0,69
0,7	0,34



1.2 График полученной зависимости показан на рисунке. Как и следовало ожидать, получена прямо пропорциональная зависимость.

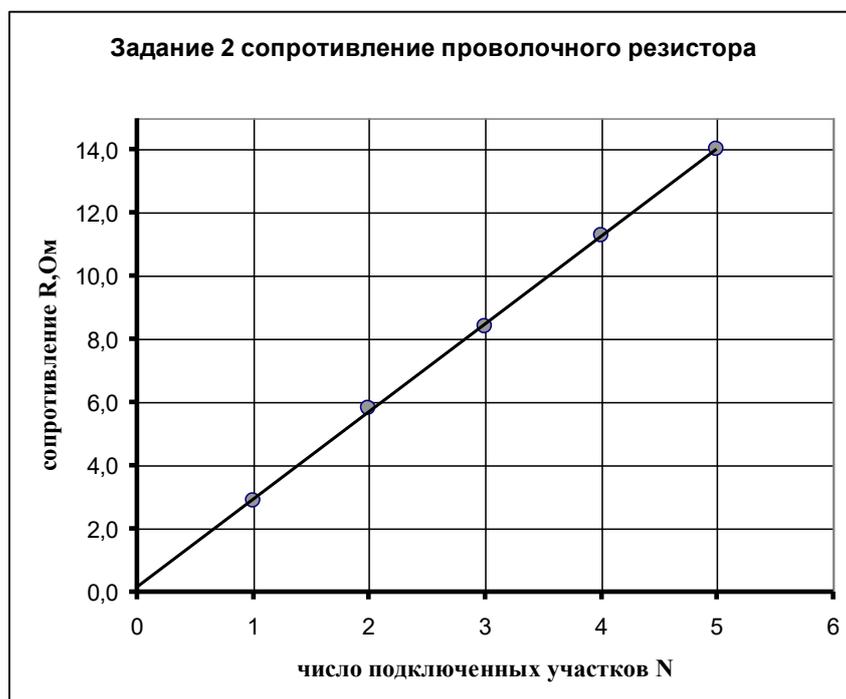


Задание 2.

2.1. Значения измеренных значений сопротивлений проволочного резистора приведены в таблице 2.

Таблица 2.

N	R_x , Ом
1	2,9
2	5,8
3	8,4
4	11,3
5	14,0



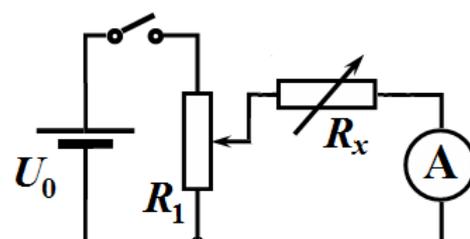
2.2 На рисунке показан график зависимости этих сопротивлений от числа подключаемых участков. Полученная зависимость является линейной. Небольшой сдвиг может быть объяснен сопротивлением контактов. Можно утверждать, что сопротивление проволоки пропорциональное длине.

Задание 3.

3.1 Результаты измерений зависимости силы тока I от сопротивления нагрузки R_x приведены в Таблице 3.

Таблица 3.

N	R_x , Ом	I , мА	R_x^{-1} , Ом ⁻¹	U_x
1	2,9	140,0	0,345	0,406
2	5,8	98,4	0,172	0,571
3	8,4	76,4	0,119	0,642
4	11,3	61,7	0,088	0,697
5	14,0	52,0	0,071	0,728

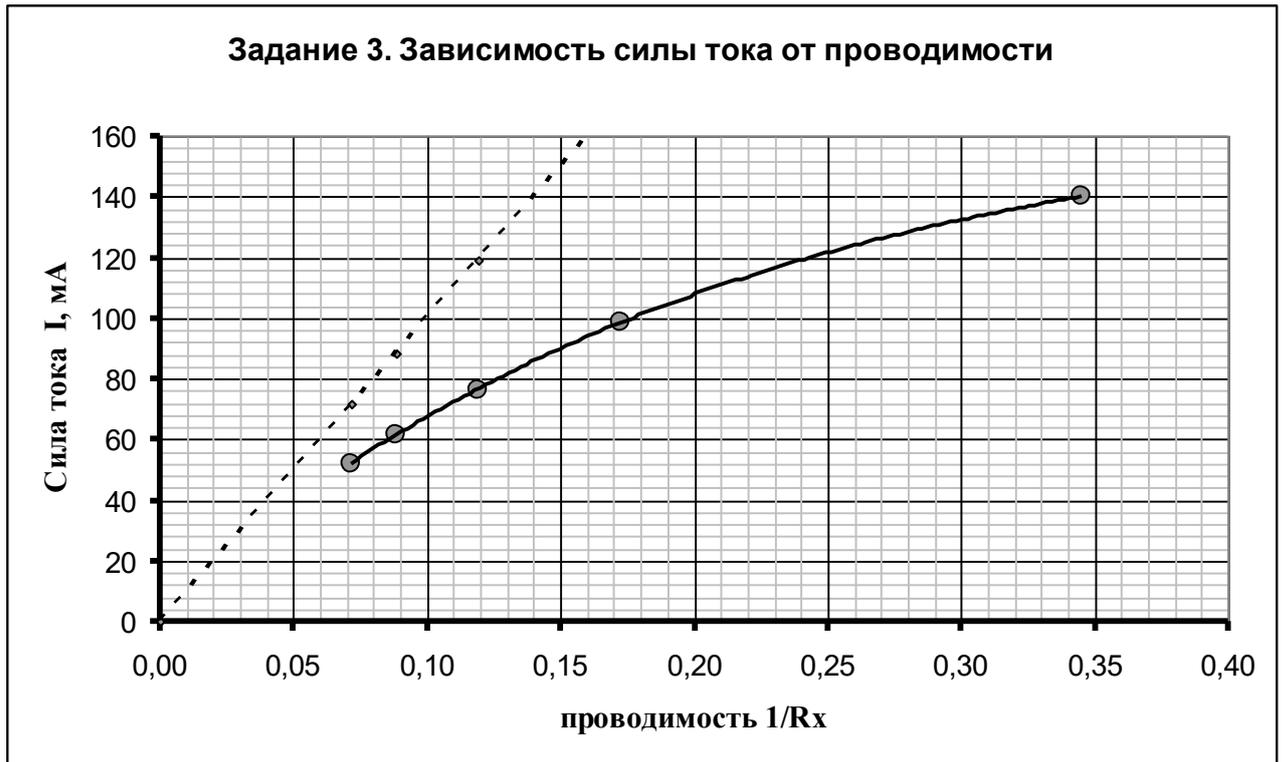


3.2 Теоретическая зависимость силы от сопротивления (при постоянном напряжении) определяется законом Ома

$$I = \frac{U}{R_x}. \quad (1)$$

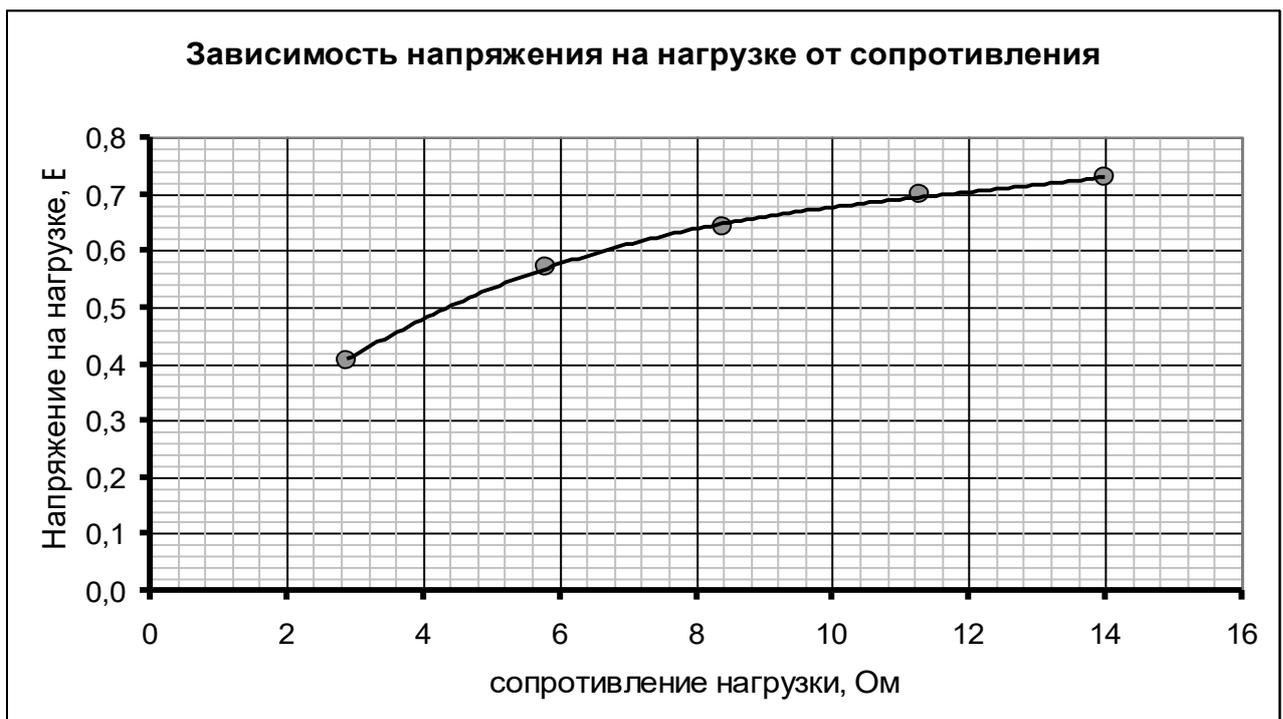
Поэтому для линеаризации этой зависимости следует построить зависимость силы тока I от проводимости (величины обратной сопротивлению) R_x^{-1} .

График этой зависимости показан на рисунке. Пунктиром показана прямая линия, следующая из закона Ома.



Как следует из полученных данных, формула (1), выражающая закон Ома, в данном случае не выполняется! Основная причина заключается в том, что напряжение на резисторе R_x не остается постоянным. Иными словами, в использованной схеме напряжение на нагрузке зависит от ее сопротивления.

Эту идею можно подтвердить, построив график зависимости напряжения от сопротивления (от участников не требуется).

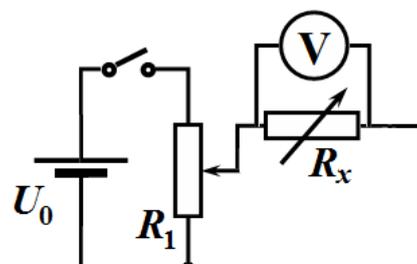


Задание 4.

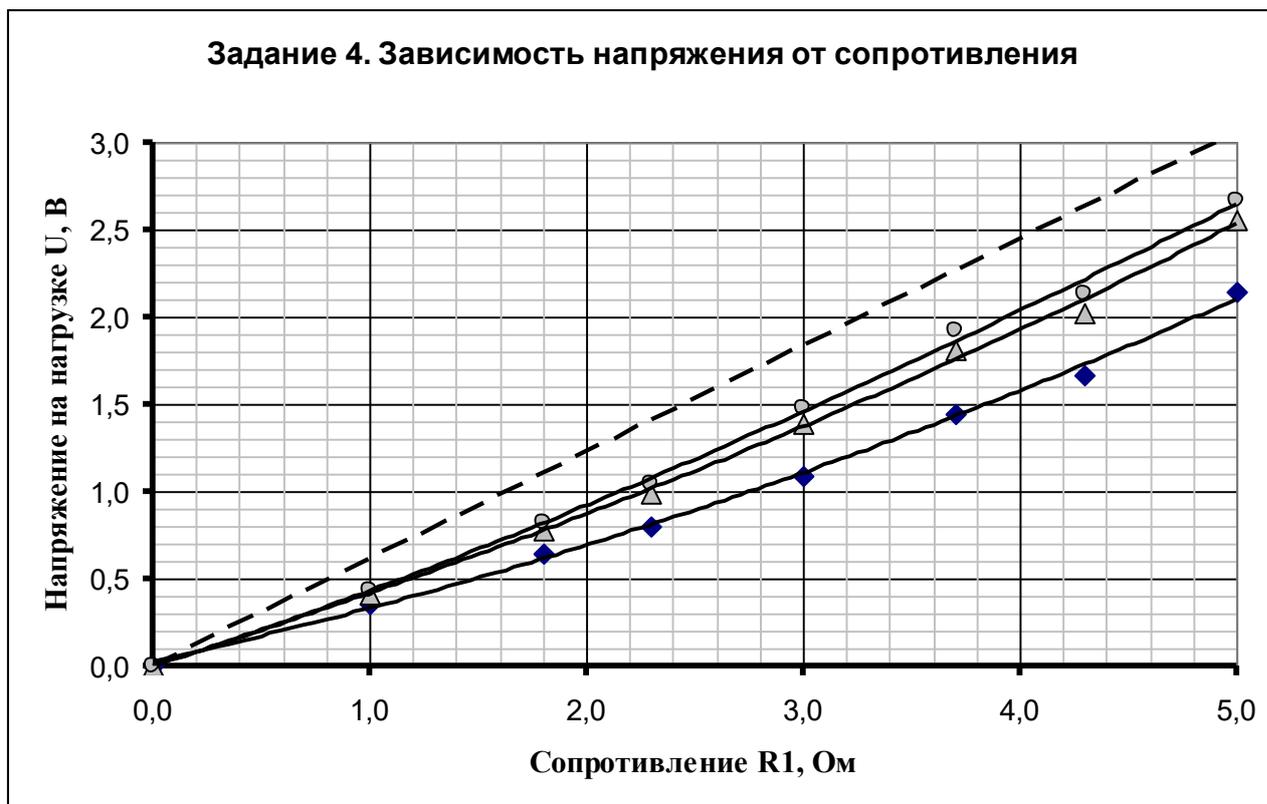
4.1 Для проведения измерений необходимо при отключенных внешней цепи и источника установить сопротивление R_1 и только после этого проводить дальнейшие измерения (удобно изменять сопротивление R_x при заданном значении R_1). Результаты измерений приведены в таблице 4. По условию задачи требуется проводить измерения только при 3 значениях R_x

Таблица 4. Зависимость напряжения от сопротивлений

$R_1, \text{ Ом}$	$R_x, \text{ Ом}$				
	2,9	5,8	8,4	11,3	14,0
5,0	2,14	2,45	2,56	2,63	2,67
4,3	1,67	1,89	2,02	2,09	2,13
3,7	1,44	1,70	1,81	1,81	1,92
3,0	1,09	1,30	1,39	1,44	1,48
2,3	0,80	0,93	0,99	1,02	1,04
1,8	0,64	0,71	0,78	0,80	0,82
1,0	0,36	0,40	0,41	0,42	0,43



4.2 Графики полученных зависимостей показаны на рисунке, пунктиром показана зависимость, полученная в части 1.



Полученные зависимости еще раз демонстрируют основную идею – напряжение на нагрузке зависит от ее сопротивления. В части 1 получена зависимость при бесконечно большой нагрузке.

4.5 Для проверки закона Ома следует контролировать напряжение на нагрузке. При изменении сопротивления нагрузки, регулируя сопротивление R_1 , следует устанавливать нужное сопротивление.

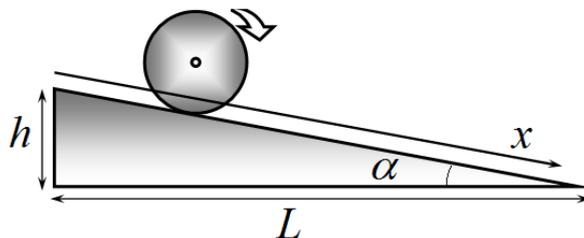
Задача 10-2 Энергия катящегося тела.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Запишем закон сохранения механической энергии при скатывании тела

$$C \frac{mv^2}{2} - C \frac{mv_0^2}{2} = mg\Delta h. \quad (1)$$

Здесь $\Delta h = x \sin \alpha$ уменьшение высоты центра тела, при его смещении на расстояние x вдоль наклонной плоскости. Возможно, что в начальный момент времени тело имеет некоторую начальную скорость v_0 .



Запишем также кинематическое соотношение, справедливое при равноускоренном движении

$$x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (2)$$

Подставляя выражение $v^2 - v_0^2 = 2ax$ в формулу (1), получим

$$Cax = gx \sin \alpha \Rightarrow a = \frac{g \sin \alpha}{C}. \quad (3)$$

1.2 Формула для определения коэффициента C имеет вид

$$C = \frac{g \sin \alpha}{a}. \quad (4)$$

Примечание. Формула для ускорения можно получить, если взять производную по времени от уравнения (1):

$$\left(C \frac{mv^2}{2} - C \frac{mv_0^2}{2} \right)' = (mgx \sin \alpha)' \Rightarrow C \frac{m}{2} 2vv' = mg \sin \alpha \cdot x' \Rightarrow \{x' = v, v' = a\} \Rightarrow \\ Ca = g \sin \alpha$$

Часть 2. Качение трубки и цилиндра.

2.1 В наших экспериментах использовалась доска длиной $L = 800 \text{ мм}$, один конец которой был приподнят на высоту $h = 12 \text{ мм}$. Таким образом угол наклона (в радианах) равен

$$\alpha = \frac{h}{L} = \frac{12}{800} = 0,015. \quad (5)$$

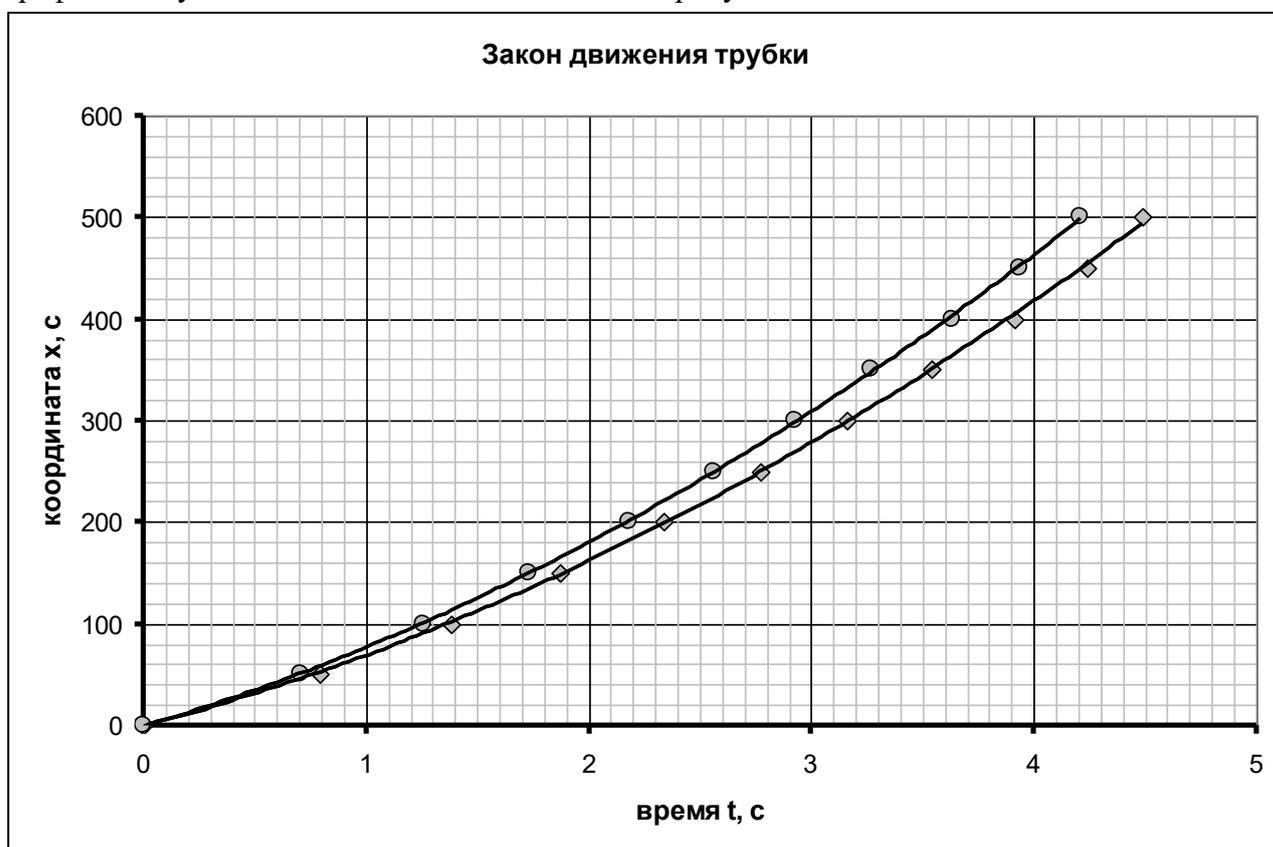
Этот угол мал, поэтому даже в пределах погрешностей измерения можно считать, что $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$.

В таблице 2 приведены результаты измерений времен прохождения участков пути длиной x . Измерение проведено дважды, поэтому все приведенные ниже графики – двойные. Для участников достаточно провести одну серию измерений.

Таблица 1. Результаты измерений для трубки

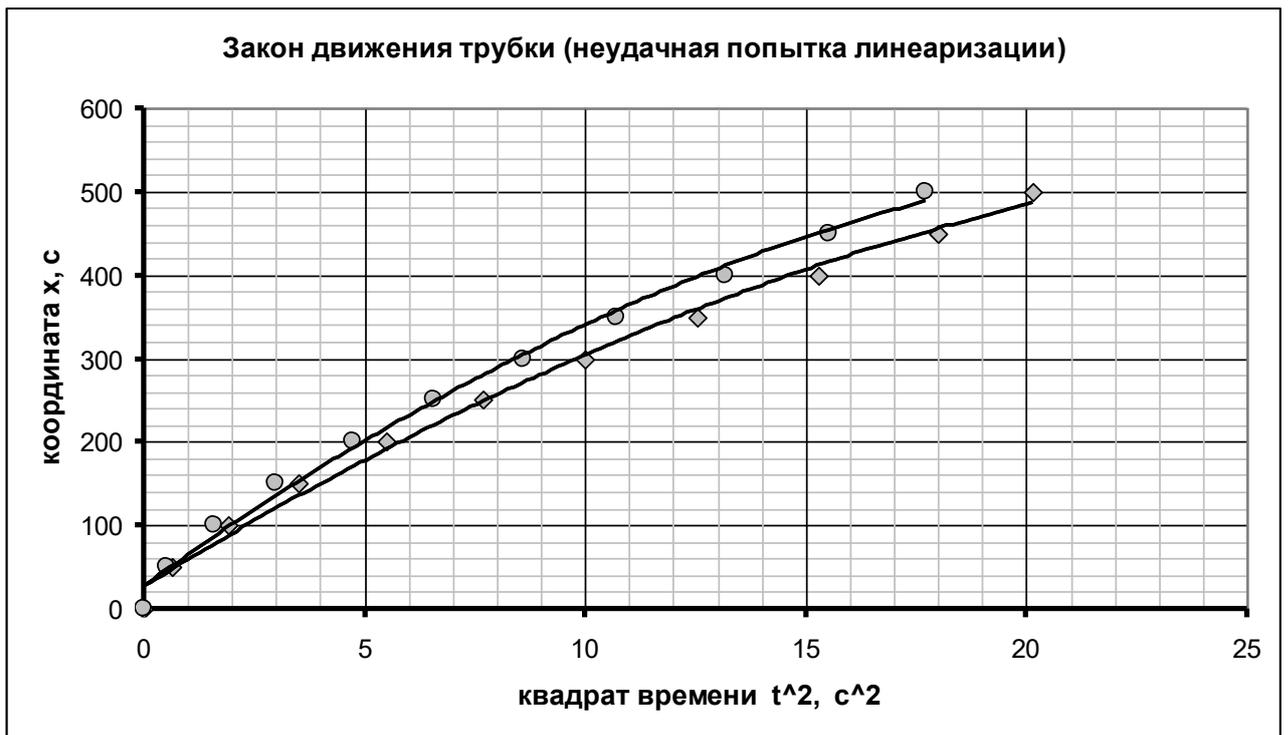
x , мм	t_1 , с	t_2 , с	$\frac{x}{t_1}, \frac{v}{c}$	$\frac{x}{t_2}, \frac{v}{c}$	t_1^2, c^2	t_2^2, c^2
0	0	0				
50	0,79	0,71	63,29	70,42	0,62	0,50
100	1,38	1,26	72,46	79,37	1,90	1,59
150	1,87	1,73	80,21	86,71	3,50	2,99
200	2,34	2,18	85,47	91,74	5,48	4,75
250	2,77	2,56	90,25	97,66	7,67	6,55
300	3,16	2,93	94,94	102,39	9,99	8,58
350	3,54	3,27	98,87	107,03	12,53	10,69
400	3,91	3,63	102,30	110,19	15,29	13,18
450	4,24	3,94	106,13	114,21	17,98	15,52
500	4,49	4,21	111,36	118,76	20,16	17,72

Графики полученных зависимостей показаны на рисунке.



Внешне графики напоминают параболы, однако этого «внешнего впечатления» не достаточно, чтобы сделать вывод о том, что движение является равноускоренным!

Так же по графику видно, что в начальный момент времени скорость трубки не равна нулю. Поэтому линеаризация вида $x(t^2)$ в данном случае не подходит. Следующий (не нужный по условию график) подтверждает это утверждение.

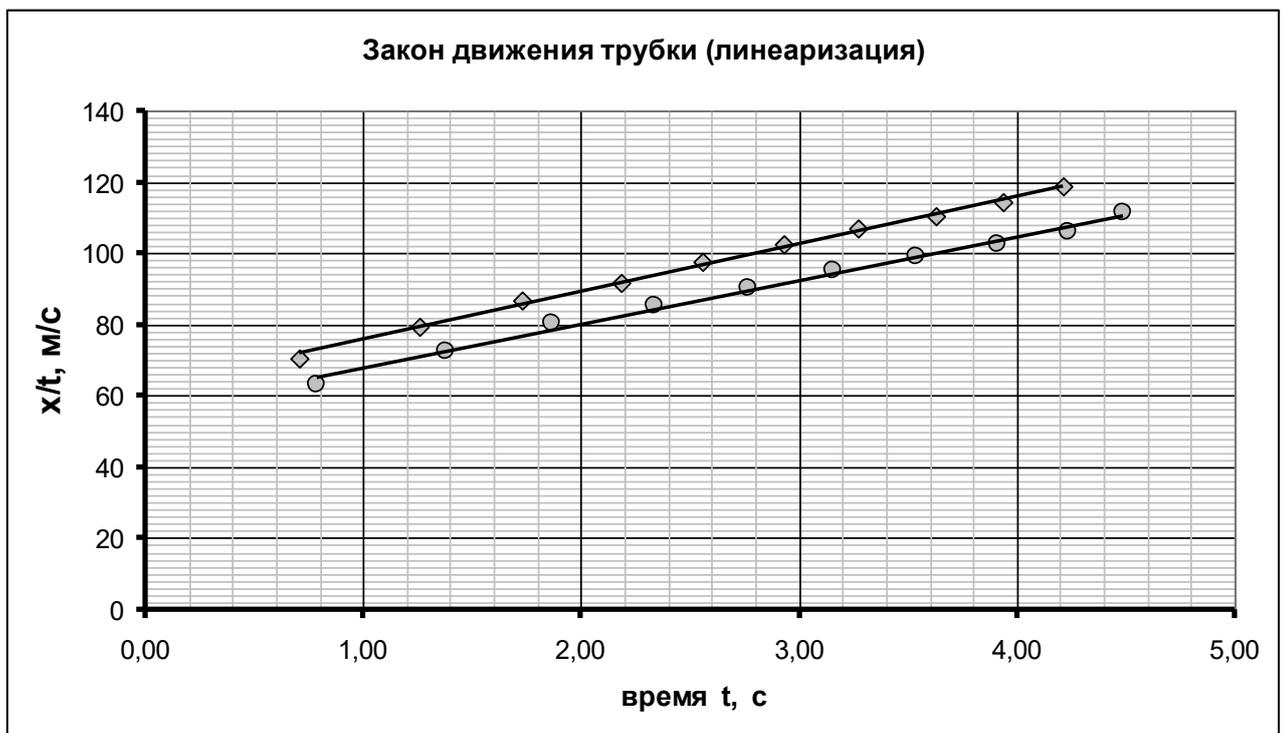


Так как начальная координата равна нулю, то функцию, описывающую равноускоренное движение

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2} . \quad (6)$$

следует приводить к линейному виду посредством преобразования

$$\frac{x}{t} = v_0 + \frac{at}{2} \quad (7)$$



Результаты расчетов этой зависимости также приведены в таблице 1. На рисунке показан график линеаризованной зависимости.

По наклону графика (коэффициент наклона $K = (13,4 \pm 0,54) \frac{мм}{с^2}$) определяем ускорение трубки

$$a = 2K = (26,8 \pm 1,1) \frac{мм}{с^2} = (2,68 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \frac{м}{с^2} \quad (8)$$

Наконец, по формуле (4) рассчитываем значение коэффициента C

$$C = \frac{g \sin \alpha}{a} = \frac{9,8 \cdot 0,015}{2,68 \cdot 10^{-2}} \approx 5,5. \quad (9)$$

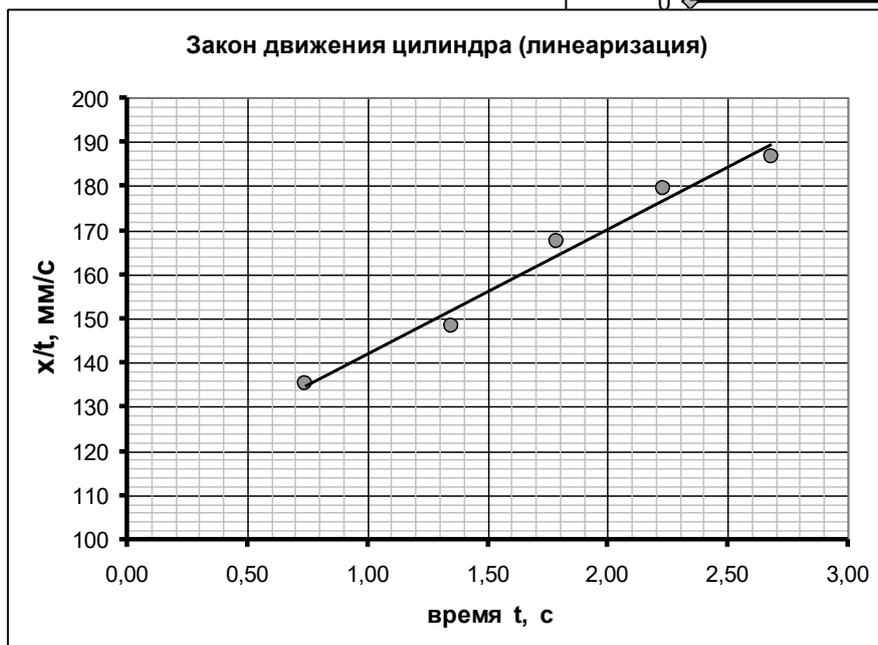
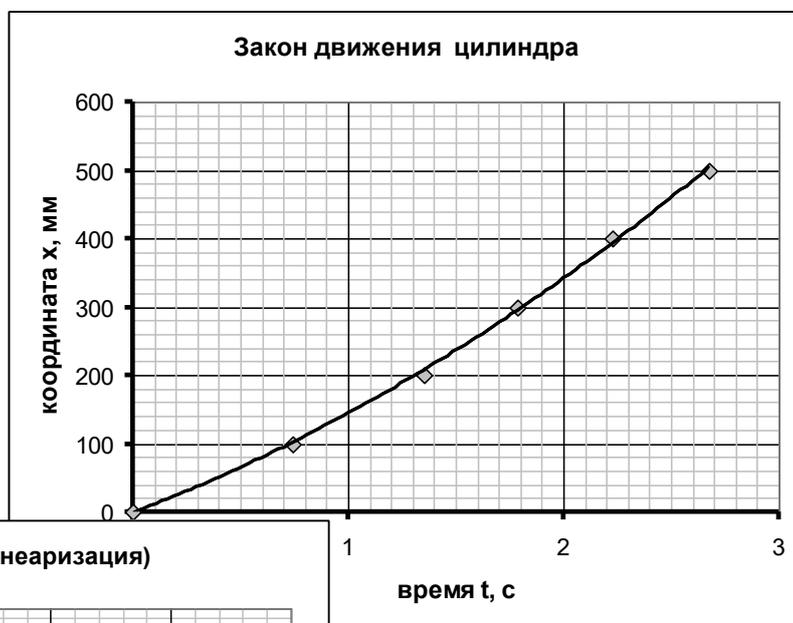
Основной вклад в погрешность вносит погрешность измерения ускорения, поэтому

$$\Delta C = C \frac{\Delta a}{a} = 0,2. \quad (10)$$

Аналогично проводятся измерения характеристик движения цилиндра. Результаты измерений приведены в Таблице 2. Графики закона движения (непосредственный и линеаризованный) приведены на рисунках.

Таблица 2.

$x, мм$	$t, с$	$\frac{x}{t}, \frac{в}{с}$
0	0	
100	0,74	135,14
200	1,35	148,15
300	1,79	167,60
400	2,23	179,37
500	2,68	186,57



По линеаризованной зависимости можно рассчитать требуемые численные значения параметров:

$$\text{Значение коэффициента наклона графика } K = (28 \pm 5) \frac{\text{мм}}{\text{с}^2},$$

$$\text{Значение ускорения } a = 2K = (56 \pm 10) \frac{\text{мм}}{\text{с}^2} = (5,6 \pm 1) \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$\text{Коэффициент } C = 2,6 \pm 0,4$$

Часть 3. Зависимость ускорения от угла наклона.

3.1 Формула, позволяющая по двум измеренным временам прохождения двух отметок рассчитать ускорение тела, выводится путем цепочки алгебраических преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2} \\ x_2 = v_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{t_1} = v_0 + \frac{at_1}{2} \\ \frac{x_2}{t_2} = v_0 + \frac{at_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2}(t_2 - t_1) = \frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow$$

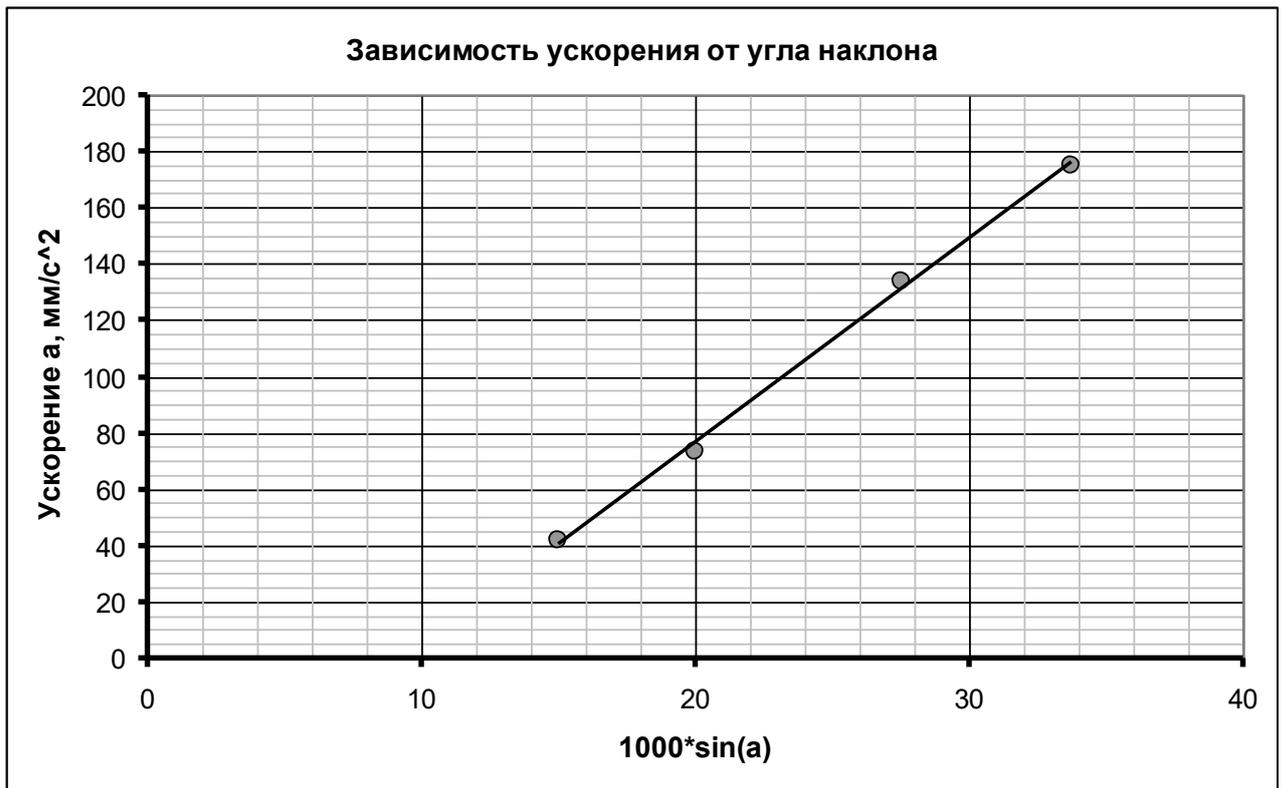
$$a = 2 \frac{\frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1}}{t_2 - t_1}$$

3.2 Для измерения зависимости ускорения от угла наклона на наклонной плоскости (общая длина 800мм) были отмечены два равных участка. Координаты концов этих точек являлись $x_0 = 0$, $x_1 = 250 \text{ мм}$, $x_2 = 500 \text{ мм}$. Затем измерялись времена t_1, t_2 прохождения отметок x_1, x_2 , причем секундомер запускался, когда трубка проходила нулевую отметку. Для каждого угла наклона измерения проводились три раза, для каждого из них было рассчитано значение ускорения, после чего вычислялось среднее значение ускорения. Результаты измерений и расчетов приведены в таблице 3. Рядом показан график полученной зависимости.

Таблица 3.

$h, \text{мм}$	$\alpha \cdot 10^3$	$x = 250 \text{ мм}$	$x = 500 \text{ мм}$	$a \frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$	$\langle a \rangle \frac{\text{мм}}{\text{с}^2}$
		$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$		
12	15,00	3,31	4,75	41,30	41,50
		3,16	4,61	40,48	
		2,51	3,88	42,72	
16	20,00	2,17	3,25	71,55	73,42
		2,26	3,34	72,37	
		2,17	3,22	76,33	
22	27,50	1,72	2,51	136,34	133,91
		1,76	2,57	129,65	
		1,68	2,47	135,75	
27	33,75	1,45	2,12	189,36	175,13
		1,45	2,16	166,39	
		1,39	2,09	169,65	

График зависимости ускорения от угла наклона показан на рисунке.



Коэффициенты полученной линейной зависимости

$$a = K\alpha + b \quad (12)$$

Оказываются равными $K = 7,26 \frac{м}{с^2}$, $b = -68,6 \frac{мм}{с^2}$

Наличие постоянного сдвига свидетельствует о заметном влиянии силы трения качения на движение цилиндра. Это частично объясняет явно завышенное значение коэффициентов C , полученных в предыдущей части.

Если в уравнение (1) добавить работу силы трения

$$C \frac{mv^2}{2} - C \frac{mv_0^2}{2} = mg\Delta h - \mu mg \cos \alpha, \quad (13)$$

То это приведет к появлению слагаемого, обусловленного трением, в выражении для ускорения:

$$Cax = gx \sin \alpha - \mu gx \cos \alpha \Rightarrow a = \frac{g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha}{C} \approx \frac{g}{C} \alpha - \frac{\mu g}{C} \quad (14)$$

Из сравнения теоретической зависимости (14) с экспериментальной зависимостью (12) следует, что значение коэффициента C по этим данным оказывается равным $C \approx 1,4$.

Отметим, что теоретическое значение этого коэффициента для трубки $C_{теор} = 2$.

Существенные отклонения полученного результата может быть объяснено частичным проскальзыванием трубки при скатывании, что может быть особенно существенным, если трубка не совсем круглая и немного «подпрыгивает» при движении.

Следует подчеркнуть, что при движении с постоянным проскальзыванием коэффициент K в формуле (12) должен быть равен ускорению свободного падения (независимо от C)!

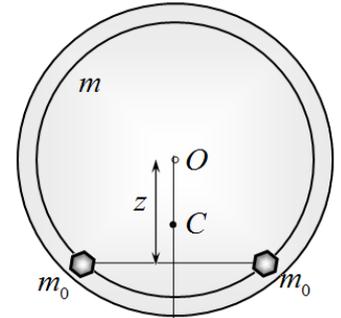
Задача 11-2 Дискосый маятник.

1.1 Координата центра масс диска с грузами определяется по стандартной формуле

$$l = z_c = \frac{2m_0}{2m_0 + m} z \quad (1)$$

Поэтому параметр $\gamma = \frac{2m_0}{2m_0 + m}$ и равен отношению массы грузов

к массе всего маятника. Существенно, что координата центра масс самого диска равна нулю.



1.2 Для определения вида зависимости периода колебаний от расстояния z можно воспользоваться энергетическим подходом. Обозначим угол отклонения маятника от вертикали φ . Тогда кинетическая энергия пропорциональна квадрату угловой скорости $\omega = \varphi'(t)$:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} \quad (2)$$

Причем коэффициент пропорциональности I (момент инерции) не зависит от положения грузов на окружности, т.е. не зависит от параметра z . Потенциальная энергия определяется формулой

$$U = -Mgl \cos \varphi \approx -Mgl \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \quad (3)$$

(Здесь $M = m + 2m_0$) и зависит от положения грузов! Записывая уравнения закона сохранения энергии для колебательного движения маятника

$$\frac{I\omega^2}{2} + Mgl \frac{\varphi^2}{2} = E \quad (4)$$

Видим, что оно описывает гармонические колебания с периодом

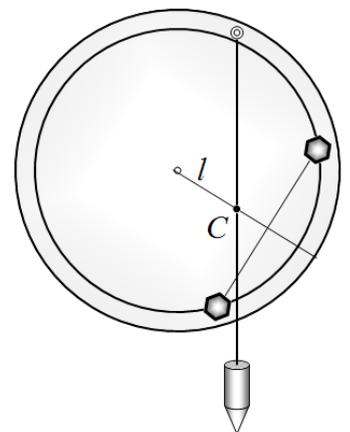
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg\gamma z}} = \frac{C}{\sqrt{z}}. \quad (5)$$

Часть 3. Экспериментальная.

3.1 Параметр γ легко измерить. Для этого достаточно подвесить маятник за одно из отверстий и с помощью отвеса (в качестве которого можно использовать, например, линейку) определить положение центра масс l .

В нашей установке получены следующие значения

$$\gamma = \frac{l}{z} = \frac{1,9\text{см}}{16\text{см}} \approx 0,12. \quad (6)$$



3.2 В таблице 1 приведены результаты измерений периодов колебаний от параметра z . Для каждого положения грузов трижды измерены времена t_k $N = 5$ колебаний. В качестве результат измерения периода использовалось среднее значение времен колебаний, деленное на их число

$$T = \frac{\langle t \rangle}{N} = \frac{\sum_{k=1}^3 t_k}{15} . \quad (7)$$

Для оценки погрешности измерений первоначально рассчитывалась погрешность измерения времени по формуле

$$\Delta t = 2 \sqrt{\frac{\sum_k (t_k - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad (8)$$

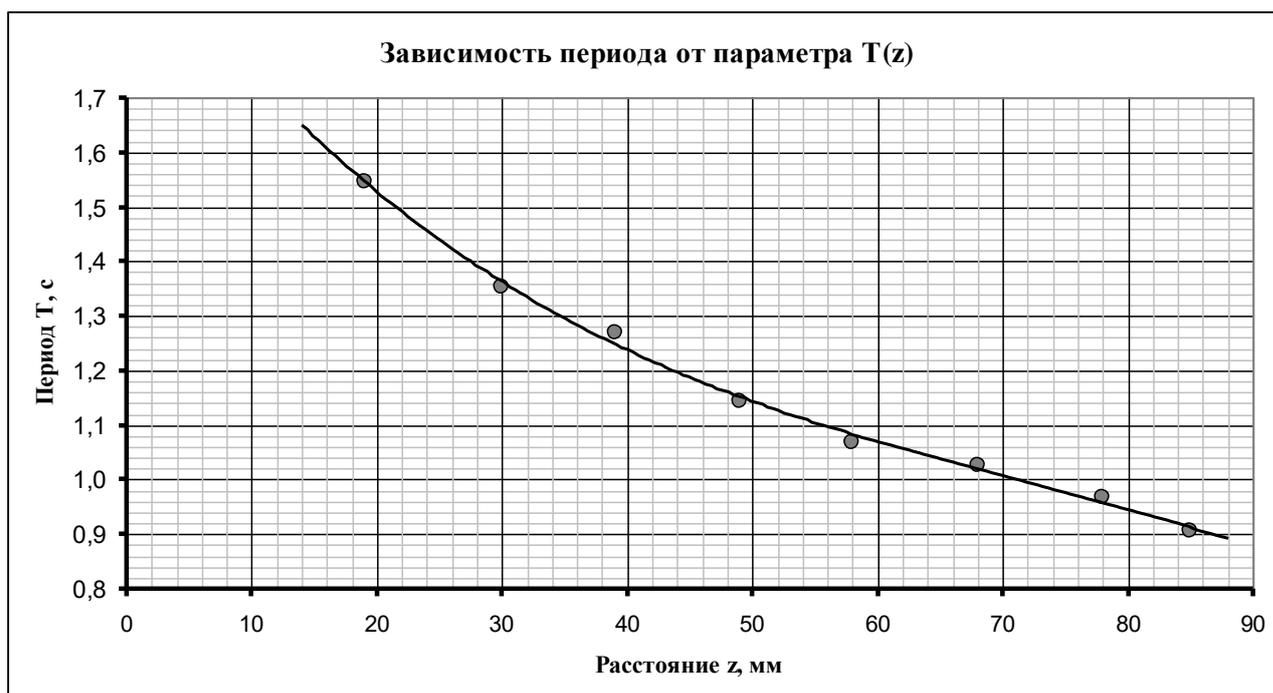
Здесь $n = 3$. Погрешности измерения периодов рассчитаны по формуле

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{N} . \quad (9)$$

Таблица 1.

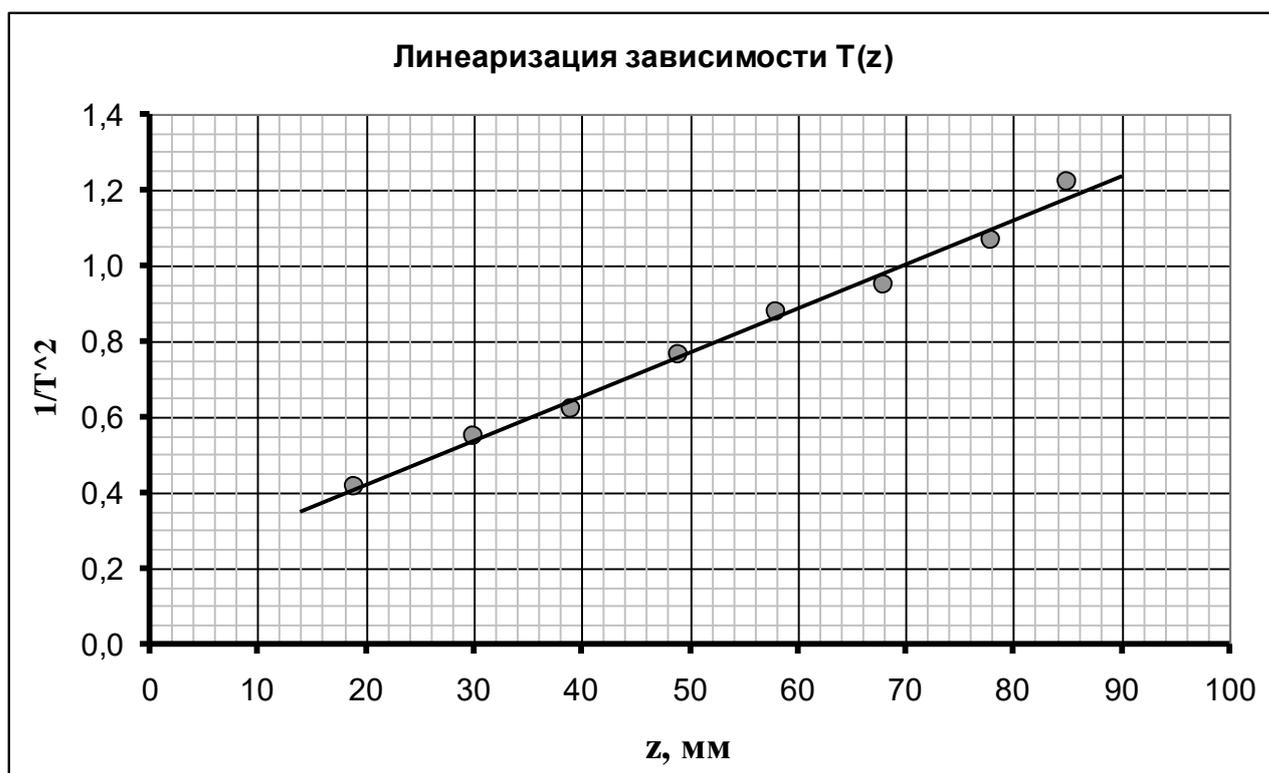
$z, \text{мм}$	Времена 5 колебаний			$\langle t \rangle, \text{с}$	Период колебаний	
	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$		$T, \text{с}$	$\Delta T, \text{с}$
19	7,66	7,73	7,82	7,737	1,547	0,037
30	6,79	6,74	6,76	6,763	1,353	0,012
39	6,33	6,38	6,34	6,350	1,270	0,012
49	5,72	5,71	5,73	5,720	1,144	0,005
58	5,37	5,32	5,35	5,347	1,069	0,012
68	5,14	5,13	5,11	5,127	1,025	0,007
78	4,86	4,85	4,81	4,840	0,968	0,012
85	4,58	4,49	4,52	4,530	0,906	0,021

График полученной зависимости показан на следующем рисунке.



Часть 3. Экспериментальная.

3.3 В данном эксперименте возможна систематическая ошибка в измерении параметра z , по нескольким причинам: неточность вырезания диска; неоднородность картона, неточность выбора оси вращения и большой размер отверстия; неточность положения грузов и т.д. Поэтому истинное значение этого параметра может быть записано в виде $Z = z + \delta z$, где δz - некоторый систематический, но не известный сдвиг. При измерении периодов колебаний присутствуют только случайные ошибки. С этой точки зрения лучшей линейризацией является зависимость $\frac{1}{T^2}(z)$. В этом случае систематическая ошибка параметра z приведет только к сдвигу прямой линии. На рисунке показана эта линейризованная зависимость. Ее линейность подтверждает найденную теоретическую зависимость (5).



3.4 Полученная зависимость описывается линейной функцией

$$T^{-2} = 0,0116z + 0,1876 = K(z + \delta z) . \quad (10)$$

где $K = 0,0116 \text{ с}^{-2} \cdot \text{мм}^{-1}$, $\delta z = 16 \text{ мм}$.

Как оказалось, действительно, в измерении z присутствует заметный сдвиг δz .

Дополнение. Ликбез повышенного уровня.

Наличие постоянного сдвига заметно ухудшает другие «очевидные» способы линеаризации. На первый взгляд кажется, что хорошей линеаризацией зависимости

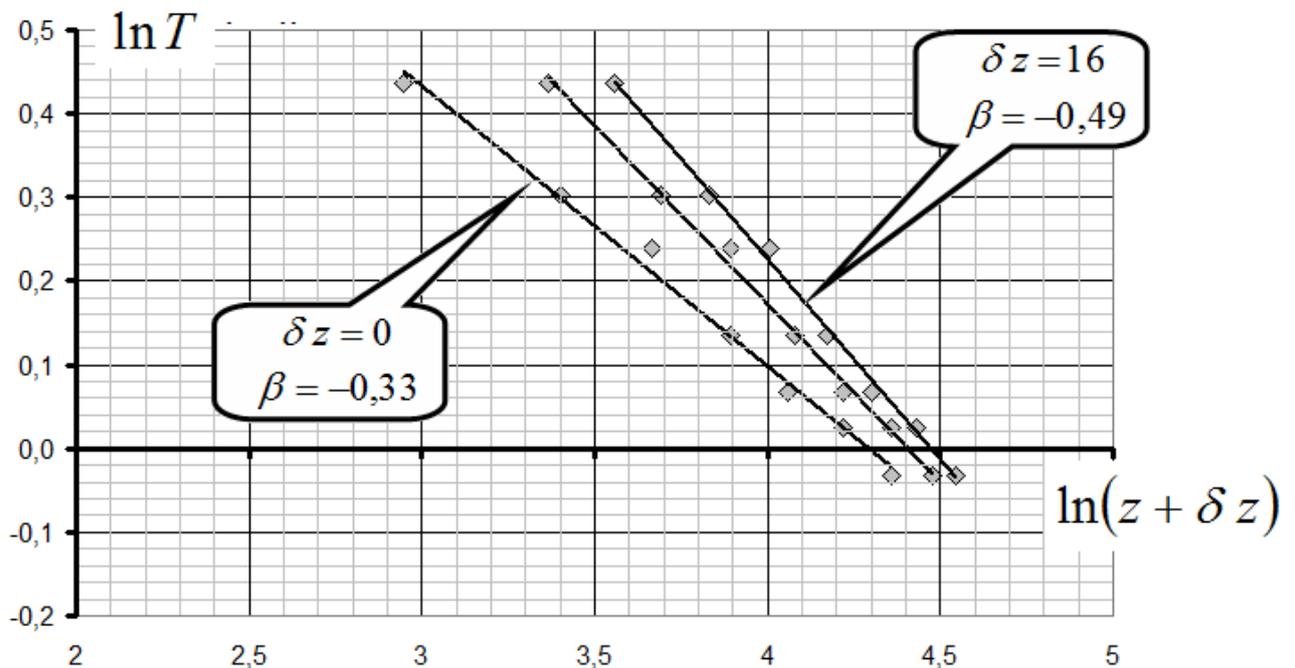
$$T = \frac{C}{\sqrt{z}} \quad (Д1)$$

Является двойной логарифмический масштаб

$$\ln T = A + \beta \ln z \quad (Д2)$$

Если в этих координатах коэффициент наклона β окажется равным $\beta = -\frac{1}{2}$, то эксперимент подтверждает зависимость (Д1).

Посмотрите, что же получается при такой линеаризации: коэффициент наклона $-0,33$ (корень кубический!). Если же ввести найденный сдвиг и построить зависимость «со сдвигом» $\ln T = A + \beta \ln(z + \delta z)$, то при $\delta z = 16$ коэффициент наклона оказывается равным ожидаемому значению $\beta = -0,49$. Для демонстрации зависимости рассчитанного показателя степени от сдвига на рисунке построена зависимость при $\delta z = 10$



Аналогичная ситуация складывается и при другой «очевидной» линеаризации $T\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$.

На следующем рисунке показано несколько кривых зависимости $T\left(\frac{1}{\sqrt{z+\delta z}}\right)$ при $\delta z = 0; 10; 16$, которые показывают, как эта зависимость выпрямляется при правильно найденном значении сдвига.

