

Задача 9-1. Разгон

Часть 1. Прimitивное решение.

Решение этой части задачи также примитивно. Закон равноускоренного движения при нулевой начальной скорости имеет вид

$$x = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Полагая $x = S$, найдем промежуток времени Δt , которое требуется для достижения нужной точки:

$$S = \frac{a(\Delta t)^2}{2} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2}{a} \cdot \frac{a\tau^2}{2}} = \tau. \quad (2)$$

Чтобы найти момент времени, когда автомобиль окажется в нужной точке, к найденному интервалу времени следует прибавить время ожидания τ :

$$t_1 = \tau + \tau = 2\tau. \quad (3)$$

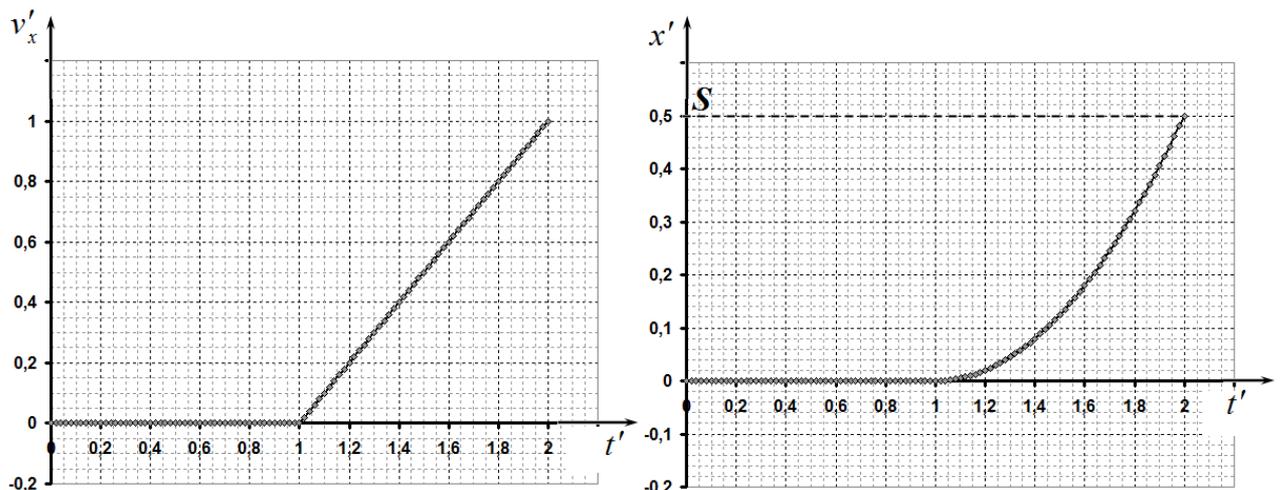
Для построения графиков следует записать законы изменения скорости и координаты от времени:

$$\text{при } t < \tau \begin{cases} v_x = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \text{при } t > \tau \begin{cases} v_x = a(t - \tau) \\ x = \frac{a(t - \tau)^2}{2} \end{cases} \quad (4)$$

При переходе к указанным относительным единицам данные выражения существенно упрощаются:

$$\text{при } t' < 1 \begin{cases} v'_x = 0 \\ x' = 0 \end{cases}, \quad \text{при } t' > 1 \begin{cases} v'_x = t' - 1 \\ x' = \frac{(t' - 1)^2}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Графики этих функций показаны на рисунке. Отметим, что расстояние до конечной точки в данной системе единиц равно $S' = 1/2$.

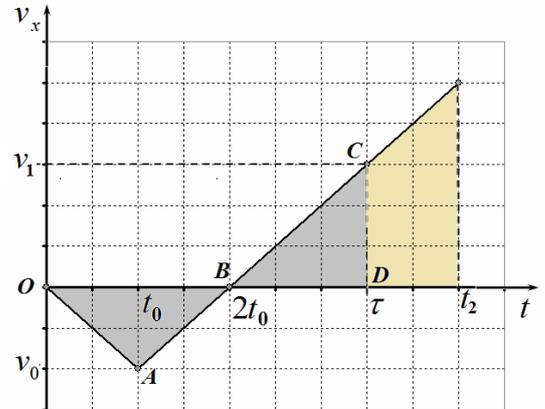


Часть 2. Умный лихач без тормозов.

Необходимой точки можно достичь быстрее! Для этого необходимо, чтобы к моменту открытия светофора автомобиль имел некоторую скорость, причем по возможности максимальную. То есть автомобилист может отъехать назад (в условии оговорено, что дорога пустая), а затем начать разгон с некоторой точки позади светофора.

Схематически такая «стратегия» показана на рисунке графика зависимости проекции скорости автомобиля от времени.

Итак: к моменту открытия светофора скорость автомобиля должна быть максимальна, следовательно, автомобиль должен отъехать как можно дальше, следовательно, он должен начать движение сразу! Кроме того, к моменту открытия светофора он должен находиться непосредственно перед светофором. На рисунке: в течение некоторого промежутка времени t_0 автомобиль движется назад с возрастающей по модулю скоростью (включена задняя скорость), после этого водитель включает переднюю скорость и начинает двигаться с положительным ускорением. Понятно, что к моменту времени $2t_0$ скорость автомобиля станет равным нулю (до этого момента он движется в обратном направлении с уменьшающейся по модулю скоростью). Наконец в течение интервала времени от $2t_0$ до τ автомобиль разгоняется. Для определения времени t_0 необходимо учесть, что к моменту времени τ координата автомобиля должна равняться нулю (т.е. он находится перед светофором). Из этого условия следует, что площади треугольников OAB (которая численно равна расстоянию на которое автомобиль отъедет от светофора) и BCD должны быть равны! К моменту времени t_0 модуль скорости автомобиля равен $v_0 = at_0$, а к моменту времени τ скорость станет равной $v_1 = a(\tau - 2t_0)$.



Следовательно, условия равенства площадей треугольников имеет вид

$$2t_0 \frac{at_0}{2} = \frac{a(\tau - 2t_0)^2}{2} \quad (6)$$

Решая это уравнение, находим момент времени переключения скорости t_0

$$2 \cdot \frac{at_0^2}{2} = \frac{a(\tau - 2t_0)^2}{2} \Rightarrow 2t_0^2 = (\tau - 2t_0)^2 \Rightarrow \quad (7)$$

$$(\tau - 2t_0) = \pm\sqrt{2}t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\tau}{2 \pm \sqrt{2}}$$

Корень со знаком « - » больше τ , поэтому его следует отбросить. Таким образом, момент времени переключения скорости определяется формулой

$$t_0 = \frac{\tau}{2 + \sqrt{2}} \approx 0,29\tau. \quad (8)$$

Для определения момента времени достижения Нужной точки запишем уравнение равноускоренного движения с нулевой начальной скоростью, начиная с момента времени $2t_0$:

$$x = \frac{a(t - 2t_0)^2}{2} \quad (9)$$

Полагая $x = S = \frac{a\tau^2}{2}$, находим искомое время:

$$\frac{a\tau^2}{2} = \frac{a(t_2 - 2t_0)^2}{2} \Rightarrow t_2 = \tau + 2t_0 = \tau + \frac{2\tau}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}\tau \quad (9)$$

Численное значение этого времени $t_2 \approx 2,59\tau$.

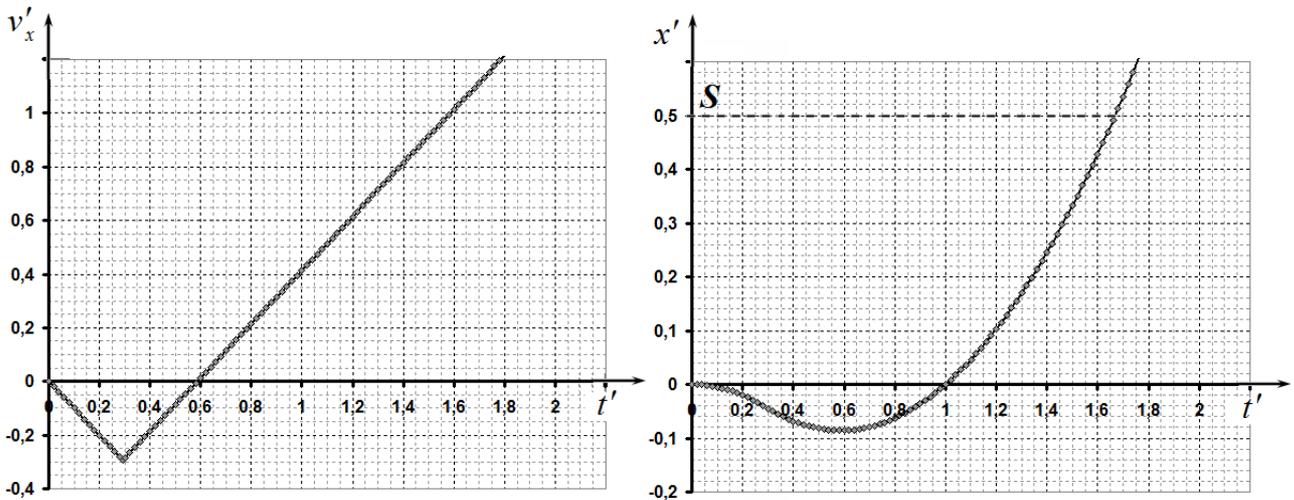
Законы движения в данном случае выражаются функциями

$$\text{при } t < t_0 \quad \begin{cases} v_x = -at \\ x = -\frac{at^2}{2} \end{cases}, \quad \text{при } t > t_0 \quad \begin{cases} v_x = -at_0 + a(t - t_0) = a(t - 2t_0) \\ x = -\frac{at_0^2}{2} + \frac{a(t - t_0)^2}{2} = \frac{at(t - 2t_0)}{2} \end{cases} \quad (10)$$

В приведенных единицах:

$$\text{при } t' < t'_0 \quad \begin{cases} v'_x = -t' \\ x = -\frac{(t')^2}{2} \end{cases}, \quad \text{при } t' > t'_0 \quad \begin{cases} v'_x = (t' - 2t'_0) \\ x' = \frac{t'(t' - 2t'_0)}{2} \end{cases} \quad (11)$$

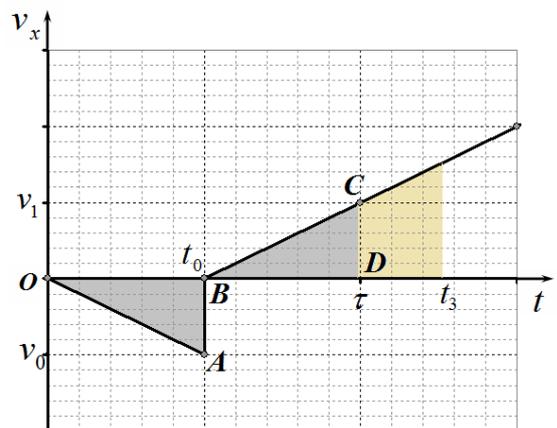
Графики этих функций показаны на рисунке



Часть 3. Умный лихач с тормозами.

В этом случае основная идея более быстрого достижения цели остается прежней – предварительно необходимо отъехать назад. Однако, при исправных тормозах можно отъехать подальше и, следовательно, разогнаться при подъезде к светофору до большей скорости. Сейчас «стратегия» движения изображается следующим графиком зависимости скорости от времени. В течение некоторого промежутка времени t_0 автомобиль отъезжает назад с максимальным ускорением, затем резко тормозит и начинает разгон. Так как к открытию светофора автомобиль должен находиться непосредственно перед ним, время движения назад должно быть равно времени приближения к светофору (площади треугольников OAB и BCD равны).

Следовательно, $t_0 = \frac{\tau}{2}$. Теперь легко записать закон движения:



$$\text{при } t < \frac{\tau}{2} \begin{cases} v_x = -at \\ x = -\frac{at^2}{2} \end{cases}, \quad \text{при } t > \frac{\tau}{2} \begin{cases} v_x = a\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \\ x = \frac{a\left(t - \frac{\tau}{2}\right)^2}{2} \end{cases} \quad (10)$$

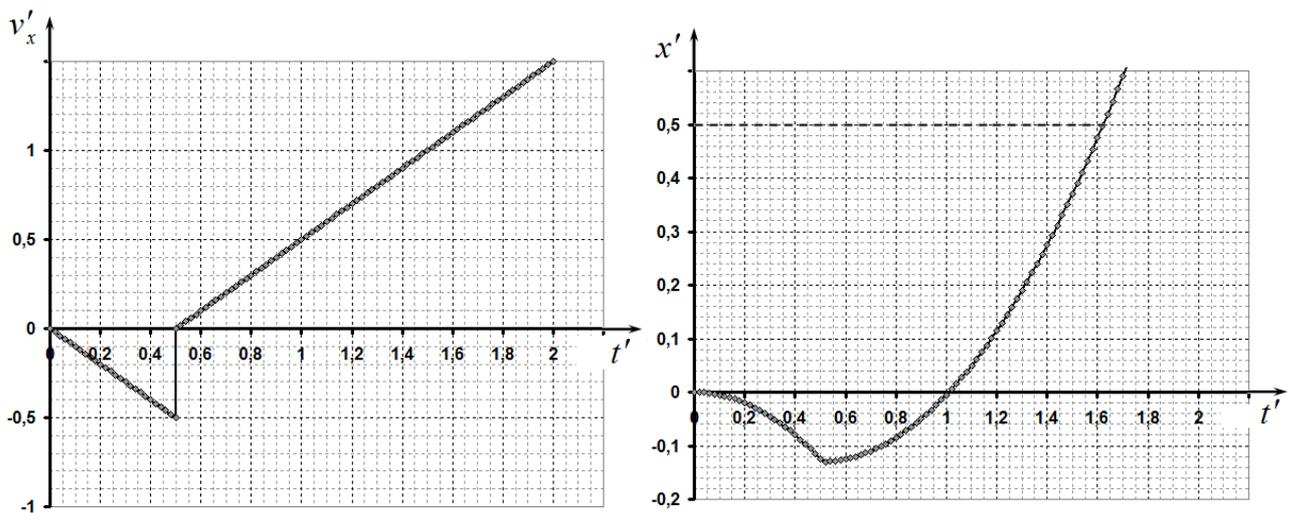
Время прибытия в конечный пункт находится из уравнения

$$S = \frac{a\left(t_3 - \frac{\tau}{2}\right)^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} \Rightarrow t_3 = \frac{3}{2}\tau \quad (11)$$

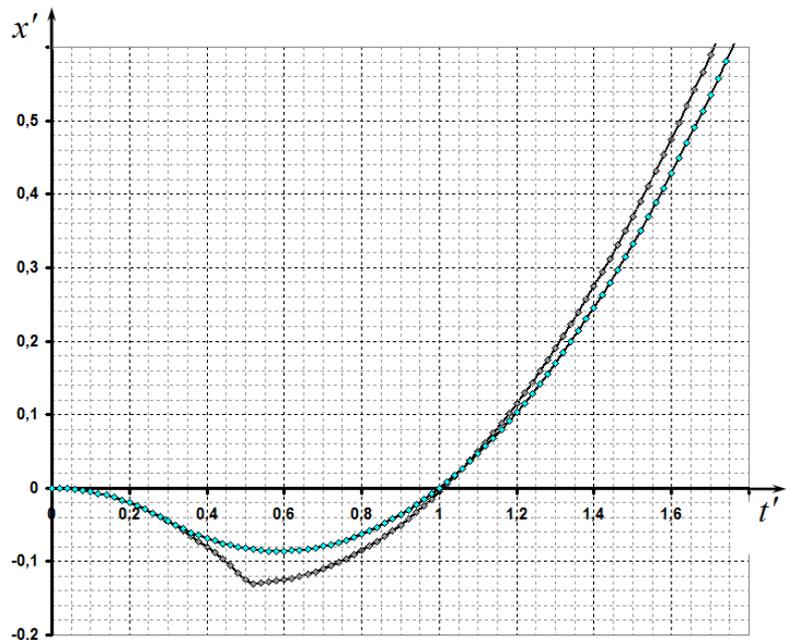
Законы изменения скорости и координаты в приведенных единицах имеет вид

$$\text{при } t' < \frac{1}{2} \begin{cases} v'_x = -t' \\ x' = -\frac{(t')^2}{2} \end{cases}, \quad \text{при } t' > \frac{1}{2} \begin{cases} v'_x = \left(t' - \frac{1}{2}\right) \\ x' = \frac{\left(t' - \frac{1}{2}\right)^2}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Графики этих функций показаны на рисунке



Для сравнения на рисунке в одном масштабе показаны графики законов движения в двух случаях (без тормозов и с тормозами) .



Задача 9-2. Сжимаемая жидкость

1.1 Как следует из формулы

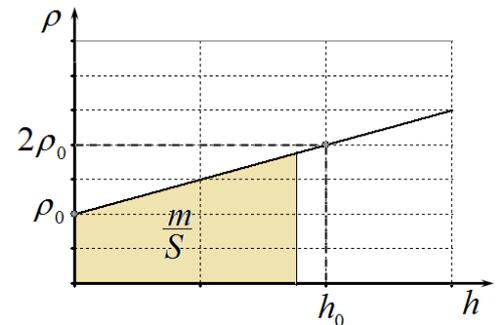
$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{h}{h_0} \right), \quad (1)$$

Величина h_0 имеет размерность длины. На глубине $h = h_0$ плотность жидкости удваивается, т.е. $\rho(h) = 2\rho_0$.

1.2 Зависимости плотности жидкости от глубины линейна, поэтому ее график – прямая линия, показанная на рисунке.

Площадь под графиком имеет смысл массы жидкости находящейся над площадкой единичной площади. Действительно, для слоя малой толщины

$$\Delta S = \rho \Delta h = \frac{\rho S \Delta h}{S} = \frac{\Delta m}{S}. \quad (2)$$

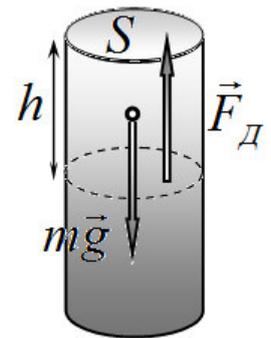


1.3 Рассмотрим цилиндрический столб жидкости высотой h , верхняя грань которого находится на поверхности. Так как этот столб находится в равновесии, то сила тяжести, действующая на этот столб, уравнивается силой давления со стороны нижележащего слоя жидкости:

$$mg = PS. \quad (3)$$

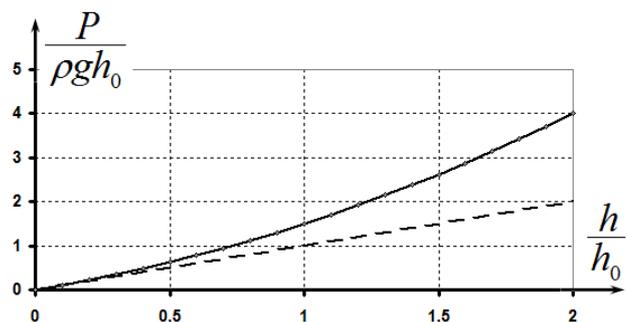
Здесь m - масса выделенного столба, которая может быть найдена как площадь под графиком зависимости $\rho(h)$. Следовательно,

$$P(h) = \frac{m}{S} g = \frac{\rho_0 + \rho_0 \left(1 + \frac{h}{h_0} \right)}{2} hg = \rho_0 gh \left(1 + \frac{h}{2h_0} \right) \quad (4)$$



Как следует из полученного выражения – давление возрастает по квадратичному закону.

Для иллюстрации (от учащихся данный график не требуется) на рисунке показан график этой зависимости. Пунктиром показана аналогичная зависимость для жидкости постоянной плотности.



1.4 В положении равновесия сила тяжести, действующая на цилиндр, уравновешивается разность сил давления на нижнее и верхнее основания цилиндра:

$$mg = F_{Д2} - F_{Д1} = \left(P\left(h + \frac{l}{2}\right) - P\left(h - \frac{l}{2}\right) \right) S. \quad (5)$$

Подставляя выражения для массы цилиндра и давлений на разных глубинах, получим уравнение для определения искомой глубины:

$$\frac{3}{2} \rho_0 S l g = \rho_0 g S \left(\left(h + l/2 \right) \left(1 + \frac{h + l/2}{2h_0} \right) - \left(h - l/2 \right) \left(1 + \frac{h - l/2}{2h_0} \right) \right) \quad (4)$$

Решение этого уравнения не представляет проблем:

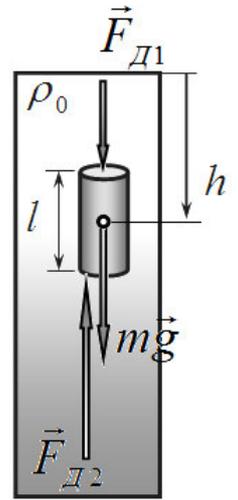
$$\frac{3}{2} \rho_0 S l g = \rho_0 g S \left(\left(h + l/2 \right) \left(1 + \frac{h + l/2}{2h_0} \right) - \left(h - l/2 \right) \left(1 + \frac{h - l/2}{2h_0} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} l = \left(h + l/2 \right) - \left(h - l/2 \right) + \frac{\left(h + l/2 \right)^2 - \left(h - l/2 \right)^2}{2h_0} \Rightarrow \quad (5)$$

$$\frac{3}{2} l = l + \frac{2hl}{2h_0} \Rightarrow h = \frac{h_0}{2}$$

Не сложно показать, что это положение равновесия является устойчивым, поэтому цилиндр действительно остановится на этой глубине.

Отметим, что на этой глубине плотность жидкости (см. формулу (1)) равна плотности материала цилиндра. Эта идея также может послужить основной идеей решения данной задачи.



1.5 Для описанного тела условие его равновесия имеет вид (см. рис.)

$$mg = F_{Д2} - F_{Д0} - F_{Д1}. \quad (6)$$

Воспользуемся формулой для давления на разных глубинах, а также формулой для массы тела, в результате получим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \rho_0 g (\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) = \\ = (4\pi R^2 \cdot P(h+l) - 3\pi R^2 \cdot P(h) - \pi R^2 \cdot P(h-l)) \end{aligned} \quad (6)$$

Решение это уравнение не сложно, но достаточно громоздко:

$$\frac{3}{2} \rho_0 g (\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) = (4\pi R^2 \cdot P(h+l) - 3\pi R^2 \cdot P(h) - \pi R^2 \cdot P(h-l)) \Rightarrow$$

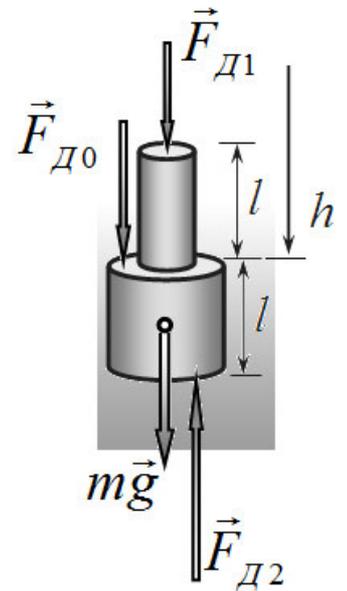
$$\frac{15}{2} \rho_0 g l = 4P(h+l) - 3P(h) - P(h-l) \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2} \rho_0 g l = \rho_0 g \left(4\left(h + l \right) \left(1 + \frac{h + l}{2h_0} \right) - 3h \left(1 + \frac{h}{2h_0} \right) - \left(h - l \right) \left(1 + \frac{h - l}{2h_0} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2} l = 4\left(h + l \right) - 3h - \left(h - l \right) + \frac{4\left(h + l \right)^2 - 3h^2 - \left(h - l \right)^2}{2h_0} \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2} l = 5l + \frac{8hl + 4l^2 + 2hl - l^2}{2h_0} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} l = \frac{10hl + 3l^2}{2h_0} \Rightarrow h = \frac{5h_0 - 3l}{10} = \frac{h_0}{2} - \frac{3}{10} l$$



1.6 Последняя часть этой задачи решается аналогично.

Условие равновесия:

$$mg = F_{Д2} + F_{Д0} - F_{Д1}. \quad (7)$$

Уравнение для определения глубины:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \rho_0 g (\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) = \\ = (\pi R^2 \cdot P(h+l) + 3\pi R^2 \cdot P(h) - 4\pi R^2 \cdot P(h-l)) \end{aligned} \quad (8)$$

Его решение:

$$\frac{3}{2} \rho_0 g (\pi R^2 l + 4\pi R^2 l) = (\pi R^2 \cdot P(h+l) + 3\pi R^2 \cdot P(h) - 4\pi R^2 \cdot P(h-l))$$

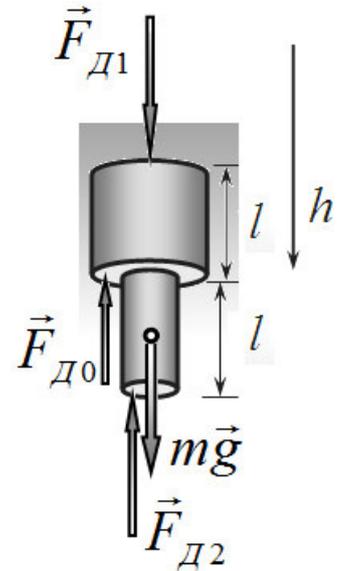
$$\frac{15}{2} \rho_0 g l = P(h+l) + 3P(h) - 4P(h-l) \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2} \rho_0 g l = \rho_0 g \left((h+l) \left(1 + \frac{h+l}{2h_0} \right) + 3h \left(1 + \frac{h}{2h_0} \right) - 4(h-l) \left(1 + \frac{h-l}{2h_0} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2} l = (h+l) + 3h - 4(h-l) + \frac{(h+l)^2 + 3h^2 - 4(h-l)^2}{2h_0} \Rightarrow$$

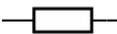
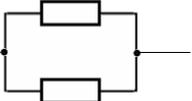
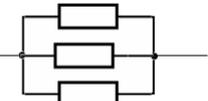
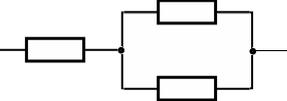
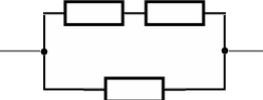
$$\frac{15}{2} l = 5l + \frac{2hl + l^2 + 8hl - 4l^2}{2h_0} \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} l = \frac{10hl - 3l^2}{2h_0} \Rightarrow h = \frac{5h_0 + 3l}{10} = \frac{h_0}{2} + \frac{3}{10} l$$



Задача 9-3. Изучение закона Ома

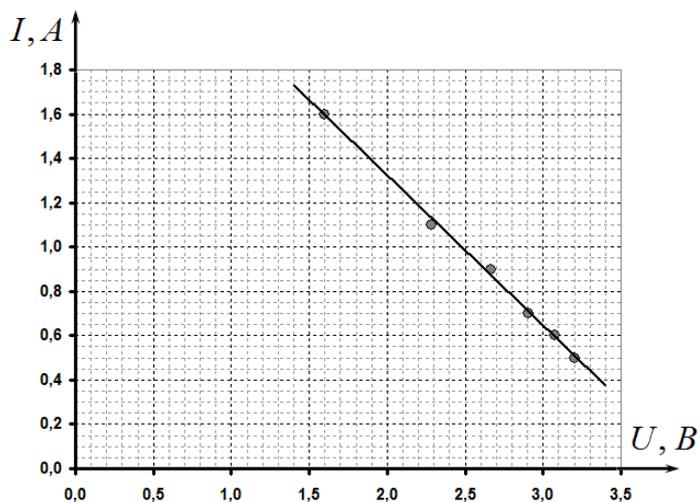
1. Действительно, можно собрать 17 различных комбинаций из 3 различных резисторов – они указаны в таблице

№	Схема соединения	Описание	Число комбинаций
1		Один резистор	3
2		Два резистора последовательно	3
3		Три резистора последовательно	1
4		Два резистора параллельно	3
5		Три резистора параллельно	3
6		Два резистора параллельно, один последовательно	3
7		Два резистора последовательно, один параллельно	3
ВСЕГО			17

2. При заданном наборе резисторов сопротивление резисторов $R_1 = 1,0 \text{ Ом}$, $R_2 = 2,0 \text{ Ом}$, соединенных последовательно, равно сопротивлению третьего резистора $R_3 = 3,0 \text{ Ом}$, поэтому число комбинаций с различными сопротивлениями равно 16.

3. График полученной зависимости показан на рисунке 1.

4. Ошибка Федора в том, что сила тока пропорциональна напряжению при постоянном сопротивлении! А в данном случае сопротивление изменяется.

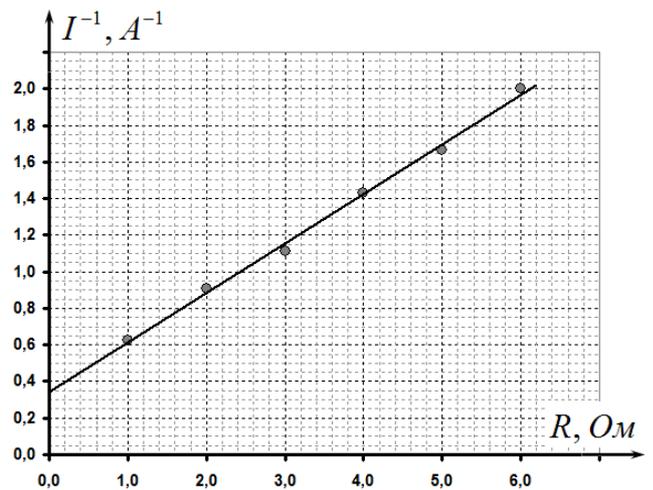


5. График зависимости I^{-1} от сопротивления показан на рисунке 2.

6. Однако этот график не подтверждает закон Ома! Так как по закону Ома данная зависимость должна иметь вид

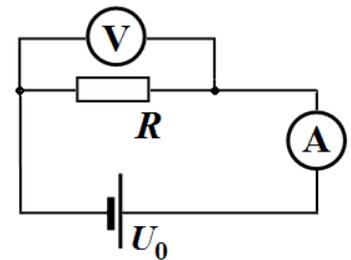
$$\frac{1}{I} = \frac{1}{U} R, \quad (1)$$

При постоянном напряжении между данными величинами должна существовать прямо пропорциональная зависимость – прямая должна проходить через начало координат, чего не наблюдается по измерениям Федора.

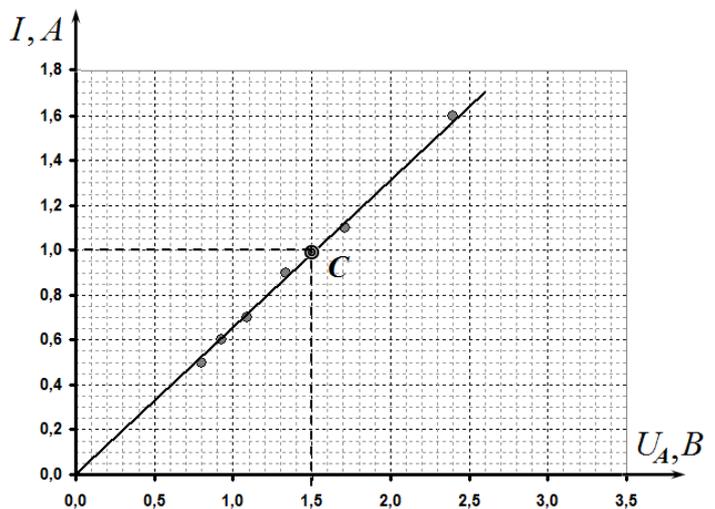


7. Полученные результаты однозначно указывают, что амперметр (старенький) обладает заметным сопротивлением.

8. В первом эксперименте, проведенном по схеме рис. 3, неизменным остается сопротивление амперметра (!). Поэтому имеет смысл построить зависимость силы тока через амперметр от напряжения на нем. Напряжение на амперметре $U_A = U_0 - U$ равно разности между напряжением источника $U_0 = 4,000V$ (которое действительно постоянно, что показывают результаты второй серии экспериментов) и измеренным напряжением на резисторе. Расчет этих величин приведен в таблице, а соответствующий график показан на рис. 4.



$R, \text{ Ом}$	$U, \text{ В}$	$I, \text{ А}$	$U_A, \text{ В}$
1,0	1,600	1,6	2,400
2,0	2,286	1,1	1,714
3,0	2,667	0,9	1,333
4,0	2,909	0,7	1,091
5,0	3,077	0,6	0,923
6,0	3,200	0,5	0,800



9. Сопротивление амперметра точнее всего можно найти по графику рис. 4. Следует выбрать некоторую точку на сглаживающей прямой (на рисунке она обозначена, как C) и ее координатам определить

$$R_A = \frac{U}{I} \approx 1,5 \text{ Ом}. \quad (2)$$

10. Теперь не сложно записать формулы, описывающие построенные графики:

Рис. 1:
$$I(U) = \frac{U_0 - U}{R_A}; \quad (3)$$

Рис. 2
$$\frac{1}{I}(R) = \frac{R + R_A}{U_0}; \quad (4)$$

Рис. 4
$$I(U_A) = \frac{U_A}{R_A}. \quad (5)$$

Задача 10-1 Вниз по ступенькам

Часть А. Абсолютное скольжение

1. Две ступеньки

A1.1. При движении шайбы горизонтальная составляющая ее скорости остается неизменной. Тогда $v_{кр}$ определяется из условия, чтобы шайба равномерно пролетела по горизонтали длину ступеньки в то время, как равноускорено упадет на ее высоту. Тогда:

$$\frac{l}{v_{кр}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ откуда:}$$

$$v_{кр} = l \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

A1.2. Так как горизонтальная составляющая скорости шайбы остается постоянной в ходе движения и расстояние до точки Φ в обоих случаях ($v_{кр+}$ и $v_{кр-}$) одно и то же, то, считая $v_{кр+}$ и $v_{кр-}$ приблизительно равными, время достижения цели будет одинаковым. Иначе говоря, время движения до точки Φ при примерно постоянной начальной скорости не зависит от того, было ли промежуточное соударение со ступенькой.

A1.3. В силу сохранения горизонтальной составляющей скорости шайбы кинетическая энергия шайбы в начале движения и в точке Φ в обоих случаях совпадают. Таким образом, «теряется» лишь потенциальная энергия шайбы в поле тяжести, изменение которой в обоих случаях равно $U = 2mgh$, где m – масса шайбы. Потери механической энергии в случаях $v_{кр+}$ или $v_{кр-}$ одинаковы.

2. Бесконечная лестница.

A2.1. Так как в бесконечной лестнице движение на каждой следующей ступеньке будет повторять движение на предыдущей, достаточно рассмотреть лишь один пролет. Одну ступеньку шайба пролетит за время $t_1 = \frac{l}{v_{кр-}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. При этом по наклонной плоскости шайба преодолет расстояние, равное диагонали одной ступеньки $s_1 = \sqrt{l^2 + h^2}$. Тогда скорость кажущегося движения равна:

$$v_{\text{кавл}} = \frac{s_1}{t_1} = \sqrt{\frac{g(l^2 + h^2)}{2h}}$$

Часть В. Трение скольжения

B1.1 Во время соударения на шайбу действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$ – вертикально вниз, сила реакции со стороны поверхности \vec{N} – вертикально вверх и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ – горизонтально против направления движения. Вертикальная составляющая скорости перед соударением равна $v_y = \sqrt{2gh}$, после неупругого соударения – нулю. Тогда 2-й закон Ньютона в импульсной форме в проекции на ось, направленную вертикально вверх, выглядит следующим образом:

$$0 - (-mv_y) = (N_{\text{ср}} - mg)\Delta t$$

где $N_{\text{ср}}$ – средняя сила реакции за Δt – время соударения. Так как время соударения очень мало, то для того, чтобы произведение в правой части равнялось mv_y , необходимо чтобы сила реакции $N_{\text{ср}}$ была достаточно велика (на силу тяжести такое требование наложить нельзя, так как она полностью определена массой шайбы). Тогда силой тяжести в разности в правой части можно пренебречь, откуда:

$$N_{\text{ср}} = \frac{mv_y}{\Delta t}$$

Так как в любой момент времени справедливо $F_{\text{тр}} = \mu N$, то аналогичное выражение выполняется и для средних по времени величин. Тогда 2-й закон Ньютона в импульсной форме в проекции на горизонтальную ось вдоль направления движения можно записать в виде:

$$mv_B' - mv_B = -F_{\text{тр ср}} \Delta t = -\mu N_{\text{ср}} \Delta t = -\mu mv_y$$

Отсюда получаем:

$$v_B' = v_B - \mu v_y = v_B - \mu \sqrt{2gh}$$

В1.2 Для того чтобы $v_{\text{кр}}$ сохранила значение и смысл, указанный в пункте А1.1, будем считать, что это скорость в момент отрыва с верхней ступеньки. В случае $v_{\text{кр}}$ -потери механической энергии происходят на трех этапах: первое соударение со ступенькой, второе соударение с поверхностью, скольжение по поверхности до точки Ф.

При первом соударении потери можно найти, зная скорость после соударения, рассчитанную в пункте В1.1:

$$Q_{1-} = E_{\text{до}} - E_{\text{после}} = \frac{mv_{\text{кр}-}^2}{2} + mgh - \frac{mv_{1-}^2}{2}$$

где $v_{1-} = v_{\text{кр}-} - \mu \sqrt{2gh}$. Подставляя выражение для $v_{\text{кр}}$, получаем:

$$Q_{1-} = \mu mg(l - \mu h) + mgh$$

Потери энергии во время второго соударения считаются аналогично:

$$Q_{2-} = E_{\text{до}} - E_{\text{после}} = \frac{mv_{1-}^2}{2} + mgh - \frac{mv_{2-}^2}{2}$$

где $v_{2-} = v_{1-} - \mu \sqrt{2gh} = v_{\text{кр}-} - 2\mu \sqrt{2gh}$. Отсюда следует:

$$Q_{2-} = \mu mg(l - 3\mu h) + mgh$$

Во время «второго полета» шайба отлетит от ступеньки по горизонтали на расстояние

$l_{1-} = v_{1-} \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Если обозначить расстояние от края ступеньки до точки Ф за s , то в силу

постоянства силы трения скольжения и отсутствия вертикального ускорения потери энергии на третьем этапе будут равны:

$$Q_{3-} = \mu mg(s - l_{1-}) = \mu mg(s - l + 2\mu h)$$

Таким образом, полные потери энергии в случае $v_{\text{кр}}$ -равны:

$$Q_- = Q_{1-} + Q_{2-} + Q_{3-} = \mu mg(s + l - 2\mu h) + 2mgh$$

В случае $v_{\text{кр}+}$ потери энергии происходят на двух этапах: соударение с поверхностью и дальнейшее скольжение. Расчет производится по формулам, аналогичным приведенным выше. На первом этапе:

$$Q_{1+} = E_{\text{до}} - E_{\text{после}} = \frac{mv_{\text{кр}+}^2}{2} + mg(2h) - \frac{mv_{1+}^2}{2}$$

где $v_{1+} = v_{\text{кр}+} - \mu \sqrt{4gh}$ рассчитывается аналогично пункту В1.1. Отсюда:

$$Q_{1+} = \mu mg(l\sqrt{2} - 2\mu h) + 2mgh$$

Во время полета по горизонтали шайба пролетает расстояние $l_{1+} = v_{\text{кр}+} \sqrt{\frac{4h}{g}}$. Тогда потери

энергии на втором этапе равны:

$$Q_{2+} = \mu mg(s + l - l_{1+}) = \mu mg(s + l - l\sqrt{2})$$

Полные потери энергии в случае $v_{\text{кр}+}$:

$$Q_+ = Q_{1+} + Q_{2+} = \mu mg(s + l - 2\mu h) + 2mgh$$

То есть потери энергии в обоих случаях одинаковы. Данный результат говорит о том, что зависимость потерь энергии от начальной скорости шайбы непрерывна, не испытывает скачка в точке $v_{\text{кр}}$.

Задача 10-2 Пружинный газ

Часть А. Газ как пружина

Поскольку сосуд открыт, система находится в равновесии, а поршень может двигаться практически без трения, то давление газа изначально равно атмосферному $p_0 = 101$ кПа.

A1.1. Предположим газ поршень сдвинули на некоторое малое расстояние Δx . Тогда объем газа станет равен $V_0 + S\Delta x$. Так как стенки сосуда хорошо проводят тепло, то процесс изменения объема можно считать изотермическим, подчиняющемся закону $pV = \text{const}$. Тогда $p_0 V_0 = p_1 (V_0 + S\Delta x)$, где p_1 – новое давление газа. Отсюда:

$$p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_0 + S\Delta x} = \frac{p_0}{1 + \frac{S\Delta x}{V_0}} \approx p_0 \left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0}\right)$$

Рассмотрим силы, действующие на поршень. Это сила атмосферного давления снаружи, сила давления газа изнутри и сила, с которой деформируют газ. По третьему закону Ньютона последняя сила совпадает по модулю с той, что ощущает экспериментатор со стороны поршня, то есть с силой упругости. Отсюда:

$$F_{\text{упр}} = F_{\text{д}} - F_{\text{атм}} = p_0 S \left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0}\right) - p_0 S = -\frac{p_0 S^2}{V_0} \Delta x$$

В пределе малых деформаций сила упругости линейна по этой деформации, что говорит о выполнимости закона Гука. Полученный коэффициент при Δx и есть жесткость такой «газовой пружины». Она равна:

$$k_1 = \frac{p_0 S^2}{V_0} = 13,5 \text{ кН/м}$$

A1.2. Поверхностное напряжение равно: $\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S} = -\frac{p_0 S}{V_0} \Delta x$. Относительное удлинение равно: $\varepsilon = \frac{\Delta x}{l} = \frac{S\Delta x}{V_0}$, где l – начальная «длина» газа вдоль направления деформации.

Отсюда получаем закон Гука в дифференциальной форме (по модулю):

$$\sigma = p_0 \varepsilon$$

Полученный коэффициент при деформации и есть модуль Юнга. Для «газовой пружины» он оказался равным атмосферному давлению:

$$E_1 = p_0 = 101 \text{ кПа}$$

A1.3. Для того, чтобы рассмотреть отклонение от закона Гука, необходимо вернуться к месту, где использовалось приближение в выражении для давления газа в пункте A1.1 и продлить разложение до квадратичного слагаемого. Тогда для силы упругости получаем выражение:

$$F_{\text{упр}} = -\frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0}\right) \Delta x$$

где за «переменную» жесткость можно считать: $k_1 = \frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S\Delta x}{V_0}\right)$. Видно, что результат зависит от типа (знака) деформации: при «растянутом газе» (знак «плюс») с увеличением деформации жесткость будет уменьшаться, при «сжатом газе» (знак «минус») с увеличением деформации жесткость будет увеличиваться.

A2.1. В данном случае меняется не только давление и объем, но и температура газа. Пусть температура газа при небольшой деформации изменяется на ΔT . Так как стенки сосуда и поршень теплоизолированы, то процесс будет адиабатическим и первое начало термодинамики можно записать в виде $0 = A + \Delta U$, откуда:

$$p_0 S \Delta x = -\frac{3}{2} \nu R \Delta T$$

где ν – химическое количество газа в сосуде. Будем считать процесс что деформированный газ оказывается в равновесном состоянии. Тогда можно записать уравнение Менделеева-Клапейрона для начального и конечного состояния:

$$p_0 V_0 = \nu R T$$

$$p_1 (V_0 + S \Delta x) = \nu R (T + \Delta T)$$

Из последнего выражения с учетом предыдущих двух получаем:

$$p_1 = \frac{\nu R T + \nu R \Delta T}{V_0 + S \Delta x} = \frac{p_0 V_0 - \frac{2}{3} p_0 S \Delta x}{V_0 \left(1 + \frac{S \Delta x}{V_0}\right)} \approx p_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{S \Delta x}{V_0}\right) \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0} + \left(\frac{S \Delta x}{V_0}\right)^2\right)$$

Оставляя лишь слагаемые первого порядка малости по деформации, получаем:

$$p_1 = p_0 \left(1 - \frac{5}{3} \frac{S \Delta x}{V_0}\right)$$

Вновь записав силы, действующие на поршень, аналогично пункту А1.1, получим:

$$F_{упр} = -\frac{5 p_0 S^2}{3 V_0} \Delta x$$

Снова видим, что закон Гука при малых деформациях выполняется и жесткость «газовой пружины» равна:

$$k_2 = \frac{5 p_0 S^2}{3 V_0} = 22,4 \text{ кН/м}$$

А2.2. Вводя напряженность и относительное удлинение аналогично пункту А1.2, получим:

$$\sigma = \frac{5}{3} p_0 \varepsilon$$

Отсюда модуль Юнга равен:

$$E_2 = \frac{5}{3} p_0 = 168 \text{ кПа}$$

А2.3. Удержав квадратичное слагаемое разложения в формуле для давления p_1 , получим:

$$F_{упр} = -\frac{5 p_0 S^2}{3 V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0}\right) \Delta x$$

Отсюда «переменная жесткость» равна $k_2 = \frac{p_0 S^2}{V_0} \left(1 - \frac{S \Delta x}{V_0}\right)$. Снова, как и в пункте А1.3, получаем, что при «растянутом газе» (знак «плюс») с увеличением деформации жесткость будет уменьшаться, при «сжатом газе» (знак «минус») с увеличением деформации жесткость будет увеличиваться.

Часть В. Газ против пружины.

В1. Прежде всего, найдем p_1 – давление газа после изохорного нагрева (не забываем, что температуры должны быть абсолютными, в Кельвинах).

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}$$

Происходящий процесс неравновесный, мы не можем записать уравнение Менделеева-Клапейрона для любого промежуточного состояния газа, однако оно справедливо для начального и конечного равновесных состояний:

$$p_1 V_0 = \nu R T_1$$

$$p_2 (V_0 + S \Delta x) = \nu R T_2$$

где Δx – деформация газа и пружины, p_2 и T_2 – конечные давление и температура. Кроме того, можно записать баланс сил (2-й закон Ньютона) для поршня в конечном положении:

$$p_2 S = k \Delta x + p_0 S$$

Наконец, процесс адиабатический. Газ совершает работу за счет внутренней энергии:

$A = -\Delta U$. При этом, пренебрегая массой поршня, работа газа идет только на увеличение потенциальной энергии деформированной пружины. Получаем:

$$\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{3}{2} \nu R (T_1 - T_2)$$

Объединяя приведенные равенства, можно получить квадратное уравнение относительно Δx :

$$4k\Delta x^2 + 3\Delta x \left(p_0 S + \frac{kV_0}{S} \right) - 3p_0 V_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right) = 0$$

Решать данное уравнение удобно, подставив численные значения коэффициентов. Отбрасывая отрицательный корень (газ расширяется), получаем: $\Delta x = 1,37$ см. Далее, из уравнений Менделеева-Клапейрона и второго закона Ньютона можно получить выражение для искомой температуры:

$$T_2 = T_0 \frac{\left(p_0 + \frac{k\Delta x}{S} \right) (V_0 + S\Delta x)}{p_0 V_0} = 352 \text{ K} = 79 \text{ }^\circ\text{C}$$

Задача 10-3 Терморезистор – терморегулятор.

1. В соответствии с приведенной формулой

$$G = at^2 + b, \quad (1)$$

Сопротивление терморезистора равно

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{at^2 + b} = \frac{1}{5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}} = 12 \text{ Ом}. \quad (2)$$

2. Мощность выделяющейся теплоты при комнатной температуре рассчитывается по формуле

$$P = U^2 G(t) = 20^2 (5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) = 32 \text{ Вт} \quad (3)$$

3. Для расчета коэффициента теплоотдачи следует использовать уравнение теплового баланса (количество теплоты, выделившейся при остывания воды, уходит в окружающую среду):

$$cm \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -\beta(t - t_0). \quad (4)$$

Так как температура изменяется незначительно (всего на 1°) мощность теплопотерь можно считать постоянной. Тогда из уравнения (4) находим

$$\beta = -\frac{1}{t - t_0} cm \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{1}{10} 4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \frac{1}{60} = 1,4 \frac{\text{Вт}}{\text{К}}. \quad (5)$$

4. При установившейся температуре, количество теплоты, выделяющейся на терморезисторе, равно количеству теплоты, уходящей в окружающую среду:

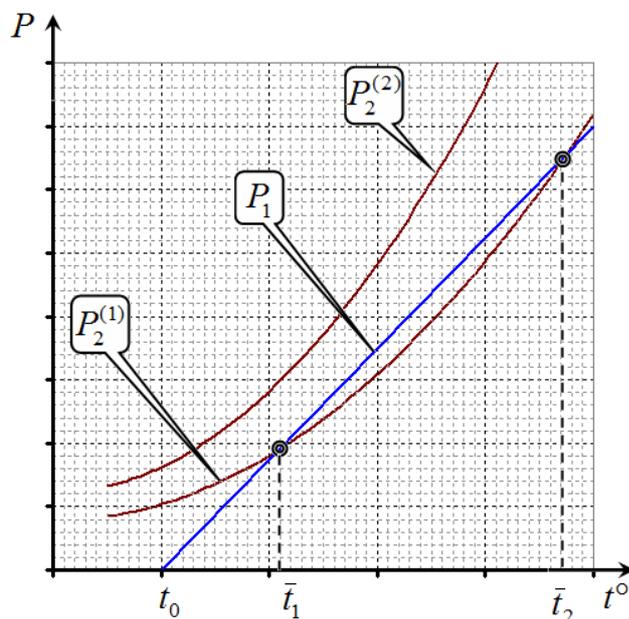
$$U^2 G(t) = \beta(t - t_0). \quad (6)$$

Установившаяся температура является корнем этого уравнения. Для качественного анализа решения этого уравнения следует построить графики зависимости от температуры:

- мощности теплоты, уходящей в окружающую среду $P_1 = \beta(t - t_0)$, графиком которой является прямая, проходящая через точку $t = t_0$;

- мощности теплоты, выделяющейся на терморезисторе $P_1 = U^2 G(t)$, графиком которого является парабола.

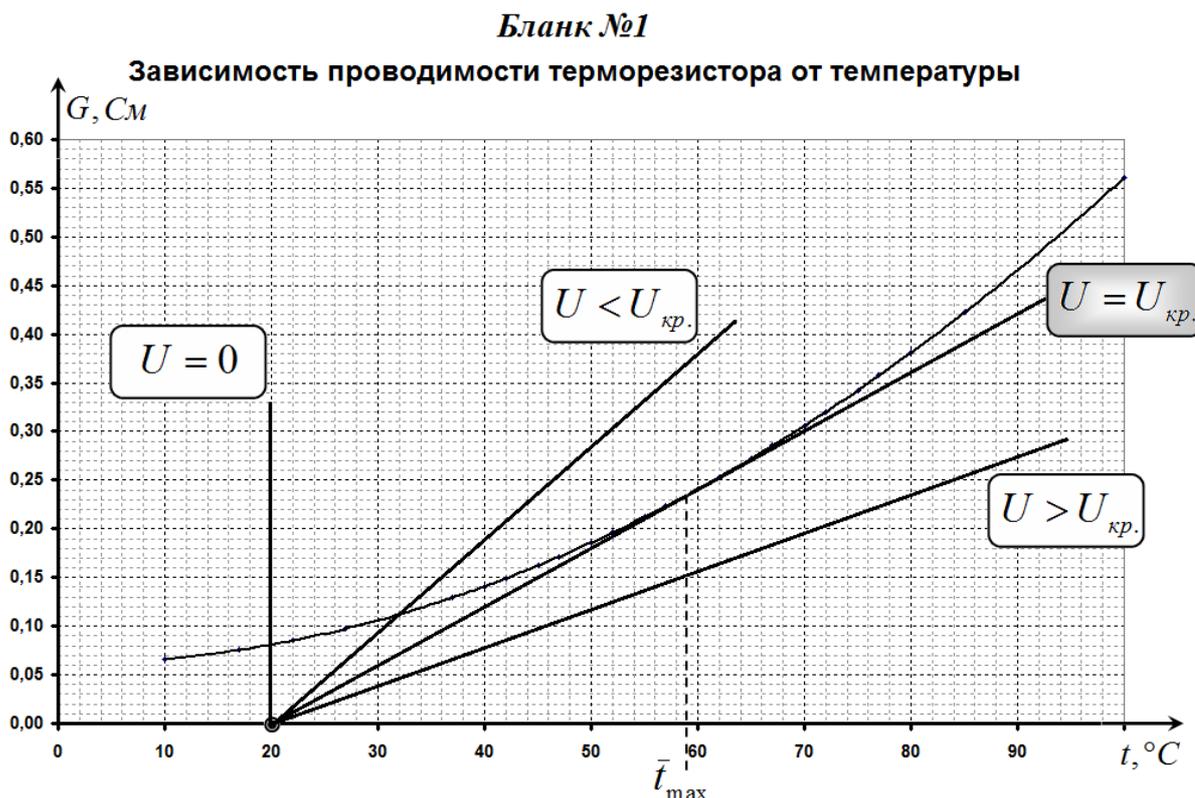
При малых напряжениях парабола $P_2^{(1)}$ пересекает прямую в двух точках: \bar{t}_1 и \bar{t}_2 . Легко показать, что первое значение температуры является устойчивым (при малом изменении температуры, она возвращается к исходному значению), а второе \bar{t}_2 - неустойчивым. Если напряжение источника превышает некоторое значение, то точек пересечения нет, т.е. уравнение (6) не имеет решений – график функции $P_2^{(2)}$.



5. Для количественного анализа возможных значений установившейся температуры перепишем уравнение (6) в виде:

$$G(t) = \frac{\beta}{U^2}(t - t_0). \quad (7)$$

Теперь на бланке №1 на графике зависимости проводимости от температуры $G(t)$ можно построить семейство прямых, проходящих через точку $t = t_0$, которые являются графиками функций $g(t) = \frac{\beta}{U^2}(t - t_0)$ при разных значениях напряжения на резисторе (рис. 2)



При $U = 0$ прямая вертикальна, при этом установившаяся температура, естественно, равна комнатной. При увеличении напряжения, наклон прямой уменьшается, при $U < U_{кр}$ - имеется две точки пересечения с параболой, при напряжении равном некоторому критическому $U = U_{кр}$ прямая является касательной к параболе. Координата точки касания и является максимально возможной стационарной установившейся температурой \bar{t}_{max} . По графику можно приблизительно определить $\bar{t}_{max} \approx 60^\circ$. При $U > U_{кр}$ теплового равновесия не существует – при этом нагрев воды будет постоянно увеличиваться, т.к. мощность выделяющейся теплоты всегда больше мощности тепловых потерь. Указанному критическому значению напряжения соответствует прямая, коэффициент которой (легко найти по графику) равен $\frac{\beta}{U^2} \approx 4,5 \cdot 10^{-3} \frac{Cm}{K}$, следовательно, $U_{кр.} \approx \sqrt{\frac{1,4}{4,5 \cdot 10^{-3}}} \approx 17 B$.

6. Для точного расчета значения установившейся температуры необходимо решить уравнение (7), подставив выражение (1):

$$at^2 + b = \frac{\beta}{U^2}(t - t_0) \Rightarrow at^2 - \frac{\beta}{U^2}t + b + \frac{\beta}{U^2}t_0 = 0. \quad (8)$$

Это уравнение имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$D = \left(\frac{\beta}{U^2}\right)^2 - 4a\left(b + \frac{\beta}{U^2}t_0\right) = 0. \quad (9)$$

В этом случае величина $z = \frac{\beta}{U^2}$ принимает значение

$$z^2 - 4at_0z - 4ab = 0 \Rightarrow z = 2at_0 \pm \sqrt{(2at_0)^2 + 4ab}. \quad (10)$$

Отрицательный корень данного уравнения в данном случае физического смысла не имеет¹, поэтому критическое напряжение, при котором достигается максимальная установившаяся температура, рассчитывается следующим образом

$$\begin{aligned} z = \frac{\beta}{U^2} = 2at_0 + \sqrt{(2at_0)^2 + 4ab} &\Rightarrow \\ U_{кр.} = \sqrt{\frac{\beta}{2at_0 + \sqrt{(2at_0)^2 + 4ab}}} &= \\ = \sqrt{\frac{1,4}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20 + \sqrt{(2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20)^2 + 4 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 6,1 \cdot 10^{-2}}}} &= 15 \text{ В} \end{aligned} \quad (10)$$

Что немного отличается от значения ранее найденного приближенным графическим способом. При этом единственный корень уравнения (8) (максимальная установившаяся температура) равен:

$$\bar{t}_{max} = \frac{\beta}{2aU^2} = \frac{1,4}{2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 15^2} = 62^\circ. \quad (11)$$

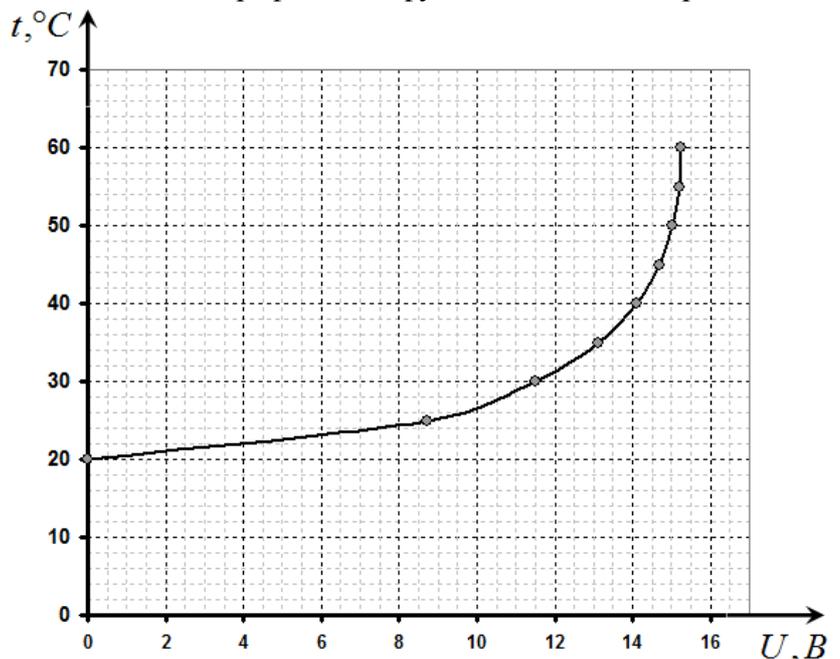
Для построения графика зависимости установившейся температуры от приложенного напряжения нужно решать уравнение (8). Для упрощения расчетов можно рассчитать обратную зависимость $U(\bar{t})$, которая следует из того же уравнения

$$at^2 + b = \frac{\beta}{U^2}(t - t_0) \Rightarrow U = \sqrt{\frac{\beta(t - t_0)}{at^2 + b}}. \quad (12)$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1, график этой функции показан на рис. 3

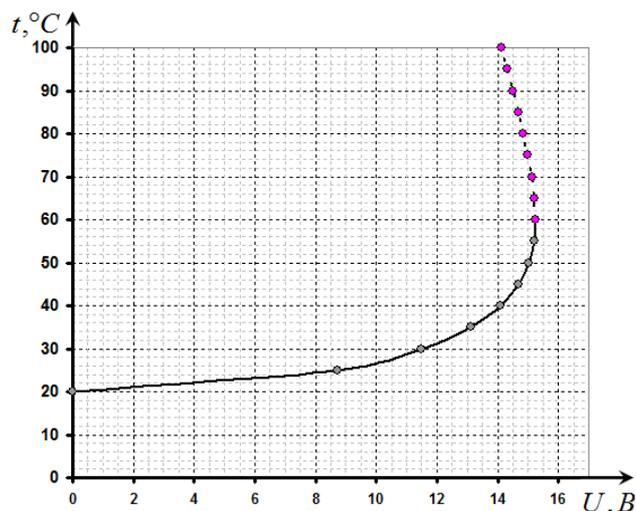
Таблица 1.

$t, ^\circ\text{C}$	$U, \text{В}$
20	0,00
25	8,71
30	11,49
35	13,11
40	14,09
45	14,69
50	15,03
55	15,19
60	15,24

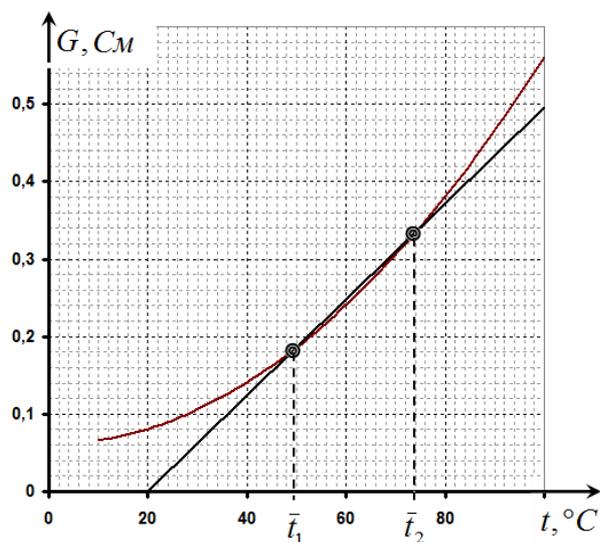


¹ С Точки зрения математики этому корню соответствует вторая касательная в параболу (рис. 2) при этом температура воды должна быть меньше температуры окружающей среды.

Интересно отметить, что данную зависимость можно продолжить, увеличивая значения температур. При этом на графике появится ветвь неустойчивых решений уравнения (8) на рис.4 она указана пунктиром).



7-8. Обратимся еще раз к графику, позволяющему оценивать значения установившихся температур (рис.2). Проведем на нем прямую, соответствующую установившейся температуре $\bar{t} = 50^\circ$ (рис. 5) . Видно, что в этом случае помимо устойчивой температуры $\bar{t}_1 = 50^\circ$ существует еще одна стационарная точка² (неустойчивая) $\bar{t}_2 \approx 75^\circ$. По таблице (1) определяем, что этой прямой соответствует напряжение $U = 15V$. Поэтому при превышении температуры $\bar{t}_2 \approx 75^\circ$ выделяющаяся мощность теплоты постоянно будет превышать мощность тепловых потерь, поэтому воды будет нагреваться до температуры кипения.



Для оценки и расчета времен нагревания необходимо записать уравнение, описывающее изменение температуры воды с течением времени τ :

$$cm\Delta t = (P_1 - P_2)\Delta\tau, \quad (13)$$

Смысл которого очевиден: разность между выделившейся теплотой и теплотой, ушедшей в окружающую среду пошла на нагревание воды. Разность мощностей $(P_1 - P_2)$ зависит от температуры, поэтому строгое решение этого уравнения достаточно сложное. Однако в каждом случае можно провести разумные оценки.

Так при нагревании воды на 1° от комнатной можно пренебречь тепловыми потерями, а мощность выделяющейся теплоты считать постоянной и равной $P_1 = U^2 G(t_0) = 15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 20 + 6,1 \cdot 10^{-2}) \approx 14W$. Тогда время нагревания оказывается равным

$$\tau_1 = \frac{cm\Delta t}{P_1} = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,20}{14} \approx 60c. \quad (14)$$

² При необходимости точное значение этой температуры можно найти из уравнения (8). Проще всего, используя теорему Виета. Из уравнения (8) следует $\bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \frac{\beta}{aU^2} = \frac{1,4}{5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 15^2} = 124^\circ$, откуда $\bar{t}_2 = 74^\circ$

При приближении к состоянию равновесия $t \rightarrow \bar{t}_1$ мощность, идущую на нагревание воду нельзя считать постоянной (так как она стремится к нулю), поэтому в этом случае необходимо использовать иное приближение. Обозначим $\delta t = t - \bar{t}_1$ малое отклонение от стационарной температуры. Тогда

$$(P_1 - P_2) = U^2 G(\bar{t}_1 + \delta t) - \beta(t + \delta t - \bar{t}_1) = U^2(a \cdot (\bar{t}_1 + \delta t)^2 + b) - \beta(t - \bar{t}_1) = \\ = (U^2(a\bar{t}_1^2 + b) - \beta(t - \bar{t}_1)) + 2U^2 a \delta t - \beta \delta t + U^2 a \cdot (\delta t)^2 \quad (15)$$

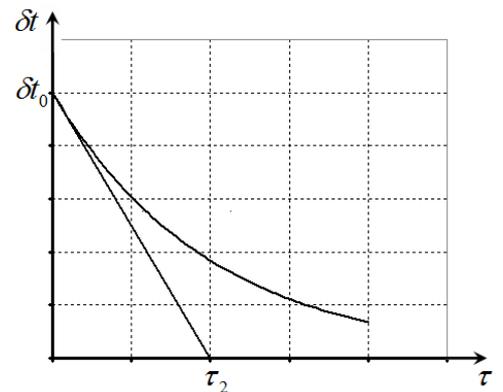
В этом выражении первое слагаемое обращается в нуль (так как \bar{t}_1 - стационарная точка), последним слагаемым можно пренебречь ввиду малости величины $(\delta t)^2$. Таким образом, уравнение теплового баланса (13) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta(\delta t)}{\Delta \tau} = - \frac{(\beta - 2U^2 a)}{cm} \delta t \quad (16)$$

В этом уравнении постоянный коэффициент равен $\gamma = \frac{(\beta - 2U^2 a)}{cm} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} c^{-1}$. Оценка

характерного времени достижения равновесия проводится традиционным способом. Качественный график зависимости отклонения температуры δt от времени имеет вид, показанный на рис. 6. Считая, что скорость изменения температуры постоянна и равна $\gamma \delta t_0$ получаем оценку времени достижения теплового равновесия

$$\tau_2 = \frac{\delta t_0}{\gamma \delta t_0} = \frac{1}{\gamma} \approx 600 c. \quad (17)$$



При нагревании воды от 80° до 100° скорость

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P_1 - P_2}{cm} = \frac{U^2(at^2 + b) - \beta(t - t_0)}{cm}, \quad (17)$$

нагрева изменяется в пределах

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_{80^\circ} = \frac{15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 80^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) - 1,4 \cdot 60}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,20} = 2,0 \cdot 10^{-3} \frac{K}{c} \quad (16)$$

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_{100^\circ} = \frac{15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 100^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) - 1,4 \cdot 80}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 0,20} = 1,7 \cdot 10^{-2} \frac{K}{c}$$

Для оценки времени³ нагрева можно взять среднее значение скорости нагрева, при этом получаем

$$\tau_3 = \frac{20}{9,5 \cdot 10^{-3}} \approx 2,1 \cdot 10^3 c \approx 35 \text{ мин}. \quad (17)$$

Наконец, при кипении воды ее температура остается постоянной, поэтому рассматриваемые мощности также постоянны, причем

$$(P_1 - P_2)_{100^\circ} = U^2(at^2 + b) - \beta(t - t_0) = 15^2(5,0 \cdot 10^{-5} \cdot 100^2 + 6,1 \cdot 10^{-2}) - 1,4 \cdot 80 \approx 14 \text{ Вт}$$

Следовательно, время выкипания будет равно

$$\tau_4 = \frac{Lm}{(P_1 - P_2)_{100^\circ}} \approx 3,1 \cdot 10^4 c \approx 9 \text{ час}. \quad (18)$$

³ Возможны и другие способы оценивания. Например, взять скорость остывания при средней температуре 90° $\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)_{80^\circ} \approx 8 \cdot 10^{-3} \frac{K}{c}$. В этом случае оценка времени нагрева дает примерно 40 мин.

Задача 11-1 Параболическая физика.

Часть 1

1.1 Уравнение данной параболы имеет вид

$$y = h \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (1)$$

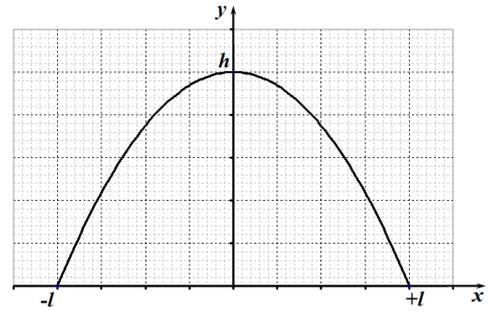


Рис. 1

1.2 Выразим расстояния AF и AB через координаты точки $A(x, y)$ и приравняем их:

$$y = \sqrt{(y-a)^2 + x^2} \quad (2)$$

После элементарных преобразований получим:

$$y^2 = y^2 - 2ay + a^2 + x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2 + a^2}{2a} \quad (3)$$

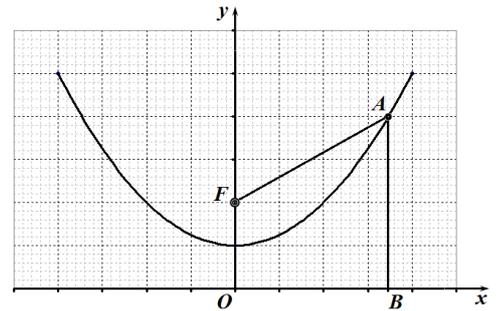


Рис. 2

Часть 2.

2.1.1 Запишем закон движения камня

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$y = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \quad (4)$$

Выражая из первого уравнения $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ и подставляя во второе, получим

$$y = h + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \Rightarrow \quad (5)$$

$$y = h + kx - \frac{g}{2v_0^2} (1 + k^2) x^2$$

Здесь обозначено $k = tg \alpha$ и использована тригонометрическая формула $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + tg^2 \alpha$.

2.1.2 Дальность полета S - есть координата x , когда $y = 0$, поэтому для ее расчета следует решить квадратное уравнение

$$0 = h + v_0 \sin \alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 \quad (6)$$

Что не слишком сложно:

$$x^2 - 2 \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} x - 2 \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} h = 0 \Rightarrow$$

$$S = x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \right)^2 + 2 \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} h} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right) \quad (7)$$

2.1.3 Искать максимум функции $S(\alpha)$ затруднительно.

Поэтому рассмотрим выражение (5), как уравнение относительно тангенса угла бросания k , при котором достигается дальность S , для этого положим $y = 0$, $x = S$. Если дискриминант этого уравнение обращается в нуль, то этому соответствует максимальная дальность полета. Поэтому преобразуем уравнение

$$0 = h + kS - \frac{g}{2v_0^2}(1 + k^2)S^2. \quad (8)$$

к стандартному виду

$$k^2 - \frac{2v_0^2}{gS}k - \frac{2v_0^2}{gS^2}h + 1 = 0. \quad (9)$$

И приравняем его дискриминант к нулю:

$$D = \left(\frac{v_0^2}{gS}\right)^2 + \frac{2v_0^2}{gS^2}h - 1 = 0. \quad (10)$$

Из этого уравнения находим максимальную дальность

$$S_{\max} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 + \frac{2v_0^2}{g}h} = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}. \quad (11)$$

Наконец, из уравнения (9) (при нулевом дискриминанте) определяем угол, при котором достигается максимальная дальность:

$$k^* = \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{v_0^2}{gS_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}. \quad (12)$$

Часть 3.

3.1 Запишем уравнение траектории камня, брошенного под углом α к горизонту с нулевой высоты (это уравнение (5) с $h = 0$)

$$y = kx - \frac{g}{2v_0^2}(1 + k^2)x^2 \quad (13)$$

Теперь это выражение будем рассматривать как функцию тангенса угла бросания k при фиксированном значении координаты x . Понятно, что точке, лежащей на огибающей соответствует максимальное значение этой функции, которое находится стандартным образом:

- Вычисляем производную по k и приравниваем ее к нулю:

$$y'_k = x - \frac{g}{v_0^2}kx^2 = 0 \quad (14)$$

- Решаем полученное уравнение

$$k^* x = \frac{v_0^2}{g} \quad (15)$$

- подставляем в выражение (13), которое теперь уже рассматриваем как функцию x , тем самым получаем уравнение огибающей

$$Y(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \left(\frac{g}{v_0^2}\right)^2 x^2\right). \quad (16)$$

Отметим, что выражение можно было записать сразу, используя формулу (1), в которой

$h = \frac{v_0^2}{2g}$ - максимальная высота полета камня, $l = \frac{v_0^2}{g}$ - максимальная дальность полета.

Часть 4.

4.1 Зависимость давления от объема газа определяется самим устройством, в котором находится рассматриваемый газ. В данном случае давление газа равно сумме атмосферного и гидростатического давлений⁴. Следовательно,

$$P = P_0 + 2l - x. \quad (17)$$

Для расчета зависимости температуры от объема воспользуемся уравнение Клапейрона

$$\frac{Px}{T} = \frac{(P_0 + l)l}{T_0}. \quad (18)$$

Из этого уравнения следует искомая зависимость:

$$T = T_0 \frac{(P_0 + 2l - x)x}{(P_0 + l)l}. \quad (19)$$

Графики этих функций показаны на рис. 3. Чтобы графики были точными удобно использовать относительные единицы, причем в качестве единицы давления и объема используется l .

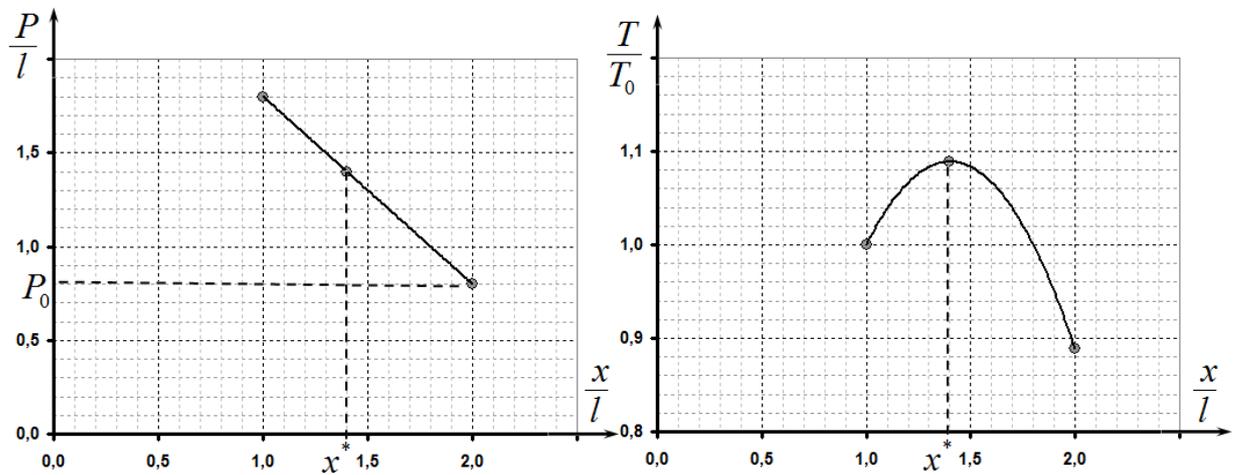


Рис. 3

Зависимость $T(x)$ является квадратичной. Максимум этой функции является параболой. Ее максимум лежит по середине между корнями в точке

$$x^* = l + \frac{P_0}{2}. \quad (20)$$

Значение температуры в этой точке равно

$$T_{\max} = T_0 \frac{\left(l + \frac{P_0}{2}\right)^2}{(P_0 + l)l}. \quad (21)$$

Именно до этой температуры следует нагреть газ, после достижения точки

$x = x^*$ положение равновесия станет неустойчивым – далее без дальнейшего нагрева газ вытолкнет ртуть. Численной значение этой температуры равно

$$T_{\max} = 293 \frac{\left(l + \frac{0,8l}{2}\right)^2}{1,8l \cdot l} = 319\text{K} = 46^\circ\text{C}. \quad (22)$$

⁴ Так как атмосферное давление измерено в мм рт. ст., то и гидростатическое давление столба ртути также можно измерять в мм рт. ст., которое численно равно высоте столба.

Часть 5.

5.1.1 Известно, что бесконечно большая равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ создает однородное поле, напряженность которого определяется по формуле

$$E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (23)$$

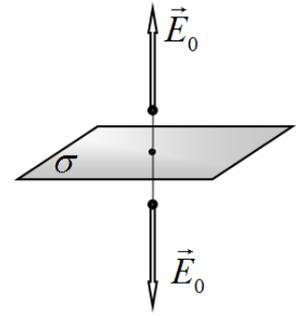


Рис. 4

Так как для напряженности поля справедлив принцип суперпозиции, то эта же формула будет справедлива и для толстой пластины. В этом случае под поверхностной плотностью заряда следует понимать величину заряда, находящегося под площадкой единичной площади. В частности для однородно заряженной пластины толщиной h : $\sigma = \rho h$.

Рассмотрим описанную пластину. Поле внутри пластины в точке, находящейся на расстоянии x от ее середины. Фактически электрическое поле в этой точке создается зарядами, находящимися в слое от $-x$ до $+x$. Поля, создаваемые зарядами вне этого слоя, компенсируют друг друга (рис. 5). Поэтому в соответствии с проведенными выше рассуждениям

$$E(x) = \frac{2\rho x}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}. \quad (24)$$

При $x > h$ напряженность поля рассчитывается по формуле

$$E_0(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}. \quad (25)$$

Направление вектора напряженности показано на рис. 5. При $x < 0$ картина поля симметрично отражается относительно центра пластины.

График этой функции показан на рис. 6.

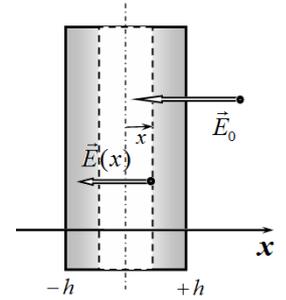


Рис. 5

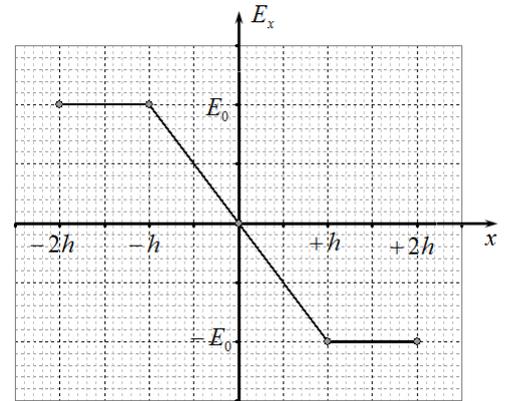


Рис. 6

Для расчета потенциала следует использовать формулу, связывающую разность потенциалов и напряженность поля:

$$\Delta\varphi(x) = -E_x \Delta x. \quad (26)$$

Так как напряженность поля изменяется, то изменение потенциала численно равно площади под графиком зависимости $E_x(x)$. Элементарные расчеты показывают, что при $x < h$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} E_x(x) \cdot x = \frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}. \quad (27)$$

При $x > h$ напряженность поля постоянна, поэтому потенциал возрастает по линейному закону, в этой области

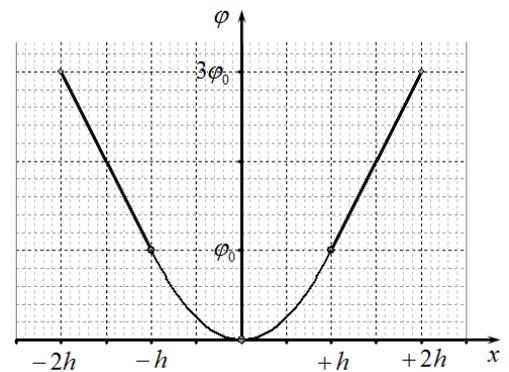


Рис. 6

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(h) + E_0 \cdot (x - h) = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho h}{\varepsilon_0} (x - h) = \\ &= \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} (2x - h)\end{aligned}\quad (28)$$

Понятно, что функция $\varphi(x)$ четная. График этой функции показан на рис. 6.

Часть 6.

Проще всего решить эту задачу в неинерциальной вращающейся системе отсчета. В стационарном случае потенциальная энергия любой малой частички воды, находящейся на поверхности должна быть постоянна, иначе эта частичка воды будет перетекать в область с меньшей энергией.

Во вращающейся системе отсчета на любой тело массы m действует центробежная сила

$$\vec{F} = m\omega^2 \vec{r}, \quad (29)$$

Где \vec{r} - вектор, соединяющий данное тело с осью вращения и направленный перпендикулярно этой оси. Этой силе соответствует энергия

$$U = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}. \quad (30)$$

Здесь уместна аналогия: силе Гука $F = -kx$ соответствует энергия

$$U = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная энергия частицы, находящейся на поверхности складывается из центробежной энергии и энергии силы тяжести (и эта сумма должна быть постоянной):

$$E = -\frac{m\omega^2 r^2}{2} + mgz. \quad (31)$$

Таким образом, уравнение поверхности имеет вид

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (32)$$

Постоянное слагаемое z_0 , имеющее смысл высоты нижней точки воронки, может быть найдено из условия постоянства объема жидкости. Из формулы для объема параболоида, приведенной в условии задачи следует, что объем параболоида в два раза меньше объема цилиндра, описанного вокруг него. Поэтому условие постоянства объема имеет вид

$$\pi R^2 h_0 = \pi R^2 z_0 + \frac{1}{2} \pi R^2 \Delta z \quad (34)$$

где Δz - высота воронки, которая как следует из формулы (32), равна $\Delta z = \frac{\omega^2 R^2}{2g}$

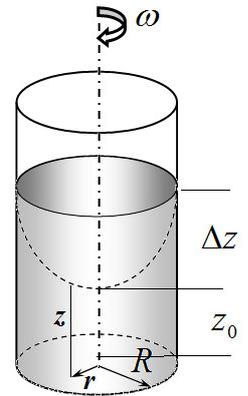
Подставим это выражение в формулу (34), в результате найдем

$$h_0 = z_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \Rightarrow z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (35)$$

Окончательное выражение для профиля воронки принимает вид

$$z = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (36)$$

Воронка достигнет дна, если z_0 станет равным нулю. Из выражения (35) получим



$$h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} = 0 \Rightarrow \omega^* = \sqrt{\frac{4gh_0}{R^2}} \quad (37)$$

Дополнение. Данная часть задачи допускает и традиционное решение.

Рассмотрим малый элемент жидкости массой m на её поверхности, находящийся на расстоянии x от оси вращения системы. На рассматриваемый элемент жидкости действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции \vec{N} со стороны окружающей жидкости (см. рис.). Согласно второму закону Ньютона можем записать

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}, \quad (Д1)$$

где $a = \omega^2 x$ – центростремительное ускорение рассматриваемого элемента при вращении.

Заметим, что поскольку жидкости текучи, то ориентация вектора \vec{N} относительно поверхности жидкости не может быть произвольной – он должен быть перпендикулярен касательной к поверхности жидкости в данной точке. Из прямоугольного векторного треугольника (Д1) найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{\omega^2 x}{g} \quad (Д2)$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\omega^2 x}{g},$$

легко получим уравнение кривой свободной поверхности жидкости относительно нижней точки

$$y(x) = \frac{\omega^2}{2g} x^2.$$

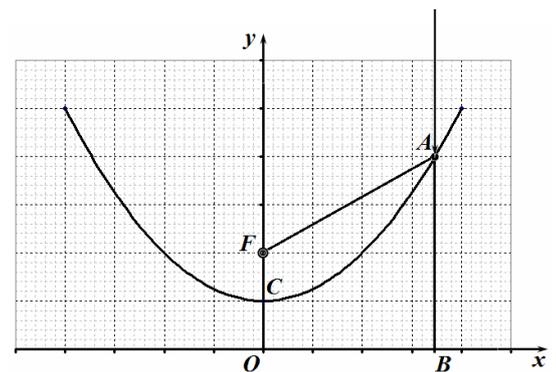
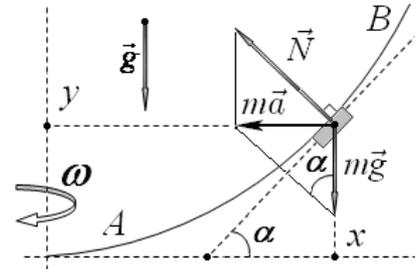
Часть 7.

В предыдущей части задачи было показано, что поверхность вращающейся жидкости является параболоидом, следовательно, зеркало является параболическим (именно таким, какие используются в современных телескопах). Воспользуемся свойством параболы рассмотренным в п. 1.2. Из этого свойства следует, что любой луч, попадающий на зеркало (например, в т. А.) , достигнет фокуса параболы F за одно и тоже время, так расстояния AB и AF равны. Следовательно, для всех лучей (точнее волн) в этой точке будет выполняться условие максимума интерференции, поэтому все лучи пройдут через эту точку.

Аналогичная ситуация выполняется и для линз: время прохождения света от источника до изображения одинаково для всех лучей (это свойство называется таутохронизмом).

Вернемся к уравнению параболы (3)

$$y = \frac{x^2 + a^2}{2a},$$



из которого следует, что расстояние от фокуса до вершины (фокусное расстояние) параболы равно $f = \frac{a}{2}$. Сравним с уравнением параболы, описывающей форму поверхности жидкости (36):

$$z = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Так как фокусное расстояние определяется кривизной параболы (т.е коэффициентом при x^2), то имеем право записать:

$$\frac{\omega^2}{2g} = \frac{1}{2a} \Rightarrow a = \frac{g}{\omega^2}. \quad (38)$$

Следовательно, фокусное расстояние зеркала Вуда равно

$$f = \frac{g}{2\omega^2} = \frac{9,8}{2 \cdot 1,5^2} = 2,2 \text{ м}. \quad (39)$$

Этот же результат можно получить и с помощью геометрических построений с последующими достаточно громоздкими выкладками.

6.2 Очевидно (вспомните обычное сферическое зеркало), что расстояние между изображениями звезд будет равно

$$\Delta l = f \Delta \alpha \quad (40)$$

Подставляя численные значения параметров (и не забывая перевести градусы в радианы), получим

$$\Delta l = f \Delta \alpha = 2,2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 1 = 3,8 \text{ см}. \quad (41)$$