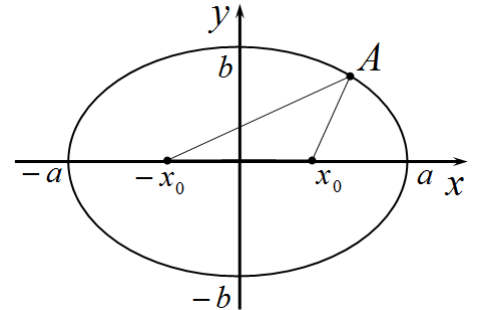


Задание 9-1. Взвешивание ... площади!

Часть 1. Инженерная

Рассмотрим предложенную процедуру построения эллипса с помощью двух кнопок и нити постоянной длины. Необходимая длина нити есть сумма расстояний от произвольной точки эллипса A до фокусов. Эту длину легко найти, если рассмотреть крайнее положение карандаша (т.е. точки A) на оси Ox . В этом случае длина нити должна быть равной

$$L = (a - x_0) + (a + x_0) = 2a. \quad (1)$$



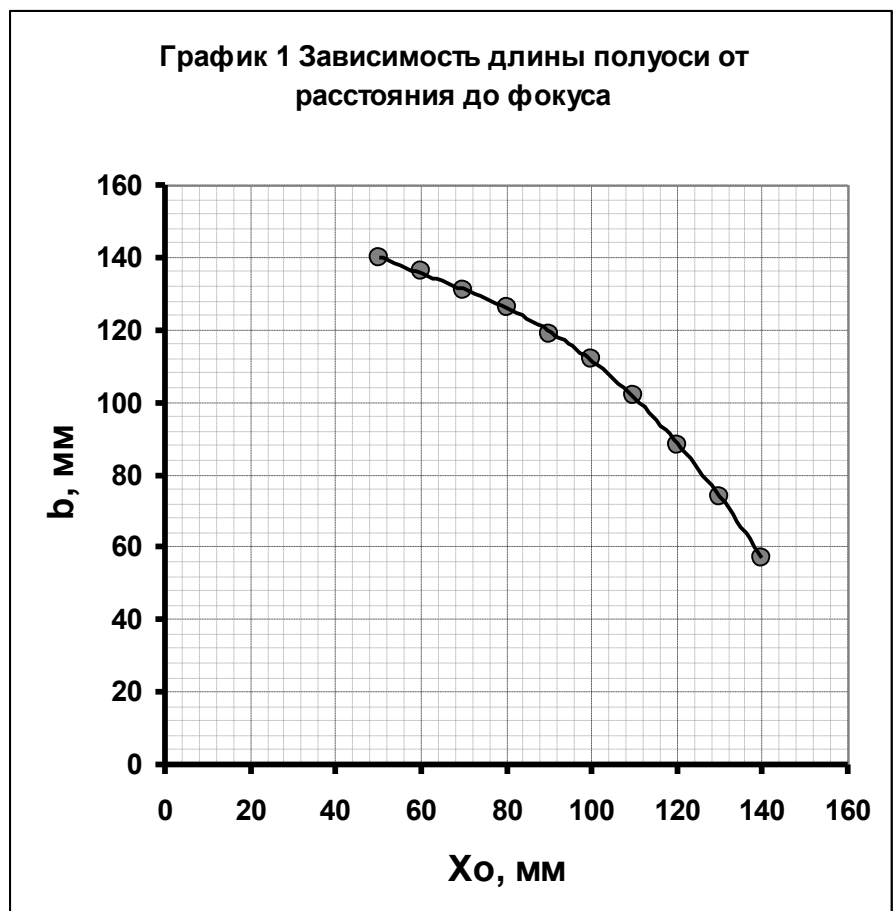
Важно отметить, что эта длина не зависит положения фокусов (величины x_0), поэтому для всех фокусов используется нить одной и той же длины.

Отметим, что для наших измерений использовались эллипсы с большой полуосью, равной $a = 150\text{мм}$.

1.1 Результаты измерений зависимости малой полуоси эллипса b от расстояния x_0 приведены в таблице 1 и на графике 1.

Таблица 1.

x_0 , мм	b , мм
140	57
130	74
120	88
110	102
100	112
90	119
80	126
70	131
60	136
50	140



1.2 Теоретическую формулу для полученной зависимости можно получить, рассмотрев положение карандаша на оси Oy .

Из теоремы Пифагора непосредственно следует, что

$$b = \sqrt{a^2 - x_0^2}. \quad (2)$$

Наиболее наглядным доказательством справедливости этой формулы служит график линеаризованной зависимости $b^2(x^2)$, который показан на следующем рисунке.

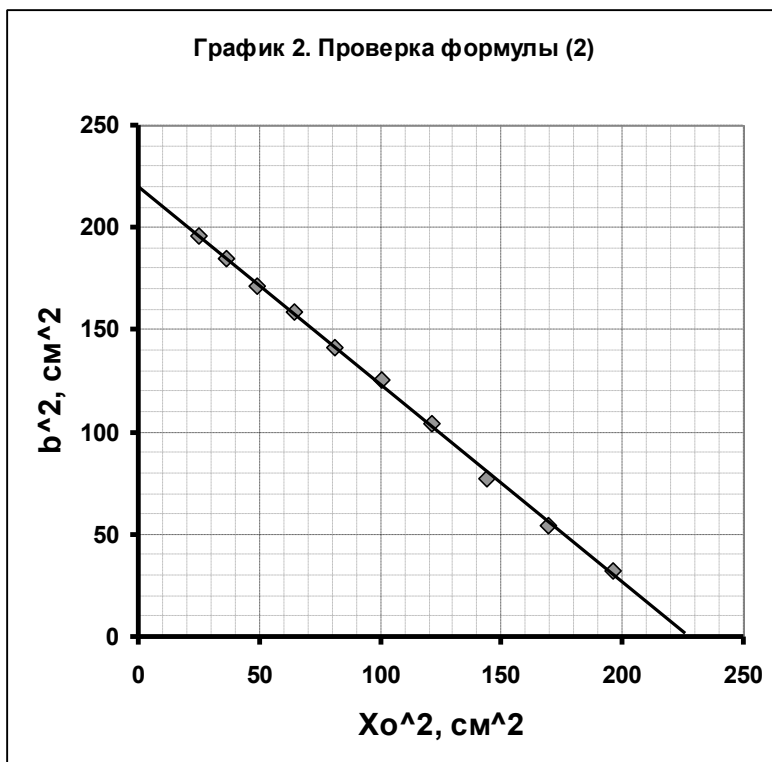
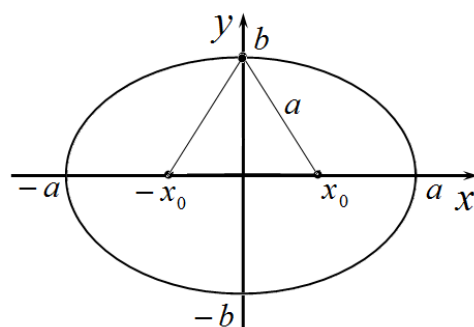
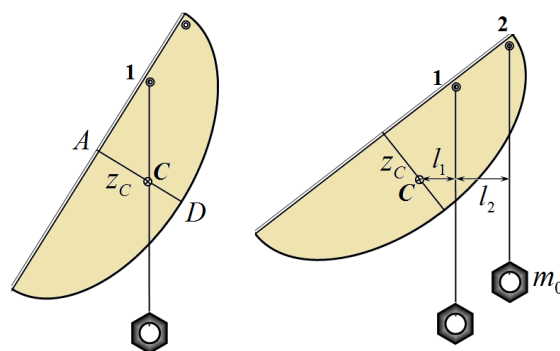


График этой зависимости представляет собой прямую линию с коэффициентом наклона, равным -1 и отсекающую на осях равные отрезки примерно равные $15^2 = 225\text{см}^2$.

Этот график экспериментально доказывает теорему Пифагора.

Часть 2 Измерительная.

2.1 Для проведения необходимых измерений следует воспользоваться следующей последовательностью действий. Подвесить вырезанную фигуру на игле, проходящую через отверстие 1. На иглу подвесить отвес. Нить отвеса проходит через центр масс, который также находится на оси симметрии фигуры AD . Точка их пересечения C и является центром масс. Не сложно измерить и расстояние z_c от C центра полуэллипса. После этого в отверстие 2 следует подвесить нить с грузом (гайкой). Далее следует измерить расстояния l_1 и l_2 . Тогда по правилу рычага отношения масс вырезанной фигуры m и гайки m_0 будет равно отношению плеч



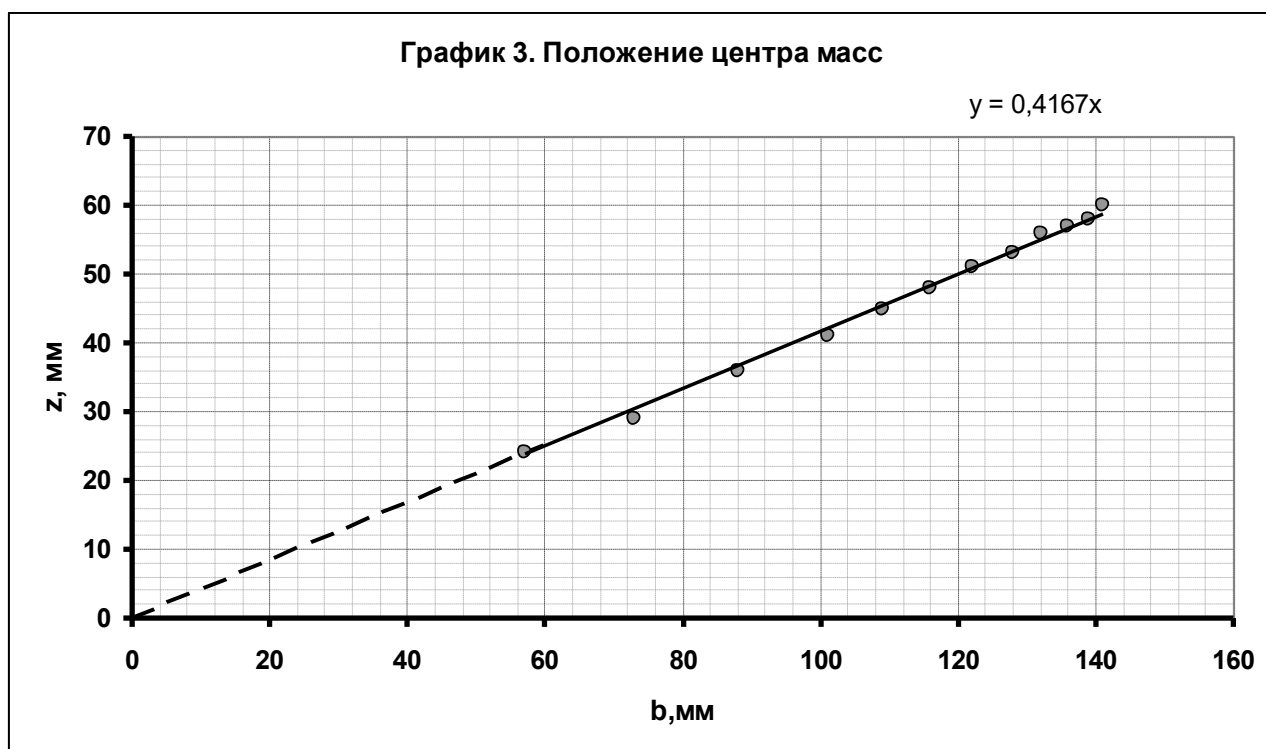
$$\frac{m}{m_0} = \frac{l_2}{l_1}. \quad (3)$$

2.2 Результаты необходимых измерений приведены в таблице 2.

Таблица 2.

$x_0, \text{мм}$	$b, \text{мм}$	$z_0, \text{мм}$	$l_2, \text{мм}$	$l_1, \text{мм}$	m/m_0
20	141	60	55	7	7,86
30	139	58	48	8	6,00
40	136	57	46	8	5,75
50	132	56	47	8	5,88
60	128	53	48	9	5,33
70	122	51	45	9	5,00
80	116	48	45	10	4,50
90	109	45	43	10	4,30
100	101	41	41	11	3,73
110	88	36	38	11	3,45
120	73	29	38	12	3,17
130	57	24	34	12	2,83

2.3 На графике 3 показана зависимость координаты центра масс вырезанной фигуры z_c от длины полуоси эллипса b .



Из графика следует, что координата центра масс z_c прямо пропорциональная длине полуоси b :

$$z_c = Ab \quad (4)$$

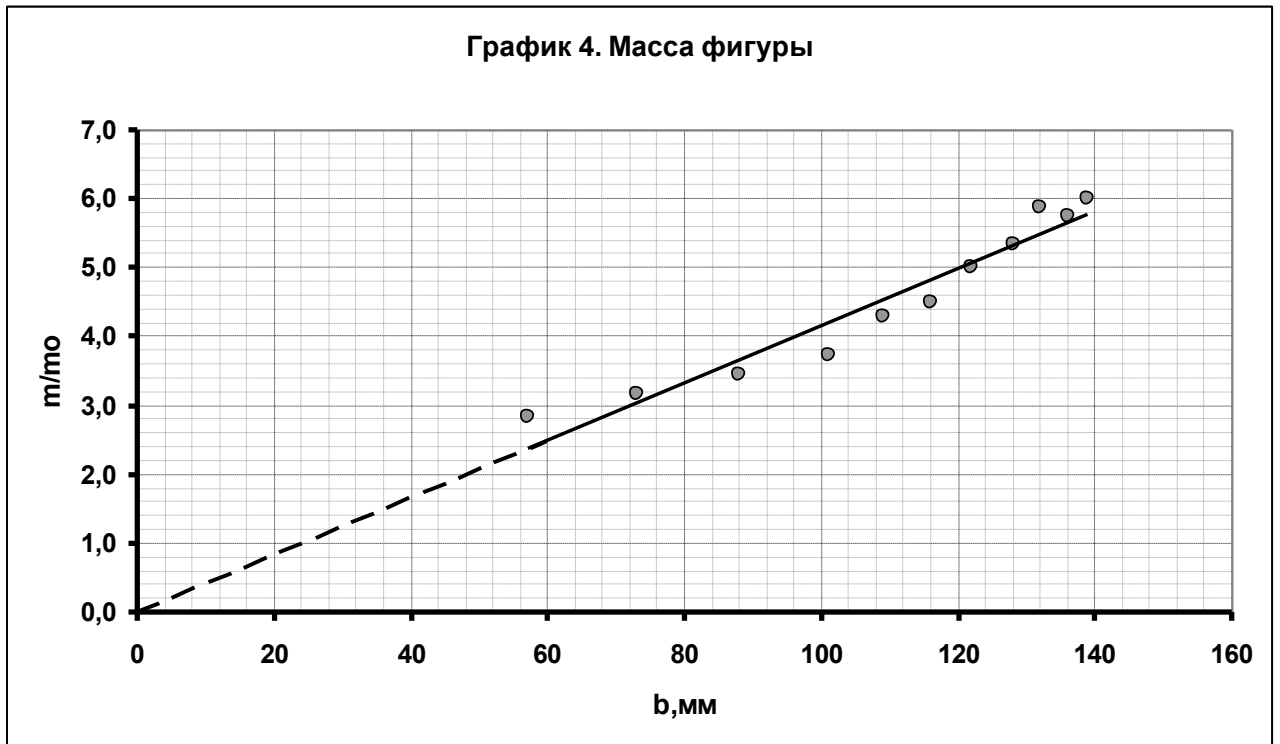
где коэффициент пропорциональности, найденный по наклону графика примерно равен $A \approx 0,42$.

Отметим, что теоретическое значение этого коэффициента $A = \frac{4}{3\pi} \approx 0,424$, что очень близко к измеренному значению.

- 2.4 На основании полученных вами экспериментальных данных найдите отношение $\frac{z_C}{R}$ Для полукруга радиуса R (даже в том случае, когда среди ваших фигур полукруга нет).
- 2.5 Постройте график зависимости отношения масс m/m_0 от длины полуоси b .
- 2.6 На основании полученных экспериментальных данных предложите точную формулу для площади эллипса.

2.4 Полукруг является частным случаем полуэллипса, поэтому отношение $\frac{z_C}{R}$ для полукруга (когда $b = R$) равно значению коэффициента A .

2.5 График зависимости отношения масс m/m_0 от длины полуоси b показан на следующем рисунке.



Этот график показывает, что масса полуэллипса пропорциональна длине полуоси b . Так как масса пропорциональна площади фигуры, то и площадь эллипса пропорциональна величине b , т.е.

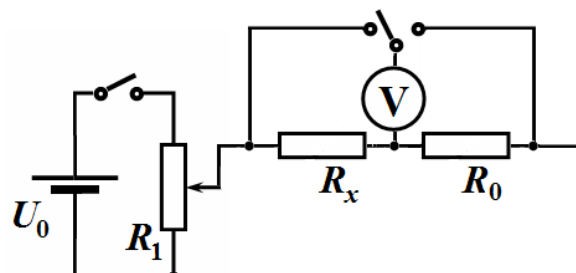
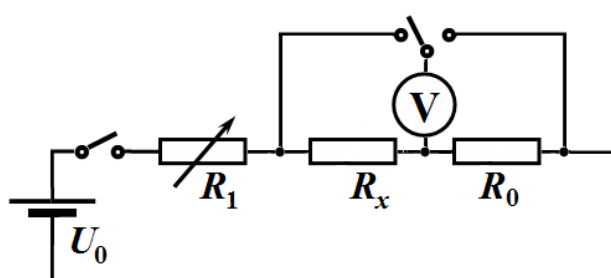
$$S = Bb. \quad (5)$$

Коэффициент пропорциональности можно найти, зная формулу для площади круга $S = \pi R^2$. Как уже отмечалось, круг является частным случаем эллипса, когда его полуоси равны $a = b = R$ и совпадают с радиусом круга. Сравнивая формулы для площадей эллипса и круга приходим к выводу, что площадь эллипса рассчитывается по формуле

$$S = \pi ab. \quad (6)$$

Задание 9-2. ВАХ – какие графики!

Для проведения измерений в максимально возможном диапазоне напряжений следует использовать две традиционные схемы подключения реостата: по схеме потенциометра и по схеме переменного последовательного резистора.

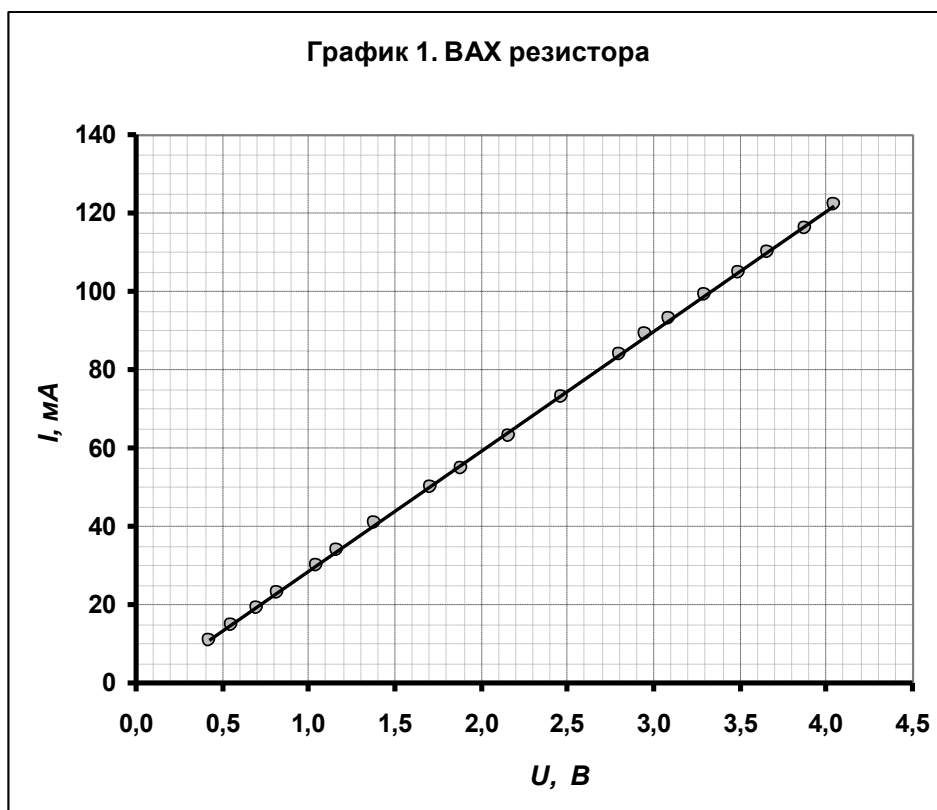


Для измерения силы тока измеряется напряжение на резисторе с известным сопротивлением R_0 . Все приведенные ниже результаты получены при использовании обеих схем.

1.1 Результаты измерений зависимости силы тока через резистор от приложенного напряжения приведены в Таблице 1 и на графике 1.

Таблица 1.

$U, В$	$I, мА$
4,05	122
3,88	116
3,66	110
3,49	105
3,30	99
3,09	93
2,95	89
2,80	84
2,47	73
2,16	63
1,88	55
1,71	50
1,38	41
1,16	34
1,05	30
0,82	23
0,70	19
0,55	15
0,42	11



Как следует из полученной зависимости сопротивление резистора в данном диапазоне напряжений и сил токов является постоянным. Коэффициент наклона приведенной зависимости равен¹ $K = (30,6 \pm 0,2) \frac{мА}{В}$. Следовательно, сопротивление резистора равно

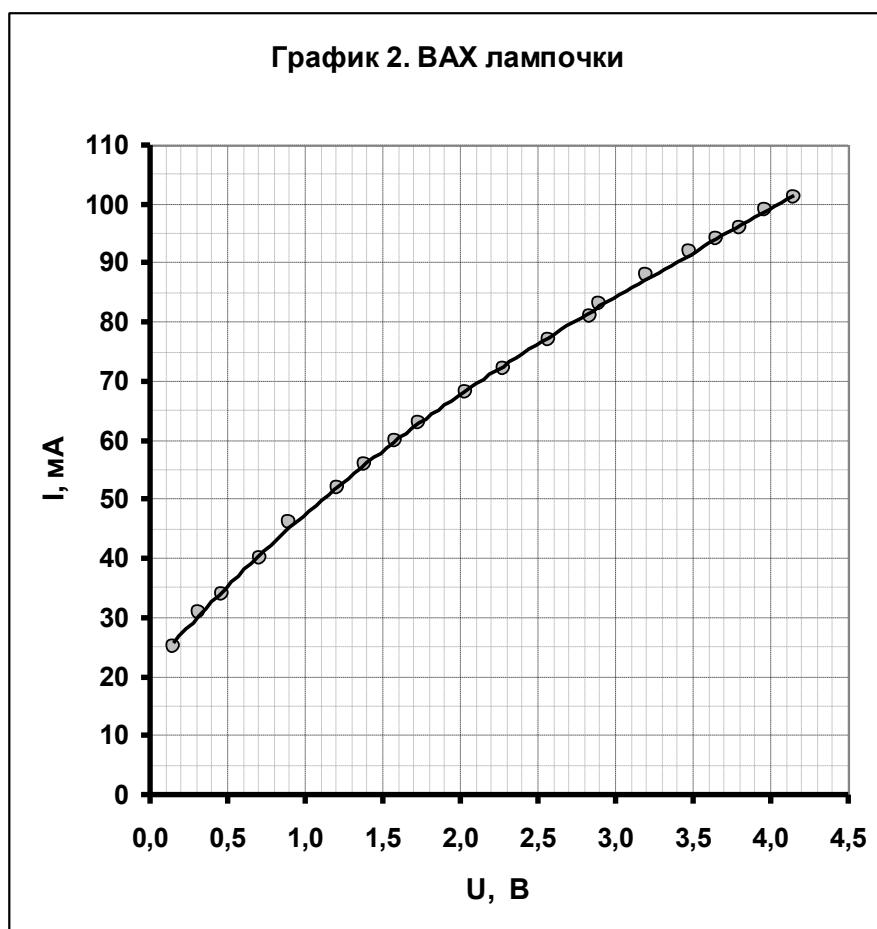
$$R = (32,7 \pm 0,2) Ом. \quad (1)$$

¹ Погрешность рассчитана по МНК, хотя применим и графический метод.

1.2 Результаты измерений зависимости силы тока через лампочку от приложенного напряжения приведены в таблице 2 и на графике 2.

Таблица 2.

$U, В$	$I, мА$
4,15	101
3,97	99
3,80	96
3,65	94
3,48	92
3,20	88
2,89	83
2,84	81
2,57	77
2,28	72
2,03	68
1,73	63
1,58	60
1,38	56
1,21	52
0,90	46
0,71	40
0,46	34
0,31	31
0,15	25

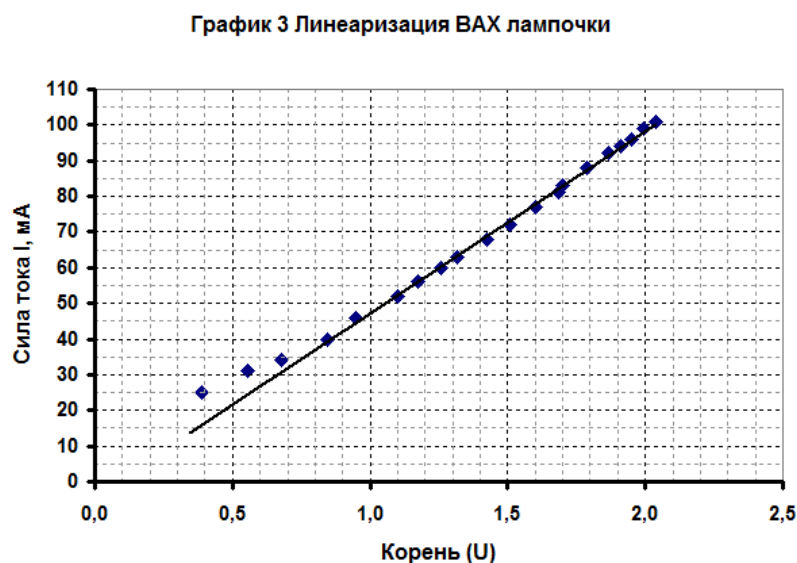


Полученная зависимость является нелинейной. Объяснение нелинейности очевидно: при увеличении силы тока нить накала разогревается, поэтому ее сопротивление возрастает. Вследствие чего, сила тока нарастает медленнее.

Интересно, что полученная зависимость может быть линеаризована (по условию задачи этого не требуется). На графике 3 показана зависимость силы тока от корня из напряжения $I(\sqrt{U})$, которая в диапазоне напряжений от 1 до 4 В может быть приближенно описана линейной функцией

$$I(мА) \approx 51,2\sqrt{U(В)} - 4,0. \quad (2)$$

Эта приближенная зависимость может быть также использована в решении последующих пунктов задания.



1.3 При параллельном соединении напряжения на резисторе и лампочке одинаковы, а суммарная сила тока I_0 равна сумме сил токов через резистор I_R и лампочку I_L

$$I_0 = I_R + I_L. \quad (2)$$

Зависимость силы тока через резистор от напряжения описывается законом Ома

$$I_R = \frac{U}{R}.$$

(3)

Зависимость $I_L(U)$ аналитически не описана (если, конечно, не принимать во внимание приближенную формулу (2)). Поэтому необходимо использовать экспериментальные данные. Один из возможных вариантов расчета – воспользоваться таблицей 2 и для каждого значения напряжения рассчитать значение силы тока через резистор по формуле (3), после чего провести сложение сил токов. Результаты расчетов приведены в таблице 3. Там же приведены результаты измерений зависимости силы тока от напряжения при параллельном соединении.

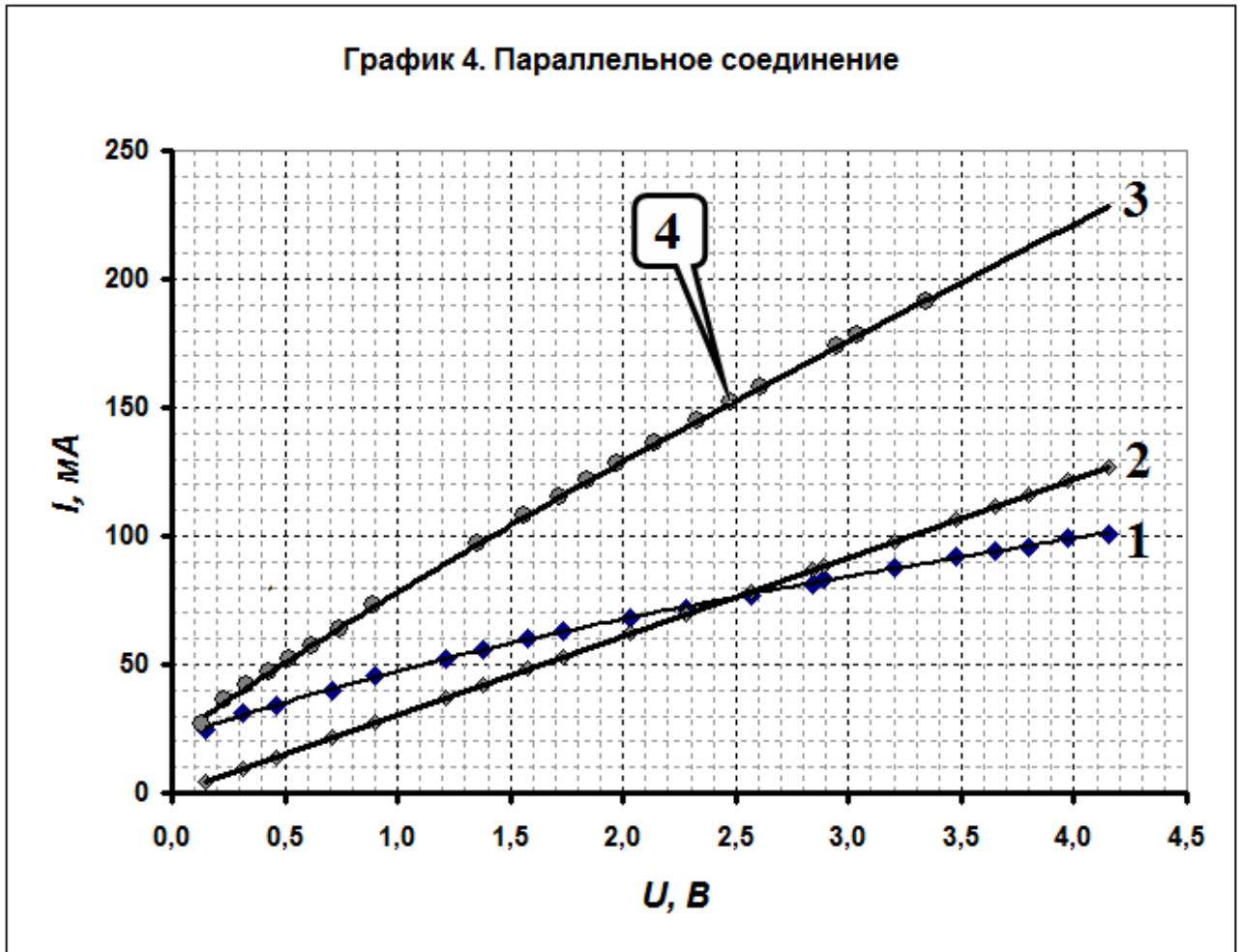
Результаты расчетов и измерений приведены в таблице 3.

Таблица 3. Параллельное соединение.

Измерения		Расчеты		ВАХ параллельное соединение	
ВАХ лампочки		$I_R, \text{ мА}$	$I_0, \text{ мА}$	$U, \text{ В}$	$I, \text{ мА}$
$U, \text{ В}$	$I, \text{ мА}$				
4,15	101	127	228	3,34	191
3,97	99	121	220	3,04	178
3,80	96	116	212	2,95	174
3,65	94	112	206	2,61	158
3,48	92	106	198	2,48	152
3,20	88	98	186	2,33	145
2,89	83	88	171	2,14	136
2,84	81	87	168	1,97	128
2,57	77	79	156	1,84	122
2,28	72	70	142	1,72	115
2,03	68	62	130	1,56	108
1,73	63	53	116	1,35	97
1,58	60	48	108	0,89	73
1,38	56	42	98	0,74	64
1,21	52	37	89	0,62	57
0,90	46	28	74	0,52	52
0,71	40	22	62	0,43	47
0,46	34	14	48	0,33	42
0,31	31	9	40	0,23	36
0,15	25	5	30	0,13	27

На графике 4 приведены графики всех этих зависимостей: 1 – ВАХ лампочки; 2- ВАХ резистора; 3 – рассчитанная зависимость силы тока от напряжения при параллельном соединении; 4 (кружки) – результаты измерений. Как видно из графика – получено прекрасное соотношение между результатами расчетов и измерений.

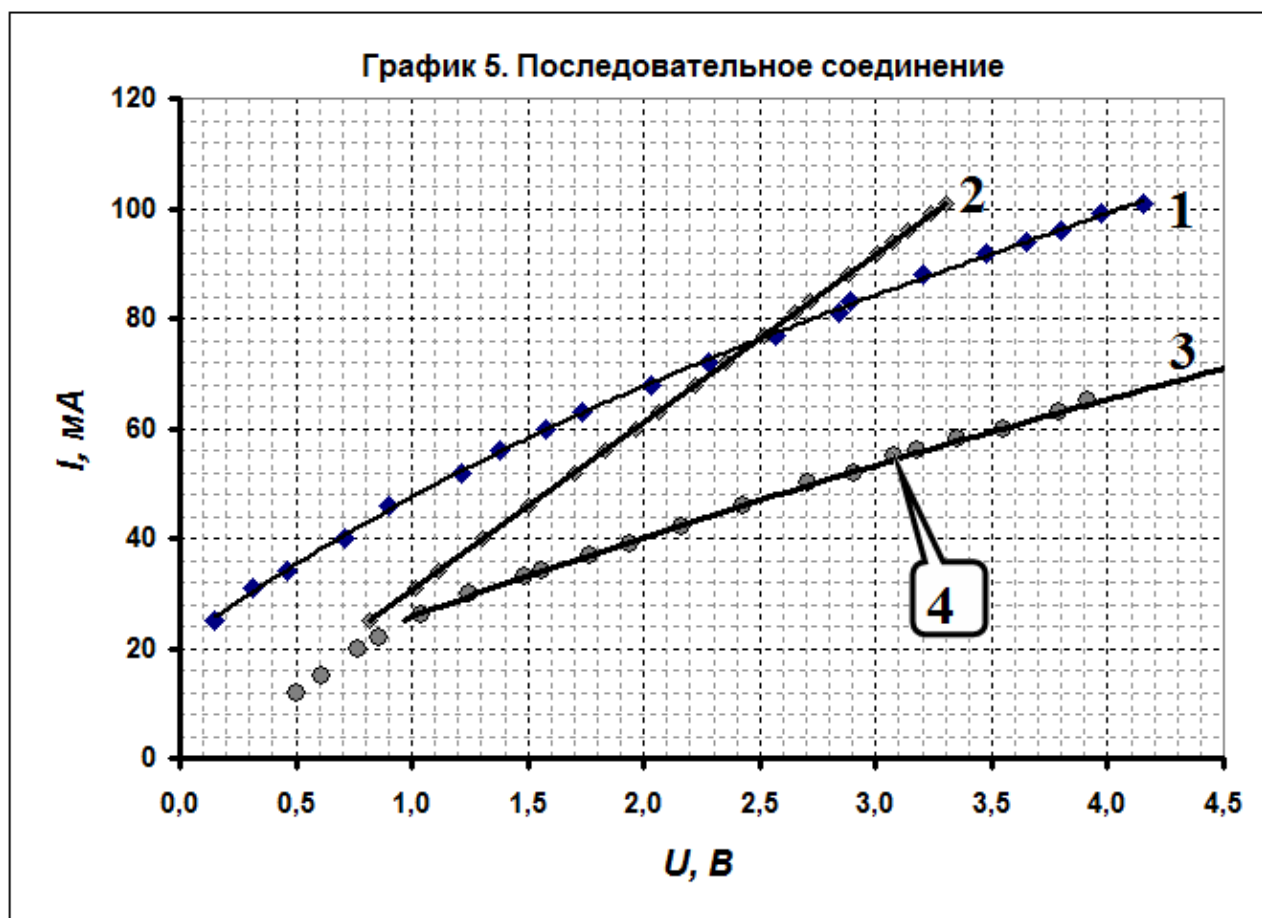
График 4. Параллельное соединение



1.4 При последовательном соединении силы токов через резистор и лампочку одинаковы, а суммарное напряжение равно сумме напряжений на резисторе и лампочке. Для расчета зависимости силы тока от напряжения можно применить методику, аналогичную, использованной в предыдущем пункте. Экспериментальную ВАХ лампочки дополнить расчетом напряжения на резисторе $U_R = IR$ и просуммировать значения напряжений при каждом значении силы тока $U_0 = U_R + U_D$. Результаты расчетов приведены в таблице 4.

Таблица 4. Последовательное соединение.

Измерения		Расчеты		ВАХ последовательное соединение	
ВАХ лампочки		$U_R, В$	$U_0, В$	$U, В$	$I, мА$
$U, В$	$U, В$				
4,15	101	3,30	7,45	3,91	65
3,97	99	3,24	7,21	3,79	63
3,80	96	3,14	6,94	3,55	60
3,65	94	3,07	6,72	3,35	58
3,48	92	3,01	6,49	3,18	56
3,20	88	2,88	6,08	3,08	55
2,89	83	2,71	5,60	2,91	52
2,84	81	2,65	5,49	2,71	50
2,57	77	2,52	5,09	2,43	46
2,28	72	2,35	4,63	2,16	42
2,03	68	2,22	4,25	1,94	39
1,73	63	2,06	3,79	1,77	37
1,58	60	1,96	3,54	1,56	34
1,38	56	1,83	3,21	1,49	33
1,21	52	1,70	2,91	1,25	30
0,90	46	1,50	2,40	1,04	26
0,71	40	1,31	2,02	0,86	22
0,46	34	1,11	1,57	0,77	20
0,31	31	1,01	1,32	0,61	15
0,15	25	0,82	0,97	0,50	12



Все эти зависимости представлены на графиках, с прежними обозначениями: 1 – ВАХ лампочки; 2- ВАХ резистора; 3 – рассчитанная зависимость силы тока от напряжения при последовательном соединении; 4 (кружки) – результаты измерений. Как видно из графика – и в этом случае получено прекрасное соотношение между результатами расчетов и измерений.

Задание 10-1. Тянем-потянем...

1. Массы брусков определяются с помощью динамометра с ценой деления $C_m=5г$: $m=(225\pm 5)г$, $m_{01}=(200\pm 5)г$. Размеры бруска определялись линейкой с миллиметровыми делениями: $a=(8,0\pm 0,1)см$, $b=(9,8\pm 0,1)см$. Длина отрезка $H=(40,0\pm 0,1)см$. Длина отрезка $h = H - a$, $h = (32,0 \pm 0,2)см$.

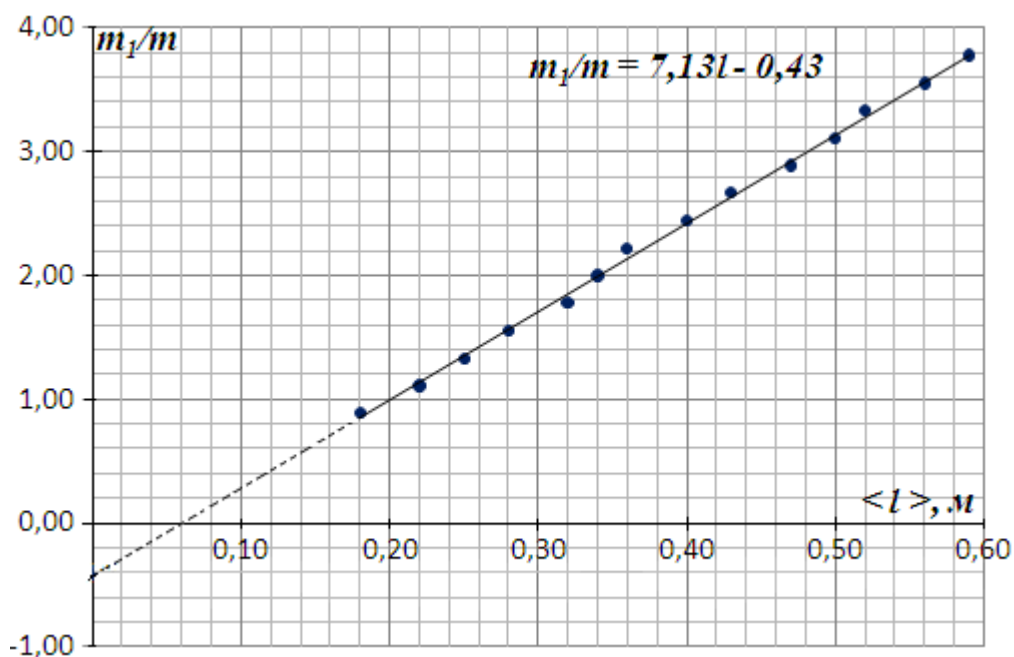
2. Расстояние l измерялось мерной лентой с точностью до 0,5см. При движении бруска визуально более точно определить положение бруска в момент отрыва не возможно. Результаты представлены в таблице ниже.

Таблица. Экспериментальные результаты

m_1 , кг	Повторные измерения					$\langle l \rangle$, м	m_1/m
	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	l_4 , м	l_5 , м		
0,200	0,175	0,190	0,195	0,170	0,175	0,181	0,89
0,250	0,225	0,220	0,220	0,230	0,225	0,224	1,11
0,300	0,245	0,260	0,255	0,250	0,255	0,253	1,33
0,350	0,295	0,290	0,280	0,275	0,280	0,284	1,56
0,400	0,310	0,315	0,330	0,325	0,325	0,321	1,78
0,450	0,330	0,345	0,345	0,340	0,345	0,341	2,00
0,500	0,365	0,365	0,360	0,350	0,355	0,359	2,22
0,550	0,395	0,400	0,405	0,405	0,400	0,401	2,44
0,600	0,410	0,440	0,435	0,420	0,435	0,428	2,67
0,650	0,475	0,470	0,480	0,470	0,465	0,472	2,89
0,700	0,490	0,500	0,500	0,495	0,505	0,498	3,11
0,750	0,535	0,515	0,510	0,515	0,515	0,518	3,33
0,800	0,555	0,565	0,565	0,550	0,550	0,557	3,56
0,850	0,595	0,595	0,580	0,580	0,585	0,587	3,78

Для выполнения п.4 более удобно пользоваться графической зависимостью не $m_1(l)$ а зависимостью $\frac{m_1}{m}(l)$, график и уравнение, которой представлены ниже.

График. Зависимость $\frac{m_1}{m}(l)$.



4. Приведём уравнение (14) к виду:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{c - b}{b + \mu a} + \frac{c + \mu a}{\mu h(b + \mu a)} l \quad (17).$$

Сравнивая уравнение (17) и уравнение усредняющей прямой

$$\frac{m_1}{m} = 7,13l - 0,43 \quad (18),$$

получим:

$$\frac{c - b}{b + \mu a} = -0,43 \quad (19)$$

и

$$\frac{c + \mu a}{\mu h(b + \mu a)} = 7,13 \text{ м}^{-1} \quad (20).$$

Подставляя в уравнения (19) и (20) значения отрезков a , b и h , решая данную систему уравнений, получим:

$$\mu = 0,25 \quad \text{и} \quad c = 0,047 \text{ м} = 4,7 \text{ см}.$$

При нахождении μ получаем квадратное уравнение, из корней которого выбираем положительный.

5.

Если, прикладывая к брускам горизонтальную силу с помощью динамометра, перемещать их равномерно по горизонтальной поверхности, то коэффициент трения может быть определён посредством уравнения

$$\mu = \frac{F_{\text{упр}}}{P} \quad (21)$$

где, $F_{\text{упр}}$ - сила, которую показывает динамометр, P – вес брусков с грузами. Однако однократное измерение не позволяет минимизировать погрешность. Минимизировать погрешность позволяет многократное измерение силы упругости динамометра при различных значениях веса брусков с грузами и построение графика зависимости $F_{\text{упр}}(P) = \mu P$. Коэффициент трения находится как тангенс угла наклона прямой данной зависимости. Абсолютная погрешность μ определяется с использованием МНК или простым графическим способом.

Задание 10 - 2. Преломление и пропускание.

Часть 1. Познакомимся с законом преломления.

1.1

Построение отраженного луча очевидно: он зеркально симметричен падающему лучу (луч В).

Для точного построения преломленного луча следует воспользоваться законом преломления, который в данном случае имеет вид

$$\sin \alpha_1 = n \sin \alpha_2 \quad (1)$$

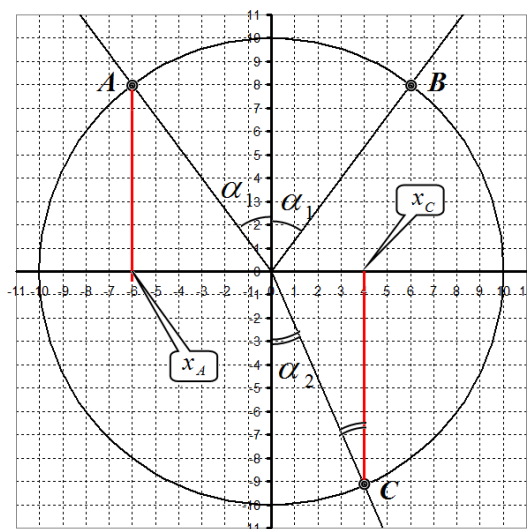
На рисунке построена окружность, поэтому можно рассмотреть точки пересечения лучей с этой окружностью. Тогда синусы углов падения, отражения, преломления можно выразить через координаты точек пересечения лучей с нарисованной окружностью:

$$\sin \alpha_1 = \frac{|x_A|}{R}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{|x_C|}{R}. \quad (2)$$

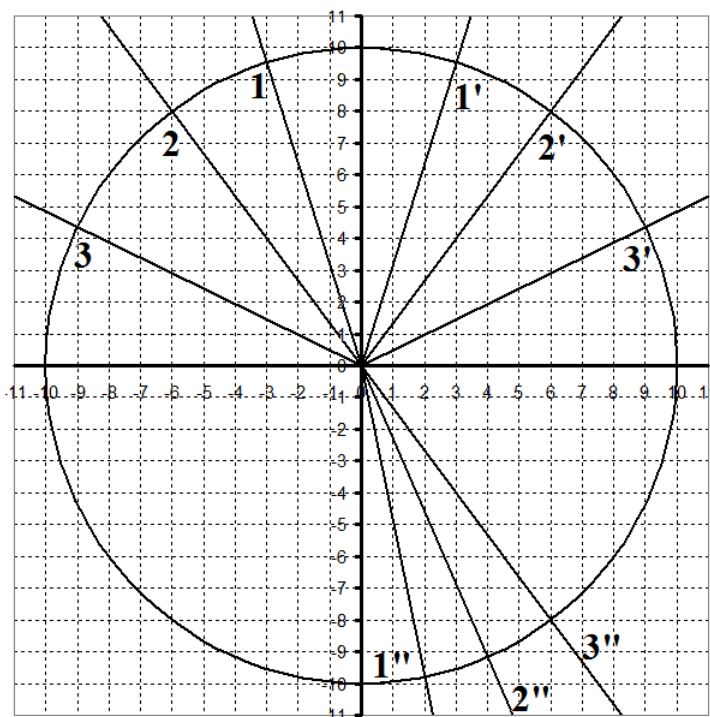
Из этих соотношений следует, что координату точки пересечения преломленного луча с окружностью (точка С) можно легко рассчитать по формуле

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{n} \sin \alpha_1 \Rightarrow x_C = -\frac{x_A}{n} = -\frac{2}{3} x_A. \quad (3)$$

Здесь учтено, что $n = 1,5 = \frac{3}{2}$. Заметим, что координаты x точек пересечения всех трех падающих лучей делятся на 3 нацело.



Результат построения показан на рисунке.



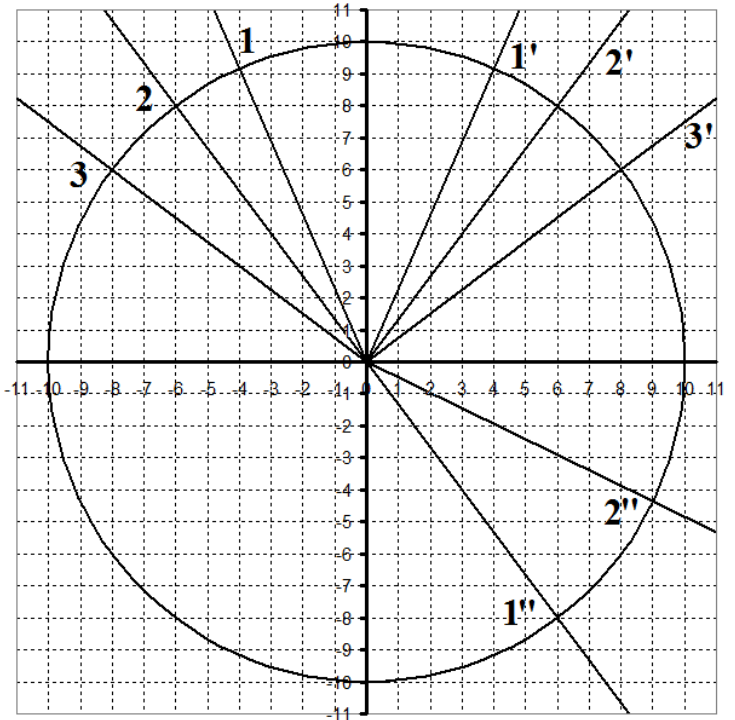
на

1.2

Расчеты и построения выполняются аналогично предыдущему пункту, только в данном случае закон преломления и следующее из него соотношение для координат x точек пересечения лучей с окружностью имеют вид

$$\sin \alpha_2 = n \sin \alpha_1 \Rightarrow x_C = -nx_A = -\frac{3}{2}x_A. \quad (4)$$

Заметим, что в этом случае координаты x точек пересечения падающих лучей делятся на 2. Кроме того, для луча 3 ($x_A = -8$) оказывается, что координата «пересечения» преломленного луча $x_C = -nx_A = -\frac{3}{2}x_A = 12$, что больше радиуса окружности. Это означает, что преломленный луч отсутствует: происходит полное внутренне отражение.



Результаты построения показаны на следующем рисунке.

1.3 При каком максимальном угле падения из стекла в воздух будет возникать преломленный луч?

Максимальному углу падения соответствует угол преломления равный $\alpha_2 = 90^\circ$, для которого $\sin \alpha_2 = 1$. Из закона преломления следует, что

$$\sin \alpha_{1\max} = \frac{1}{n} \Rightarrow \alpha_{1\max} = \arcsin \frac{2}{3} \approx 42^\circ \quad (5)$$

2.1 Определите, изменяется ли расстояние между пятнами l при изменении расстояния от ящика до листа бумаги.

2.2 Изобразите ход лучей через ящик и вне его, объясняющий возникновение 2 пятен на листе бумаги.

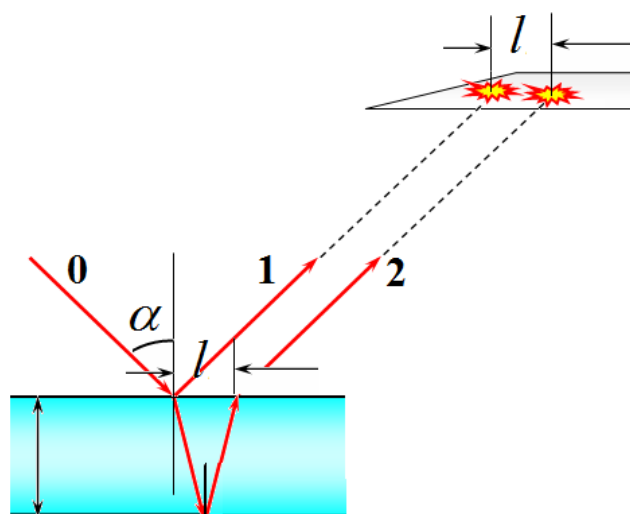
2.3 Получите формулу, описывающую зависимость расстояния между пятнами l от угла падения.

2.4 Измерьте расстояние между пятнами l при максимально возможном угле падения α (укажите как вы измеряли угол α).

2.5 Рассчитайте показатель преломления пластинки.

2.1 Эксперимент однозначно показывает, что расстояние между пятнами не зависит от расстояния до пластинки, из этого следует, что отраженные от пластинки лучи параллельны!

2.2 Два пятна возникают вследствие отражения от верхней и нижней поверхностей пластинки. Рисунок показывает ход лучей, объясняющий возникновение двух световых пятен на листочке бумаги.



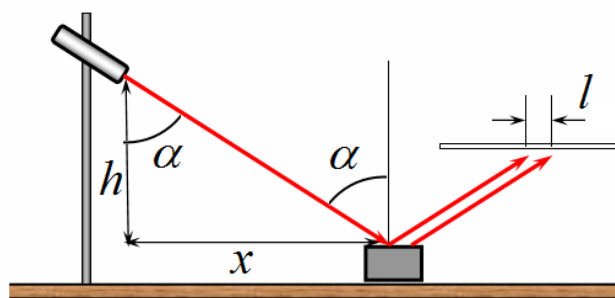
2.3 Простые геометрические построения показывают, что расстояние между лучами можно рассчитать по формуле

$$l = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad (6)$$

Для измерения угла падения α можно использовать простую схему, показанную на рисунке. Из рисунка следует, что тангенс угла падения подчиняется условию

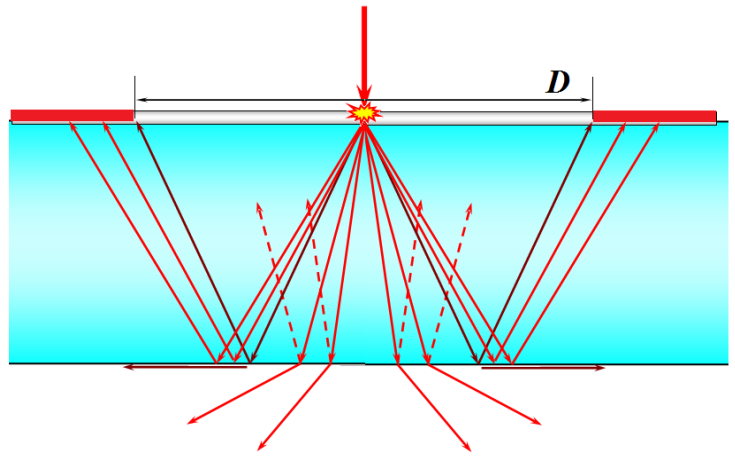
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{h}. \quad (7)$$

Измерение расстояния между пятнами проведено при $x = 430\text{мм}$ и дали результат $l_{12} = 10\text{мм}$. Расчеты, проведенные с использованием формул (6)-(7), приводят к следующему значению показателя преломления стекла $n = 1,5$. Такой же результат получается и для пластинки из оргстекла.



Часть 3. Темное пятно.

Основная причина возникновения темного кружка – полное внутреннее отражение на нижней грани пластинки. При падении луча на бумажку свет рассеивается во все стороны, поэтому внутри пластинки возникают лучи, идущие по всем направлениям. Если угол падения на эту грань меньше угла полного внутреннего отражения, то большая часть света выйдет из пластинки; при большем угле – весь свет отражается и формирует светлый ореол вокруг темного пятна.



Ход лучей показан на рисунке.

Предельный угол полного внутреннего отражения легко найти из закона преломления света (при условии, что преломленный в воздух луч идет параллельно границе раздела)

$$n \sin \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{n}. \quad (8)$$

Так же из рисунка хода лучей при полном внутреннем отражении следует, что радиус темного пятна определяется формулой

$$R = 2h \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Простые тригонометрические преобразования приводят к формуле, приведенной в условии задачи:

$$R = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (10)$$

Результаты измерений для двух пластинок:

$$D_1 = 21 \text{ мм}$$

$$D_2 = 14 \text{ мм}$$

Расчеты показателей преломления с помощью формулы (10) приводят к результату $n = 1,5$ для обеих пластинок.

Относительная погрешность измерения диаметра темного пятна в части 3 заметно меньше, чем погрешность измерения расстояния между пятнами, поэтому второй способ (по темному кружку) точнее!

Задание 11-1. Еще одна колебательная система!

1.1 Для расчета периодов колебаний сначала рассмотрим изогнутую спицу с прикрепленными грузами. Положение центра масс системы h_0 можно найти «по определению»

$$\begin{aligned} 2(m + m_0)h_0 &= 2m \frac{l}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + 2m_0 l \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= l \cos \frac{\alpha}{2} (m + 2m_0) \end{aligned} \quad (1)$$

При отклонении маятника на малый угол φ от вертикали изменение потенциальной энергии системы равно

$$\begin{aligned} \Delta U &= Mg\Delta h = 2(m + m_0)gh_0(1 - \cos \varphi) = \\ &= (m + 2m_0)l \cos \frac{\alpha}{2} g(1 - \cos \varphi) \approx (m + 2m_0)l \cos \frac{\alpha}{2} g \frac{\varphi^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

При выводе использована приближенная формула $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$.

Кинетическая энергия маятника при вращении с угловой скоростью $\omega = \varphi'$ равна

$$E_k = 2 \left(\frac{1}{6} ml^2 \omega^2 + \frac{m_0 l^2 \omega^2}{2} \right). \quad (3)$$

Запишем закон сохранения механической энергии при колебаниях маятника

$$2 \left(\frac{1}{6} ml^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 \right) \omega^2 + (m + 2m_0)l \cos \frac{\alpha}{2} g \frac{\varphi^2}{2} = E = const, \quad (4)$$

которое является уравнением гармонических колебаний. Круговая частота этих колебаний определяется отношением

$$\Omega^2 = \frac{(m + 2m_0)gl \cos \frac{\alpha}{2}}{4 \left(\frac{1}{6} ml^2 + \frac{1}{2} m_0 l^2 \right)} = \frac{3g \cos \frac{\alpha}{2}}{2l} \cdot \frac{1 + 2 \frac{m_0}{m}}{1 + 3 \frac{m_0}{m}}. \quad (5)$$

Соответственно, периоды колебаний описываются формулами:

Без грузов ($m_0 = 0$)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g} \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}}. \quad (6)$$

С грузами

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g} \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 + 3 \frac{m_0}{m}}{1 + 2 \frac{m_0}{m}}}. \quad (7)$$

2-3 Полученные теоретические формулы для периодов колебаний показывают, что зависимость $\frac{1}{T^2}$ от $\cos \frac{\alpha}{2}$ является линейной.

Результаты измерений периодов колебаний и необходимые расчеты приведены в Таблицах 1 и 2. В каждом случае измерение периодов проведено 3 раза и проведено усреднение результатов.

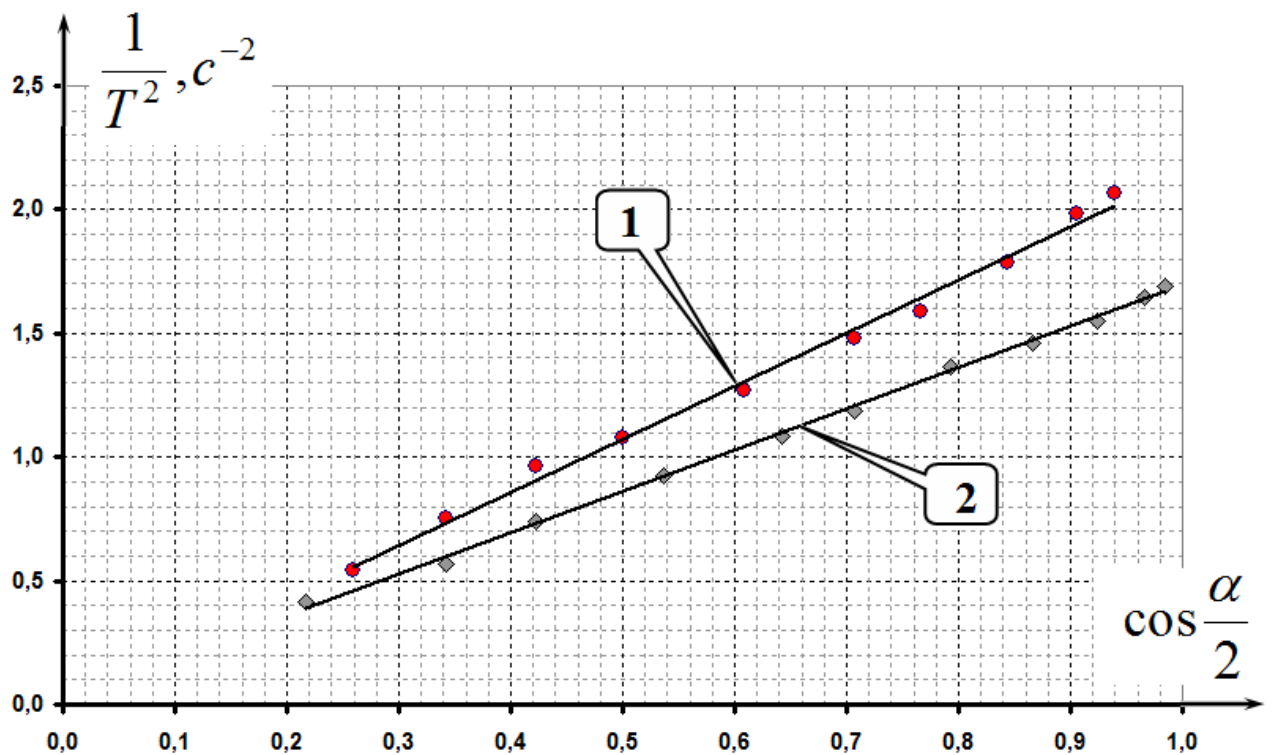
Таблица 1. Спица без грузов

α°	$T_{1,1}, \text{с}$	$T_{1,2}, \text{с}$	$T_{1,3}, \text{с}$	$\langle T_1 \rangle, \text{с}$		$\frac{1}{\langle T_1 \rangle^2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$
40	0,696	0,692	0,699	0,696		2,07	0,9397
50	0,710	0,707	0,712	0,710		1,99	0,9063
65	0,741	0,753	0,752	0,749		1,78	0,8434
80	0,794	0,789	0,796	0,793		1,59	0,7660
90	0,819	0,826	0,820	0,822		1,48	0,7071
105	0,886	0,890	0,884	0,887		1,27	0,6088
120	0,962	0,977	0,949	0,963		1,08	0,5000
130	1,024	1,018	1,020	1,021		0,96	0,4226
140	1,161	1,150	1,154	1,155		0,75	0,3420
150	1,381	1,343	1,348	1,357		0,54	0,2588

Таблица 2. Спица с грузами

α°	$T_{1,1}, \text{с}$	$T_{1,2}, \text{с}$	$T_{1,3}, \text{с}$	$\langle T_1 \rangle, \text{с}$		$\frac{1}{\langle T_1 \rangle^2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$
20	0,771	0,768	0,770	0,770		1,69	0,9848
30	0,783	0,778	0,777	0,779		1,65	0,9659
45	0,810	0,796	0,804	0,803		1,55	0,9239
60	0,832	0,827	0,821	0,827		1,46	0,8660
75	0,853	0,868	0,848	0,856		1,36	0,7934
90	0,913	0,918	0,920	0,917		1,19	0,7071
100	0,954	0,958	0,966	0,959		1,09	0,6428
115	1,040	1,038	1,045	1,041		0,92	0,5373
130	1,167	1,159	1,161	1,162		0,74	0,4226
140	1,325	1,337	1,321	1,328		0,57	0,3420
155	1,558	1,520	1,573	1,550		0,42	0,2164

На рисунке показаны графики линеаризованных зависимостей $\frac{1}{T^2}$ от $\cos \frac{\alpha}{2}$ (1 - без грузов, 2 - с грузами).



Обе полученные зависимости являются линейными, что подтверждает теоретически полученный вид зависимостей (6) и (7).

Из этих же формул следует, что отношение коэффициентов наклона графиков равно

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{1 + 3 \frac{m_0}{m}}{1 + 2 \frac{m_0}{m}}. \quad (8)$$

Значение этих коэффициентов, рассчитанные по методу наименьших квадратов, равны:

$$K_1 = 2,15 c^{-2} \quad (9)$$

$$K_2 = 1,67 c^{-2}.$$

Поэтому их отношение $\gamma = 1,29$. Теперь используя формулу (8), можно найти требуемое отношение масс:

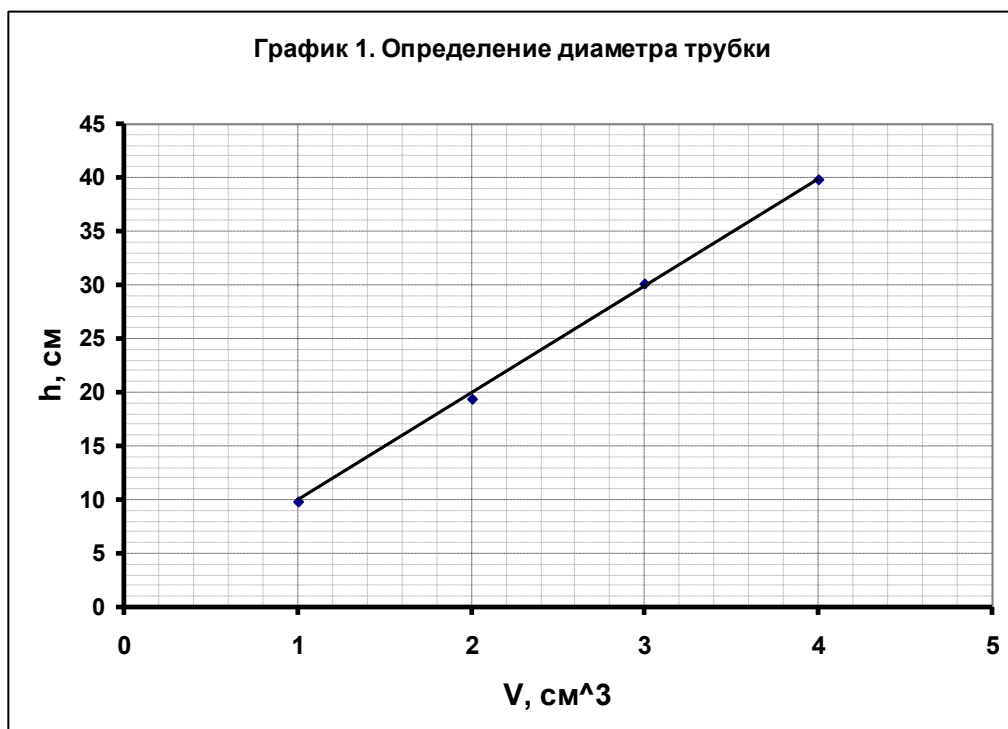
$$\gamma = \frac{1 + 3 \frac{m_0}{m}}{1 + 2 \frac{m_0}{m}} \Rightarrow \frac{m_0}{m} = \frac{\gamma - 1}{3 - 2\gamma} = 0,68. \quad (10)$$

Задание 11- 2. Размер капли.

1. Результаты измерений зависимости высоты столбика воды в трубке от объема залитой воды приведены в Таблице 1 и на графике 1.

Таблица 1.

$V, \text{см}^3$	$h, \text{см}$
1	9,8
2	19,4
3	30,2
4	39,8



Полученная зависимость является линейной. Коэффициент наклона графика, рассчитанный по МНК равен

$$K = \frac{\Delta h}{\Delta V} = 10 \text{см}^{-2}. \quad (1)$$

Очевидно, что теоретическая зависимость высоты столбика от объема имеет вид

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta V} = \frac{4}{\pi d^2} \quad (2)$$

Из этих соотношений следует, что внутренний диаметр равен

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi K}} = 0,36 \text{см}. \quad (3)$$

Для дальнейших расчетов нам понадобится величина равная, объему жидкости, приходящаяся на единицу длины трубки, $v = \frac{\Delta V}{\Delta h} = 0,10 \text{см}^2$.

Для определения объема капли проще всего (теоретически) измерить зависимость высоты столба жидкости в трубке от числа упавших капель. Однако этот метод обладает одним существенным недостатком – на практике на не осуществим! Капли падают достаточно часто, поэтому одновременно засекают высоту столба воды и подсчитывают число капель не возможно. Поэтому в данном задании и рекомендован такой «обходной маневр».

2-3 Результаты измерений зависимости высоты столба уровня воды в трубке h и числа упавших капель N от времени приведены в таблице 2. Ни же приведены графики полученных зависимостей.

Таблица 2.

$h, \text{см}$	$t, \text{с}$	$\frac{h}{h_{\max}}$	N	$t, \text{с}$	$\frac{N}{N_{\max}}$
40	0,00	1,00	0	0,00	0,00
38	6,24	0,95	20	8,34	0,10
36	12,32	0,90	40	16,49	0,20
34	19,19	0,85	60	25,06	0,30
32	26,33	0,80	80	33,67	0,40
30	33,57	0,75	100	42,93	0,50
28	41,58	0,70	120	52,60	0,60
26	50,48	0,65	140	62,11	0,70
24	60,93	0,60	160	71,72	0,80
22	73,70	0,55	180	83,15	0,90
20	85,93	0,50	200	94,58	1,00

График 2. Зависимость высоты столба от времени

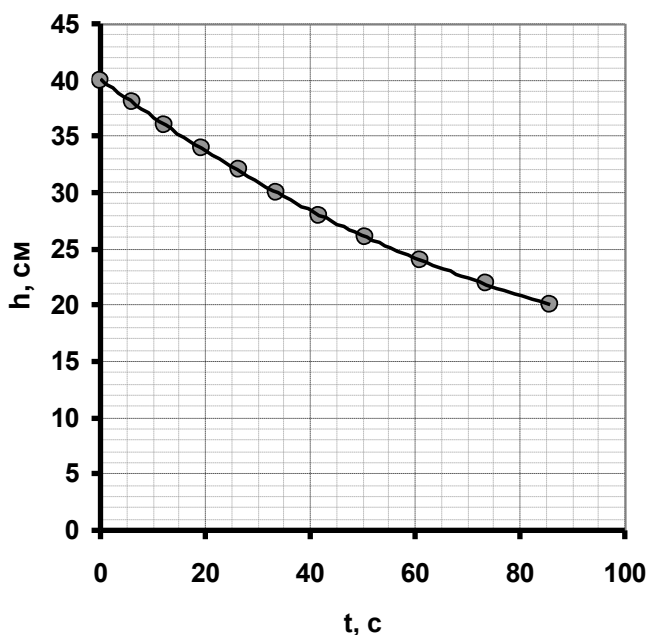
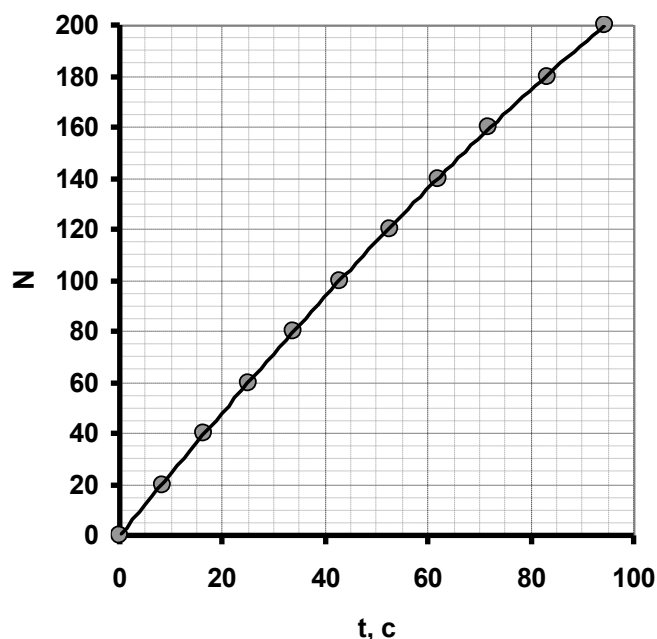


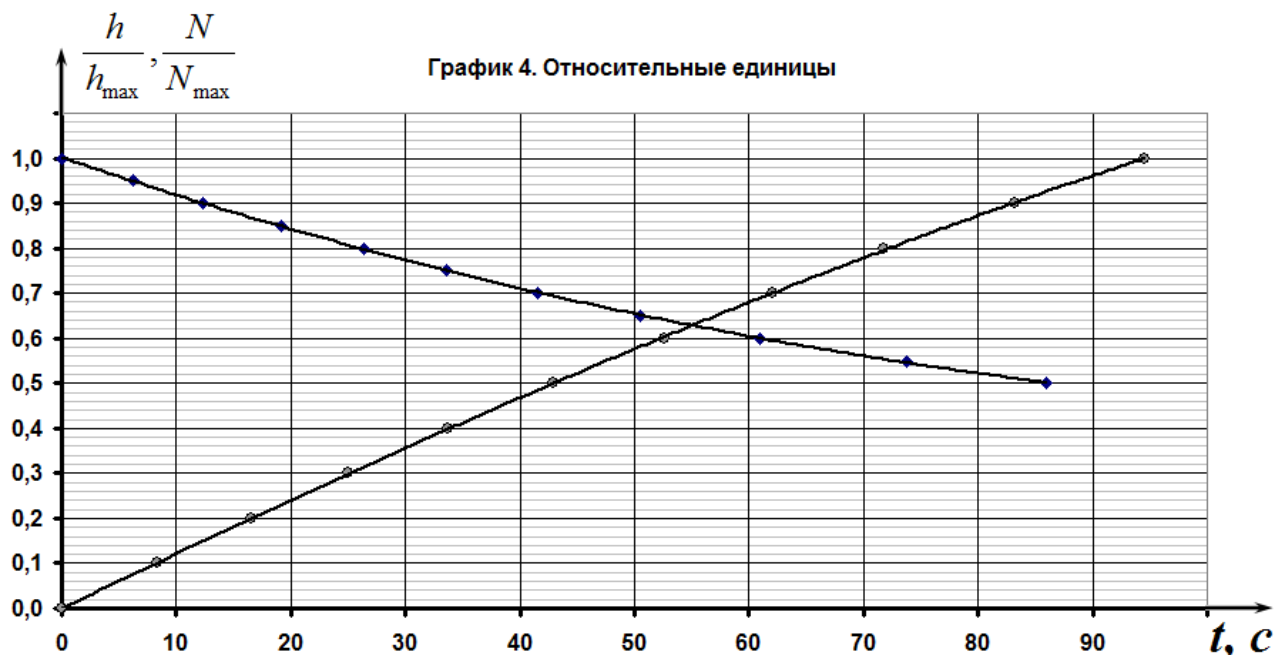
График 3. Зависимость числа капель от времени



Обе полученные зависимости являются нелинейными, что объясняется зависимостью скорости вытекания от давления, создаваемого столбом воды в трубке.

Для построения зависимости высоты столба воды в трубке от числа упавших капель необходимо снять значения высоты h и числа капель N в один и тот же момент времени. Но в таблице времена, в которые фиксировались значения h и N не совпадают. Поэтому полученные зависимости необходимо «сгладить», что можно сделать различными

способами. Мы используем следующий метод: построим графики 2 и 3 в относительных единицах (как отношения $\frac{h}{h_{max}}$ и $\frac{N}{N_{max}}$) на одном бланке и в одном масштабе (График 5)



Теперь с помощью этого графика можно снять значения в фиксированные моменты времени. Эти значения приведены в Таблице 3.

Таблица 3.

t, c	$\frac{h}{h_{max}}$	$\frac{N}{N_{max}}$	h, см	N
10	0,92	0,11	36,8	22
20	0,84	0,24	33,6	48
30	0,77	0,34	30,8	68
40	0,71	0,47	28,4	94
50	0,65	0,58	26,0	116
60	0,61	0,68	24,4	136
70	0,56	0,78	22,4	156
80	0,52	0,87	20,8	174

Получена практически линейная зависимость. Это означает что изменение высоты уровня воды в трубке при выпадении определенного числа капель постоянно. То есть объемы всех капель можно считать приблизительно одинаковыми.

Коэффициент наклона графика равен высоте столба воды в трубке, соответствующей объему одной капли.

Численное значение этого коэффициента, рассчитанное по МНК, равно

$$h_1 = (0,104 \pm 0,006) \text{ см}.$$

Используя результат п.1, находим, что объем одной капли равен $V_1 = (10,4 \pm 0,6) \text{ мм}^3$. Отметим, что основной вклад в погрешность определения объема капли вносит погрешность определения коэффициента наклона графика 5.

