

Задание 1. Что изучает физика?

1.1 Оплата коммунальных услуг – раздел физики!

Единица измерения электроэнергии 1 кВт.час в основных единицах системы СИ равна

$$1\text{кВт} \cdot \text{час} = 10^3 \text{Вт} \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{с} = 3,6 \cdot 10^6 \text{Дж} . \quad (1)$$

1 калория равна 4,2Дж, поэтому бытовая единица тепловой энергии (гигакалория) в основных единицах системы СИ равна

$$1\text{ГКал} = 10^9 \cdot 4,2\text{Дж} = 4,2 \cdot 10^9 \text{Дж} . \quad (2)$$

Следовательно, гигакалория больше киловатт-час в

$$\frac{1\text{Гкал}}{1\text{кВт} \cdot \text{час}} = \frac{4,2 \cdot 10^9}{3,6 \cdot 10^6} = 1,17 \cdot 10^3 \text{ раз} .$$

1.2 Правила дорожного движения (ПДД) – раздел физики!

Очевидно, что расстояние между автомобилями зависит от времени по закону (вспомните Пифагора)

$$S = \sqrt{(x_1 - v_1 t)^2 + (x_2 - v_2 t)^2} . \quad (1)$$

Здесь под корнем стоит выражение, которое является квадратным трехчленом относительно времени t . Проводя стандартные преобразования, приводящие его к традиционному виду, находим, что он достигает минимального значения в момент времени

$$t^* = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} . \quad (2)$$

Если подставить это выражение в формулу (1), то получим минимальное расстояние между автомобилями

$$S_{\min} = \frac{|x_1 v_2 - x_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} . \quad (3)$$

Для определения возможного начального положения второго автомобиля необходимо решить неравенство

$$S_{\min} = \frac{|x_1 v_2 - x_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \geq l . \quad (4)$$

Заметим, что в данную формулу нет необходимости подставлять численные значения, выраженные в системе СИ. Поэтому численно неравенство (4) имеет вид

$$\frac{|500 \cdot 90 - x_2 \cdot 70|}{\sqrt{90^2 + 70^2}} \geq 10 \quad (5)$$

Корректное решение этого неравенства приводит к следующим допустимым значениям

$$x_2 > 4388\text{м}, \text{ либо } x_2 < 4614\text{м} . \quad (6)$$

Здесь необходимо провести округление (с запасом безопасности):

$$x_2 > 4,4\text{км}, \text{ либо } x_2 < 4,6\text{км} . \quad (7)$$

Задание 2. Вспомним Архимеда!

2.1 Какие весы лучше?

2.1.1 Весы со стрелкой вверху являются неустойчивыми, а со стрелкой внизу устойчивыми. Это легко обосновать, рассматривая небольшие отклонения от положения равновесия. Так для весов со стрелкой внизу, нарушение равновесия, вызванной разностью масс грузов на чашках весов, компенсируется возрастающим моментом силы тяжести, действующих на стрелку.

2.1.2 При отклонении на максимальный угол выполняется равенство моментов сил

$$m_0 g \frac{h}{2} \sin \alpha_{\max} = mgL \cos \alpha_{\max} \quad (1)$$

Откуда следует выражение для максимальной массы, которую можно взвесить на данных весах

$$m \leq \frac{m_0 h}{L} \operatorname{tg} \alpha_{\max} \quad (2)$$

2.2 Сила давления и сила Архимеда.

На поверхности воды плавает шарик радиуса $R = 5,0 \text{ см}$, наполовину погруженный в воду.

2.2.1 Так как шарик наполовину погружен в воду, то условие его плавания (сила тяжести уравновешена силой Архимеда) имеет вид

$$mg = \frac{1}{2} \rho g \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (1)$$

Откуда следует, что масса шарика равна массе воды в половине объема шарика

$$m = \frac{2}{3} \rho \pi R^3 = \frac{2}{3} 1,0 \cdot 10^3 \pi (5,0 \cdot 10^{-2})^3 = 0,26 \text{ кг} \quad (2)$$

2.2.2 При отсутствии атмосферного давления суммарная (векторная!) сумма сил давления на нижнюю половину шарика равна силе Архимеда, и равной ей силе тяжести, т.е.

$$F_1 = mg = 2,6 \text{ Н} \quad (3)$$

Атмосферное давление увеличивает однородно давление воды. Поэтому дополнительная сила давления воды, обусловленная атмосферным давлением равна силе давления на поперечное сечение шарика, т.е.

$$F_2 = P \cdot \pi R^2 = 1,0 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot (5,0 \cdot 10^{-2})^2 = 785 \text{ Па} \cdot \text{м} \quad (4)$$

Таким образом, суммарная сила давления равна

$$F = P \cdot \pi R^2 + mg = 1,0 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot (5,0 \cdot 10^{-2})^2 = 788 \text{ Па} \cdot \text{м} \quad (5)$$

Задание 3. Нелинейные цепи

1. Полупроводниковый диод

Пусть напряжение на всем участке цепи, который рассматриваем равно U , а сила тока, протекающего через него – I .

1.1. Параллельное соединение

1.1.a. При параллельном соединении напряжение на каждом из двух диодов одинаковое и равно U . Пусть через диод α_1 протекает ток силой I_1 , а через диод α_2 – I_2 (рис. 1). Так как вместе они дают полный ток в цепи I , и для каждого диода выполняется указанное соотношение $I = \alpha U^2$, получаем:

$$I = I_1 + I_2 = \alpha_1 U^2 + \alpha_2 U^2 = (\alpha_1 + \alpha_2) U^2 \quad (1)$$

С другой стороны, если заменить два параллельно соединённых диода на один с эквивалентной постоянной, то для него справедливо соотношение:

$$I = \alpha_{\text{ЭКВ}} U^2 \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем ответ:

$$\alpha_{\text{ЭКВ}} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (3)$$

То есть при параллельном соединении диодов их постоянные просто складываются.

1.1.b. В случае параллельного соединения четырёх диодов, согласно (3), все их постоянные будут просто складываться, и полная эквивалентная постоянная окажется равной:

$$\alpha_{\text{ЭКВ}} = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4\alpha \quad (4)$$

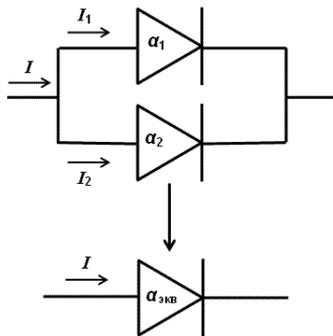


Рисунок 1

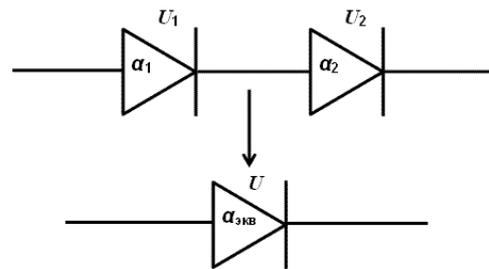


Рисунок 2

1.2. Последовательное соединение

1.2.a. При последовательном соединении через оба диода протекает одинаковый ток I . Напряжения на диодах α_1 и α_2 соответственно равны U_1 и U_2 (рис. 2). Так как их сумма равна полному напряжению на участке, и для каждого диода выполняется

соотношение $I = \alpha U^2$, а значит $U = \sqrt{\frac{I}{\alpha}}$, получаем:

$$U = U_1 + U_2 = \sqrt{\frac{I}{\alpha_1}} + \sqrt{\frac{I}{\alpha_2}} = \sqrt{I} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \quad (5)$$

С другой стороны, для одного диода с эквивалентной постоянной будет выполняться:

$$U = \sqrt{\frac{I}{\alpha_{\text{ЭКВ}}}} \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), получаем закон последовательного соединения:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_{\text{ЭКВ}}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \quad (7)$$

Выражая отсюда $\alpha_{\text{ЭКВ}}$, можно преобразовать выражение к конечному виду:

$$\alpha_{\text{ЭКВ}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_2} \quad (8)$$

1.2.b. При последовательном соединении четырёх диодов с одинаковыми постоянными α , рассуждая аналогично предыдущему пункту, получим выражение (5) в следующем виде:

$$U = \sqrt{I} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) = \sqrt{I} \left(\frac{4}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (9)$$

Сравнивая (6) и (9), получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_{ЭКВ}}} = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \quad (10)$$

Откуда следует ответ:

$$\alpha_{ЭКВ} = \frac{\alpha}{16} \quad (11)$$

2. Туннельный диод

2.1. Напряжение U , подаваемое на клеммы будет равным сумме падений напряжений на резисторе и туннельном диоде (рис. 3):

$$U = U_R + U_\beta \quad (12)$$

Зная связь напряжения и силы тока на резисторе $U_R = IR$ и на туннельном диоде $U_\beta = \frac{\beta}{I}$, получаем:

$$U = IR + \frac{\beta}{I} \quad (13)$$

Умножив обе стороны на силу тока I , получим квадратное уравнение относительно этой величины.

$$I^2 R - IU + \beta = 0 \quad (14)$$

Решаем данное уравнение. Дискриминант равен

$$D = U^2 - 4\beta R = (1,00 \text{ В})^2 - 4 \cdot 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ ВТ} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 0,56 \text{ В}^2 \quad (15)$$

Корни уравнения, соответственно, равны

$$I_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{D}}{2R} = \frac{1,00 \text{ В} \pm 0,75 \text{ В}}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \text{ Ом}}$$

$$I_1 = 0,125 \text{ мА}, I_2 = 0,875 \text{ мА} \quad (16)$$

Вычислим также соответствующие этим значениям тока напряжения на туннельном диоде по формуле $U_\beta = \frac{\beta}{I}$. Получим $U_{\beta 1} = 0,880 \text{ В}$ и $U_{\beta 2} = 0,126 \text{ В}$. Заметим, что значение $U_{\beta 1}$ не попадает в диапазон $0,10 \text{ В} - 0,30 \text{ В}$, указанный в условии. Это означает, что величина напряжения $U_{\beta 1}$ и соответствующая сила тока I_1 оказываются за рамками тех напряжений и токов, для которых справедливы наши формулы. Поэтому данные значения мы не можем использовать в качестве результата.

Таким образом, остаётся одно значение силы тока в цепи $I = I_2 = 0,875 \text{ мА}$.

Однако и такая сила тока в цепи не установится, так как такой режим в цепи оказывается неустойчивым. Действительно, предположим, что значение тока в цепи равно I_2 и в силу случайных причин произошло его малое колебание ΔI , для определённости, в сторону увеличения. В силу связи $U_\beta = \frac{\beta}{I}$ при увеличении тока напряжение U_β на диоде уменьшится. Но так как сумма напряжений $U_R + U_\beta$ равна постоянному напряжению U , подаваемому на клеммы, уменьшение U_β повлечёт за собой увеличение U_R . Наконец, если напряжение U_R на резисторе растёт, то растёт и сила тока, проходящего через него, а, значит, и сила тока во всей цепи. Таким образом, мы пришли к результату, что малое случайное возрастание силы тока в цепи приводит к дополнительному возрастанию этой же силы тока, что, в свою очередь, повлечёт за собой дальнейшее возрастание и так далее. В итоге, после малейшего колебания значение силы тока будет всё дальше уходить от неустойчивого I_2 , пока не выйдет из рассматриваемого диапазона величин.

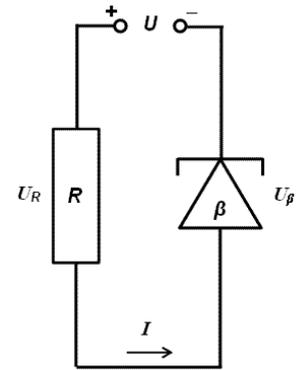


Рисунок 3

В итоге, ответ на данный пункт следующий: в диапазоне напряжений 0,10 В – 0,30 В на туннельном диоде не установится какого-либо значения силы тока.

Примечания:

1. Рассуждения об отсутствии устойчивого значения силы тока в цепи в пункте 2.1 можно было проводить, вообще говоря, и без расчетов значений I_1 и I_2 . Данные вычисления приведены в решении и оцениваются, так как они демонстрируют умение участника олимпиады рассчитать силу тока в цепи с нестандартными элементами, что, несомненно, должно быть отмечено.
2. На более широком диапазоне значений связь напряжения и силы тока для туннельного диода представлена графически на рис. 4.

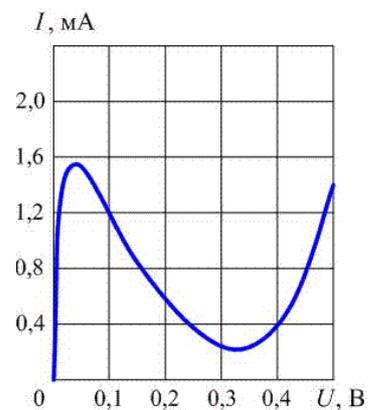


Рисунок 4

Задание 1. Что изучает физика?

1.1 Ботаника – раздел физики!

1.1.1 Приравнявая лапласовское давление к гидростатическому давлению, создаваемому столбом жидкости в капилляре, получим уравнение

$$\frac{4\sigma}{d} = \rho gh. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что высота поднятия жидкости равна

$$h = \frac{4\sigma}{d\rho g} = \frac{4 \cdot 7,3 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-5} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8} = 3,0 \text{ м}. \quad (2)$$

Также из уравнения (1) следует, что вода поднимается на искомую высоту при диаметре капилляра равном

$$d = \frac{4\sigma}{\rho gh} = \frac{4 \cdot 7,3 \cdot 10^{-2}}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 100} = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}. \quad (3)$$

Из полученных оценок следует, что секвойи не могут себя обеспечить питанием с помощью капиллярных сил.

1.1.2 Оболочка корней растений служит полупроницаемой мембраной. Оцените, на какую высоту может подняться вода под действием осмотического давления. Считайте, что в почве вода является чистой, внутри растения создается раствор поваренной соли ($NaCl$) с содержанием 1 г соли на 1 л воды.

$$\text{Молярная масса натрия } M_{Na} = 23 \frac{\text{г}}{\text{моль}}, \text{ хлора } M_{Cl} = 35,5 \frac{\text{г}}{\text{моль}}.$$

1.1.2 Для расчета осмотического давления найдем концентрацию ионов в растворе поваренной соли при заданном ее содержании в растворе:

$$n = 2 \frac{m}{V(M_{Na} + M_{Cl})} N_A \quad (4)$$

Следовательно, осмотическое давление равно

$$p = nkT = 2 \frac{m}{V(M_{Na} + M_{Cl})} N_A kT = 2 \frac{m}{V(M_{Na} + M_{Cl})} RT. \quad (5)$$

Приравнявая его к гидростатическому давлению столба воды ρgh , получим

$$h = 2 \frac{m}{V(M_{Na} + M_{Cl})\rho g} RT = 2 \frac{20}{(23 + 35,5) \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} 8,31 \cdot 300 = 87 \text{ м}. \quad (6)$$

Отметим, что помимо поваренной соли в жидкой среде клеток растений содержатся и другие компоненты, которые еще больше могут повысить осмотическое давление.

1.2 Метеорология – раздел физики!

При охлаждении влажного воздуха возможно образование тумана. Днем температура воздуха равнялась 25°C , а влажность $\eta = 80\%$. Вечером температура воздуха понизилась до 18°C . Оцените, какое количество теплоты выделится при образовании тумана на территории Минска. Оцените также, стоимость этой энергии, если по нынешним расценкам 1 Гигакалория (10^9 кал) тепловой энергии стоит 80 тыс. бел. руб.

Считайте, что форма города есть круг. Длина Минской окружной дороги $l = 56 \text{ км}$. Высоту слоя тумана примите равной $h = 100 \text{ м}$.

Плотность водяных паров можно выразить из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \quad (1)$$

Выразим плотности водяного пара до начала образования тумана (при влажности η) и после его образования (при 100% влажности):

$$\rho_0 = \frac{\eta p_{25} M}{RT_{25}}, \quad \rho_1 = \frac{p_{18} M}{RT_{18}}. \quad (2)$$

Разность этих плотностей дает массу воды, сконденсировавшейся в единице объема воздуха. Вычислим объем воздушной среды, в которой выпал туман. Записывая выражения для площади круга и длины окружности, получим:

$$l = 2\pi R, \quad S = \pi R^2 = \frac{l^2}{4\pi}. \quad (3)$$

С учетом полученного, находим массу выпавшего тумана

$$m = V\Delta\rho = \frac{l^2 h}{4\pi} \frac{M}{R} \left(\frac{\eta p_{25}}{T_{25}} - \frac{p_{18}}{T_{18}} \right). \quad (4)$$

И количество выделившейся при этом теплоты

$$\begin{aligned} Q = Lm &= L \frac{l^2 h}{4\pi} \frac{M}{R} \left(\frac{\eta p_{25}}{T_{25}} - \frac{p_{18}}{T_{18}} \right) = \\ &= 2,3 \cdot 10^6 \frac{(56 \cdot 10^3)^2 \cdot 100 \cdot 18 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 8,31} \left(\frac{0,8 \cdot 3,17 \cdot 10^3}{273 + 25} - \frac{2,07 \cdot 10^3}{273 + 18} \right) = \\ &= 1,7 \cdot 10^{14} \text{ Дж} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ ГКал} \end{aligned} \quad (4)$$

Что в «рублевом исчислении составляет $BP = 4 \cdot 10^4 \cdot 80 \cdot 10^3 = 3,2 \text{ млрд. руб.}$

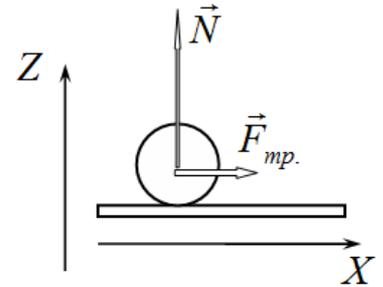
Задание 2. Удар и трение.

В 9 классе в курсе физики вы изучали две простейших модели удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. В этом задании вам предстоит рассмотреть более сложные модели ударов, в ходе которых существенную роль играет сила трения, действующая во время удара.

Часть 1. Равны ли угол падения и угол отражения?

1.1 Во время удара на шарик постоянно действует сила трения. Для вертикальной и горизонтальной компонент вектора скорости на основании второго закона Ньютона можно записать уравнения

$$\begin{aligned} m \frac{\Delta v_z}{\Delta t} &= N \\ m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= \mu N \end{aligned} \quad (1)$$



Из этих уравнений следует, что

$$\Delta v_x = \mu \Delta v_z \quad (2)$$

Так как вертикальная компонента только изменяется свой знак, то $\Delta v_z = 2v_0$, следовательно, шарик приобретет в горизонтальном направлении скорость $v_x = 2\mu v_0$.

Следовательно, шарик отпрыгнет под углом

$$\alpha = \arctg(2\mu) \quad (3)$$

к вертикали. Кажущееся увеличение кинетической энергии шарика связано с замедлением его вращения вокруг собственной оси.

1.2. Аналогично предыдущему пункту запишем уравнения для изменения вертикальной и горизонтальной компонент скорости шарика

$$\begin{aligned} m \frac{\Delta v_z}{\Delta t} &= N \\ m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= -\mu N \end{aligned} \quad (4)$$

Или в данном случае

$$\Delta v_x = -\mu \Delta v_z \quad (5)$$

Учитывая начальные и конечные значения компонент скорости шайбы, получим

$$v_{x1} - v_0 \cos \alpha = -2\mu v_0 \sin \alpha \quad (6)$$

Откуда следует, что горизонтальная компонента скорости станет равной

$$v_{x1} = v_0 \cos \alpha - 2\mu v_0 \sin \alpha \quad (7)$$

Поэтому шайба отпрыгнет под углом

$$\beta = \arctg \frac{v_z}{v_{x1}} = \arctg \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} = \arctg \frac{\sin \alpha}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} \approx 31,5^\circ \quad (8)$$

Часть 2. Неупругий удар.

Законы изменения компонент скорости шайбы в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} m \frac{\Delta v_z}{\Delta t} &= N - mg \\ m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= -\mu N \end{aligned} \quad (9)$$

Проводя суммирование по малым промежуткам времени Δt_i , на которые разбивается время удара, получим

$$\begin{aligned} m\Delta v_z &= \sum_i N_i \Delta t_i - mg\tau \\ m\Delta v_x &= -\mu \sum_i N_i \Delta t_i \end{aligned} \quad (10)$$

Где τ - полное время удара.

Учитывая, что в данной модели $\Delta v_z = v_0 \sin \alpha$, получим выражение для горизонтальной компоненты скорости шайбы после окончания удара (то есть после того как прекратилось вертикальное движение центра масс шайбы):

$$v_{x1} = v_0 \cos \alpha - \mu v_0 \sin \alpha - \mu g \tau. \quad (11)$$

В дальнейшем шайба скользит с постоянным ускорением $a = -\mu g$, поэтому закон изменения ее скорости имеет вид

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos \alpha - \mu v_0 \sin \alpha - \mu g \tau - \mu g(t - \tau) = \\ &= v_0 \cos \alpha - \mu v_0 \sin \alpha - \mu g t \end{aligned} \quad (12)$$

Откуда следует, что время движения шайбы до остановки равно

$$t = \frac{v_0 \cos \alpha - \mu v_0 \sin \alpha}{\mu g} \approx 8,2 \text{ с}. \quad (13)$$

Машина по изготовлению льда. Решение

1. Подготовка

1.1. В исходном состоянии давление, температура и объём газа равны соответственно p_0 , $T_{\text{комн}}$, V_1 . Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$p_0 V_1 = \nu R T_{\text{комн}} \quad (1)$$

Откуда следует:

$$\nu = \frac{p_0 V_1}{R T_{\text{комн}}} = \frac{101 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 293 \text{ К}} = 0,207 \text{ моль}$$

1.2. При адиабатическом «растягивании» на первом этапе газ будет охлаждаться. Далее, за счёт теплообмена с водой, он будет иметь возможность заморозить её, только если температура газа окажется ниже температуры замерзания воды.

Пусть после увеличения объёма газа до V_2 на первом этапе температура газа стала равной T^* . Тогда необходимым условием для изготовления льда будет $T^* < T_{\text{л}}$. Так как процесс на первом этапе адиабатический, то справедливо соотношение:

$$T_{\text{комн}} V_1^{\gamma-1} = T^* V_2^{\gamma-1} \quad (4)$$

Условию $T^* < T_{\text{л}}$ тогда соответствует:

$$V_2 > V_1 \left(\frac{T_{\text{комн}}}{T_{\text{л}}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (5)$$

То есть минимальный объём:

$$V_{2 \text{ min}} = V_1 \left(\frac{T_{\text{комн}}}{T_{\text{л}}} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \left(\frac{293 \text{ К}}{273 \text{ К}} \right)^{\frac{1}{\frac{7}{5}-1}} = 5,97 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 5,97 \text{ л}$$

2. Кристаллизация

2.1. Примерная диаграмма, иллюстрирующая описанный процесс, изображена на рис. 1

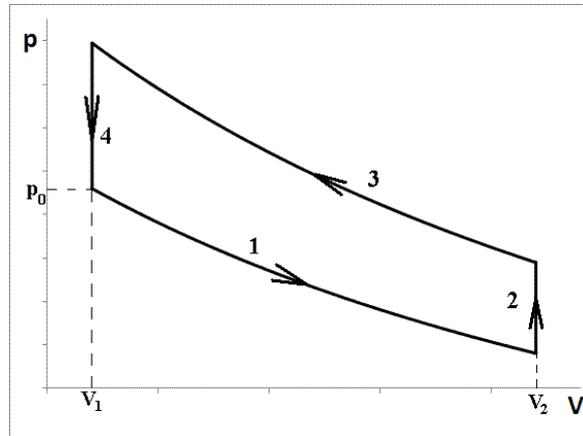


Рисунок 1

Участок 1 – адиабатическое сжатие до объёма V_2 , далее на участке 2 газ изохорно нагревается за счёт теплообмена с замерзающей водой. Теплообмен идёт до тех пор, пока температура газа не сравняется с температурой кристаллизации воды $T_{\text{л}}$. Далее участок 3 представляет собой адиабатическое сжатие до начального объёма V_1 . Наконец, участок 4 – изохорное охлаждение газа до комнатной температуры.

2.2. Используя постоянство произведения $TV^{\gamma-1}$ для адиабатического процесса на участке 1, найдём температуру газа T^* в конце данного участка:

$$T^* = T_{\text{комн}} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 293 \text{ К} \cdot \left(\frac{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{7,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} \right)^{\frac{7}{5}-1} = 256,10 \text{ К} \quad (6)$$

(Запасные цифры после запятой взяты не из соображений физической точности, а для того, чтобы уменьшить вклад погрешности округлений, способных оказать значительное влияние на результат в данной задаче).

Далее на участке 2 будет происходить изохорный теплообмен между газом и замерзающей водой, пока газ не нагреется до $T_{\text{л}}$. Запишем уравнение теплового баланса.

$$C_V(T_{\text{л}} - T^*) = \lambda \Delta m \quad (7)$$

Тогда масса льда, образующегося за один цикл равна:

$$\Delta m = \frac{C_V(T_{\text{л}} - T^*)}{\lambda} = \frac{4,30 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot (273,00 \text{ К} - 256,10 \text{ К})}{3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}} = 0,220 \text{ г}$$

2.3. Чтобы заморозить всю воду в стакане, необходимо произвести количество циклов:

$$N = \frac{m}{\Delta m} = \frac{0,20 \text{ кг}}{0,220 \cdot 10^{-3} \text{ кг}} = 909 \quad (8)$$

2.4. После прохождения одного цикла газ возвращается в исходное состояние, значит изменение внутренней энергии газа за один цикл равно нулю. Тогда, исходя из первого начала термодинамики, работа, которую Федя совершает над газом, расходуется на теплопередачу другим телам. Для изучаемого цикла:

$$A = Q_{\text{окр}} - Q_{\text{воды}} \quad (9)$$

где $Q_{\text{окр}}$ – количество теплоты, отданное в окружающую среду на 4 этапе цикла, $Q_{\text{воды}}$ – количество теплоты, полученное при кристаллизации воды на 2-м участке цикла. Выражение для $Q_{\text{воды}}$ мы уже записали в (7), чтобы рассчитать $Q_{\text{окр}}$ необходимо сначала найти температуру газа после окончания третьего этапа цикла. Для этого применим условие постоянства $TV^{\gamma-1}$ к адиабатическому сжатию газа. Температура T^{**} в конце сжатия оказывается равной:

$$T^{**} = T_{\text{л}} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = 273 \text{ К} \cdot \left(\frac{7,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} \right)^{\frac{5}{3}-1} = 312,33 \text{ К} \quad (10)$$

Тогда из (9) получаем выражение для работы, совершаемой Федей за один цикл:

$$A = C_V(T^{**} - T_{\text{кюппинг}}) - C_V(T_{\text{л}} - T^*) = C_V(T^* + T^{**} - T_{\text{кюппинг}} - T_{\text{л}}) \quad (11)$$

$$A = 4,30 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} (256,10 \text{ К} + 312,33 \text{ К} - 293,00 \text{ К} - 273,00 \text{ К}) = 10,45 \text{ Дж}$$

2.5. Логичным и естественным способом введения КПД для холодильника является подсчет количества энергии, забираемого у охлаждаемого тела по отношению к совершённой работе. В нашем случае это равно $\eta = \frac{Q_{\text{воды}}}{A}$. Данная величина действительно описывает эффективность холодильной машины: из двух устройств выгоднее то, у которого η больше. Однако, непривычное в таком определении КПД то, что он, вообще говоря, может оказаться большим единицы. Тем не менее, именно указанный способ подсчёта мы и будем использовать в дальнейшем. Получаем:

$$\eta = \frac{Q_{\text{воды}}}{A} = \frac{C_V(T_{\text{л}} - T^*)}{A} = \frac{4,30 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} (273,00 \text{ К} - 256,10 \text{ К})}{10,45 \text{ Дж}} = 6,95 = 695 \% \quad (12)$$

Еще раз отметим, что данный результат вполне корректен, а столь большое значение получилось вследствие введённого определения КПД. Нет никаких причин требовать КПД быть меньшим единицы: действительно, ведь $Q_{\text{воды}}$ представляет собой не часть расходов энергии, на которые «тратится» совершённая работа A , а, наоборот, является поступлением теплоты в рабочий газ.

2.6. Максимальную силу F_{max} Феде придётся приложить к поршню в тот момент, когда давление газа будет максимально отличаться от атмосферного. Из P-V диаграммы процесса (рис. 1) замечаем, что это может произойти в конце этапа 1 или этапа 3 цикла. Давление p^* в конце этапа 1 найдём из уравнения состояния идеального газа:

$$p^* = \frac{\nu RT^*}{V_2} = \frac{0,207 \text{ моль} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 256,10 \text{ К}}{7,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 6,29 \cdot 10^4 \text{ Па} \quad (13)$$

Аналогично давление p^{**} в конце этапа 3 равно:

$$p^{**} = \frac{\nu RT^{**}}{V_2} = \frac{0,207 \text{ моль} \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 312,33 \text{ К}}{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3} = 1,07 \cdot 10^5 \text{ Па} \quad (14)$$

Сила, которую прикладывает Федя, с учётом атмосферного давления, действующего на поршень снаружи, будет равна:

$$F = |p - p_0|S \quad (15)$$

В двух рассматриваемых состояниях получаем:

$$F^* = |p^* - p_0|S = |6,29 \cdot 10^4 \text{ Па} - 10,1 \cdot 10^4 \text{ Па}| \cdot 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 304 \text{ Н}$$

$$F^{**} = |p^{**} - p_0|S = |1,07 \cdot 10^5 \text{ Па} - 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}| \cdot 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 48,0 \text{ Н}$$

Таким образом, $F_{\max} = 304 \text{ Н}$.

Из п.2.4 нам известна работа, совершаемая Федей за один цикл. При этом поршень проходит путь равный:

$$l = 2 \frac{V_2 - V_1}{S} = 2 \frac{7,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 - 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{8,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 0,50 \text{ м} \quad (16)$$

Средний модуль силы тогда можно найти через выражение для работы силы.

$$F_{\text{ср}} = \frac{A}{l} = \frac{8,6 \text{ Дж}}{0,50 \text{ м}} = 17,2 \text{ Н} \quad (17)$$

3. Охлаждение и кристаллизация

3.1. Второй этап цикла длится до наступления теплового равновесия. В предыдущей части задачи оно наступало, когда рабочий газ нагревался до температуры кристаллизации T_L воды. Теперь во время теплообмена с рабочим газом вода будет охлаждаться, и конечная температура установившегося теплового равновесия в конце второго этапа цикла заранее неизвестна. Более того, в результате охлаждения на данном этапе, в начале каждого цикла вода будет находиться при меньшей температуре, чем на предыдущем. Значит, и температура установившегося теплового равновесия будет с каждым циклом уменьшаться. Согласно уравнению состояния идеального газа, при постоянном объёме с температурой будет уменьшаться и давление. Таким образом, общий вид диаграммы процесса для трёх последовательных циклов приведён на рис. 2.

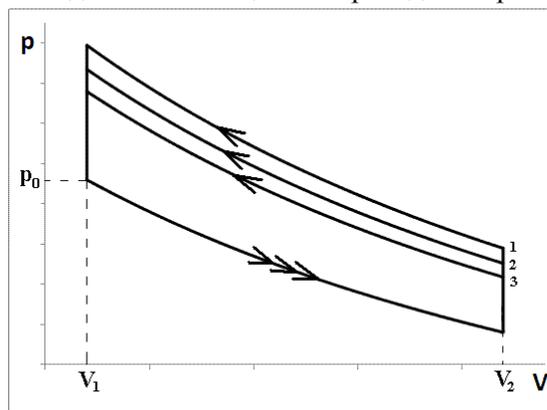


Рисунок 2

Температура равновесного состояния и давление в конце второго этапа будут падать с каждым последующим циклом до тех пор, пока не будет достигнута температура кристаллизации воды. Дальше процесс пойдёт аналогично рассмотренному в предыдущем пункте задачи.

3.2. Уравнение теплового баланса (7) в данном случае примет вид:

$$C_V(T_{n+1} - T^*) = c_2 m (T_n - T_{n+1}) \quad (18)$$

Откуда можно выразить искомую зависимость:

$$T_{n+1} = \frac{c_E m T_n + C_V T^*}{c_E m + C_V} \quad (19)$$

где значение T^* было найдено в п.2.2 – уравнение (6).

3.3. Выражение (19) можно переписать в следующем виде:

$$T_{n+1} = \frac{c_E m T_n - c_E m T^* + c_E m T^* + C_V T^*}{c_E m + C_V} = \frac{c_E m (T_n - T^*)}{c_E m + C_V} + T^*$$

$$T_{n+1} - T^* = \frac{c_E m (T_n - T^*)}{c_E m + C_V}$$

Вводя новую величину $x_n \equiv T_n - T^*$, получим связь x_{n+1} и x_n , описывающую геометрическую прогрессию: $x_{n+1} = q x_n$, где знаменатель равен:

$$q = \frac{c_E m}{c_E m + C_V} = \frac{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,20 \text{ кг}}{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,20 \text{ кг} + 4,30 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}} = 0,995$$

Чтобы найти количество циклов до начала замерзания воды, необходимо найти номер члена данной прогрессии, при котором T_n станет равным температуре кристаллизации воды T_n . Подставляя начальную и конечную температуры, имеем для величины x :

$$x_0 = T_{\text{комн}} - T^* = 293 \text{ К} - 256,10 \text{ К} = 36,90 \text{ К}$$

$$x_N = T_n - T^* = 273 \text{ К} - 256,10 \text{ К} = 16,90 \text{ К}$$

Так как $x_N = x_0 q^N$, получаем:

$$q^N = \frac{x_N}{x_0}$$

$$(0,995)^N = 0,458$$

Необходимо из данного уравнения найти N . В математике функция, позволяющая найти степень при известном основании и результату возведения, называется логарифмом. Однако, даже не используя подобную терминологию, ответ можно подобрать, используя инженерный калькулятор: пробуя степени сначала грубо (50, 100, 150, 200), затем около искомого значения более точно. Можно обнаружить, что наиболее точно подходит значение $N = 156$.

Наконец, грубую оценку величины N можно получить и без калькулятора. Записав возведение в виде $(0,995)^N = (1 - 0,005)^N$ и воспользовавшись приближённой формулой $(1 + x)^x \approx 1 + ax$ для малых x , получим $1 - 0,005N \approx 0,458$. Откуда следует $N \approx 108$.

Чтобы обратить в лёд всю воду, необходимо к найденному количеству циклов N охлаждения воды прибавить количество циклов, необходимых для её замораживания из предыдущей части задачи.

$$N_{\text{полн}} = N + N_{\text{замораж}} = 156 + 909 = 1065$$

3.4. Для нахождения КПД необходимо посчитать работу Феи и количество теплоты, забираемой у воды за цикл при её охлаждении.

Температура после адиабатического сжатия (третьего этапа цикла) теперь уже будет зависеть от номера цикла – T_n^{**} , как и температура равновесного состояния газ-вода.

Однако связь между ними останется всё той же, определяемой формулой (10). Выражение (11) для работы Феи также остаётся справедливым, если учесть зависимость от номера цикла:

$$A_n = C_V (T^* + T_n^{**} - T_{\text{комн}} - T_n) \quad (20)$$

Подставляя выражения (6) и (10) для температур со звёздочками, получаем:

$$A_n = C_V \left(T_{\text{комн}} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - T_{\text{комн}} + T_n \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} - T_n \right) = C_V \left(T_{\text{комн}} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - T_n \right) \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \right) \quad (21)$$

Количество теплоты, забираемой у воды за один цикл, равно:

$$Q_{\text{н воды}} = C_V(T_{\text{н}} - T^*) = C_V\left(T_{\text{н}} - T_{\text{комн}}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right) \quad (22)$$

Таким образом, КПД за один цикл оказывается равным:

$$\eta = \frac{Q_{\text{н воды}}}{A_{\text{н}}} = \frac{C_V\left(T_{\text{н}} - T_{\text{комн}}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)}{C_V\left(T_{\text{комн}}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - T_{\text{н}}\right)\left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1} \quad (23)$$

Что важно, оказалось, КПД не зависит от температур и номера цикла, а определяется только максимальным и минимальным объёмом газа в ходе процесса. Данное выражение для η можно было получить и в предыдущей части задачи с замерзанием воды, однако там, ввиду постоянства температур, в нём не было необходимости. И действительно, подставив числовые значения, получим тот же результат (с точностью до погрешности округления):

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{7,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}\right)^{\frac{7}{5}-1} - 1} = 6,94 = 694 \%$$

3.5. Чтобы всю воду превратить в лёд, нужно отвести от неё количество теплоты:

$$Q_{\text{полн}} = c_{\text{в}} m (T_{\text{комн}} - T_{\text{л}}) + \lambda m \quad (24)$$

Так как КПД процесса оказывается постоянным, работу, которую необходимо затратить Феде для заморозки воды, можно рассчитать по формуле:

$$A_{\text{полн}} = \frac{Q_{\text{полн}}}{\eta} = \frac{c_{\text{в}} m (T_{\text{комн}} - T_{\text{л}}) + \lambda m}{\eta} \quad (25)$$

$$A_{\text{полн}} = \frac{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0,2 \text{ кг} \cdot (393 \text{ К} - 373 \text{ К}) + 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0,2 \text{ кг}}{6,94} = 11,9 \text{ кДж}$$

Задание 1. Колеблющиеся поплавки.**Часть 1. Сферический поплавок.**

1.1 При малом отклонении от положения равновесия уравнения движения центра шара имеет вид

$$ma = -\Delta F_A . \quad (1)$$

где $m = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ - масса шара (равная силе

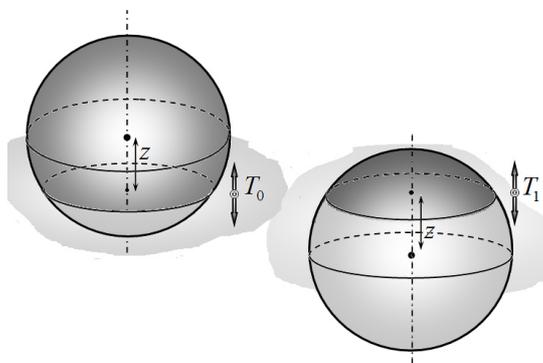
Архимеда в положении равновесия), $\Delta F_A = \pi r^2 x \rho g$ - изменение силы Архимеда при отклонении от положения равновесия на малую величину x , $r^2 = R^2 - z^2$ - квадрат радиуса сечения шара на уровне воды в положении равновесия. Подстановка этих выражений в уравнение приводит к уравнению

$$\frac{1}{3} \pi R^3 \rho a = -\pi (R^2 - z^2) x \rho g \Rightarrow a = -\frac{3(R^2 - z^2)g}{R^3} x , \quad (2)$$

Которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{3(R^2 - z^2)g}} \quad (3)$$

1.2 При изменении массы шара в 3 раза в уравнении (1) ничего кроме массы не изменилось, поэтому период колебаний возрастет в $\sqrt{3}$ раз.

**Часть 2. Цилиндрический поплавок.**

2.1 Для устойчивого плавания центр масс должен находиться ниже центра плавучести (то есть центра масс вытесненной жидкости), то есть ниже половины погруженной части. Иными словами, расстояние от нижнего основания цилиндра до центра масс должно быть меньше чем

$$z < \frac{1}{3} L . \quad (1)$$

2.2 Уравнение движения поплавка при малом отклонении от положения равновесия имеет вид

$$ma = -\Delta F_A . \quad (2)$$

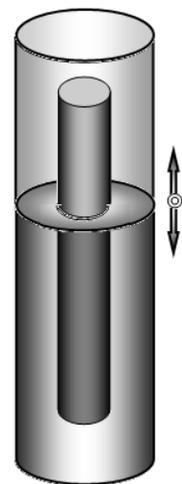
Здесь $m = \frac{2}{3} SL\rho$, $\Delta F_A = S\rho g x$. Подставляя в уравнение (2), получим.

$$\frac{2}{3} SL\rho a = -S\rho g x \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \frac{g}{L} x .$$

Следовательно, период малых колебаний поплавка равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}} \quad (3)$$

2.3 В этом случае необходимо учесть движение воды и изменение ее потенциальной энергии при движении стержня. Поэтому для решения задачи лучше воспользоваться уравнением закона сохранения энергии. Не сложно заметить, что площадь поперечного сечения воды между цилиндрическим поплавком и стенками сосуда в 3 раза больше



поперечного сечения поплавок $S = 3S_0$. Поэтому если поплавок опускается вниз со скоростью v_0 , то вода в объеме $3S_0 \cdot \frac{2}{3}L = 2S_0L$ поднимается вверх со скоростью $\frac{v_0}{3}$.

Следовательно, в этом случае кинетическая энергия системы оказывается равной:

$$E = \frac{m_{\text{поплавок}} v_0^2}{2} + \frac{m_{\text{воды}} \left(\frac{v_0}{3}\right)^2}{2} = \rho \frac{v_0^2}{2} \left(\frac{2}{3}LS_0 + \frac{2}{9}LS_0\right) = \frac{4}{9}LS_0\rho v_0^2. \quad (4)$$

При опускании цилиндра его потенциальная энергия уменьшается на величину

$$\Delta U = -mgx = -\frac{2}{3}LS_0\rho gx \quad (5)$$

При этом слой воды, находившийся под цилиндром (толщиной x), должен подняться на высоту цилиндра и растечься по свободной поверхности, занимая слой толщиной $\frac{x}{3}$.

Поэтому изменение потенциальной энергии этой воды равно

$$\Delta U = \rho S_0 gx \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{3}L + \frac{x}{6}\right). \quad (6)$$

Таким образом, суммарное изменение потенциальной энергии системы равно

$$\Delta U = \frac{2}{3}\rho S_0 gx^2. \quad (7)$$

С учетом проведенных расчетов, уравнение закона сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{4}{9}LS_0\rho v_0^2 + \frac{2}{3}\rho S_0 gx^2 = \text{const} \quad (8)$$

Из которого следует, что период колебаний поплавок в сосуде становится равным

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{3L}{2g}} \quad (9)$$

То есть возрастает в полтора раза.

Задание 2. Бенгальский огонь¹

Часть 1. «Механический огонь»

1.1 Рассмотрим поворот дуги угловой величиной 2α и линейной плотностью λ на малый угол γ , ($\gamma \rightarrow 0$) от вертикали (рис. 1).

Поскольку можно считать, что масса всей дуги $m = \lambda \Delta l = \lambda 2\alpha R$ сосредоточена в её центре масс (некоторой точке C) на расстоянии $r = OC$ от оси вращения O , то при таком повороте центр масс поднимется на высоту $h = r(1 - \cos \gamma)$ относительно начального положения (точка C' на рис. 1).

Это приведёт к увеличению потенциальной энергии системы на величину

$$E^{\text{II}} = mgh = \lambda 2\alpha Rgr(1 - \cos \gamma), \quad (1)$$

С учетом того, что при малых углах $1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \left(\frac{\gamma}{2} \right) \approx \frac{\gamma^2}{2}$, выражение (1) можно преобразовать к виду

$$E^{\text{II}} = mgh = \lambda \alpha Rgr\gamma^2. \quad (2)$$

Однако, с другой стороны можно считать, что при таком повороте изменилась энергия только выделенных на рисунке 1 участков AD и BE дуги. Иными словами, увеличение потенциальной энергии соответствует переходу участка дуги из положения AD в положение BE . При этом масса $m_{AD} = \lambda l_{AD} = \lambda \gamma R$ поднялась на высоту $\Delta h = l_{AD} \sin \alpha = \gamma R \sin \alpha$, (см. рис. 1) что соответствует приращению энергии

$$E^{\text{II}} = m_{AD} g l_{AD} \sin \alpha = \lambda \gamma R g \gamma R \sin \alpha = \lambda \gamma^2 R^2 g \sin \alpha. \quad (3)$$

Приравнивая выражения (2) и (3), получаем искомое выражение

$$\lambda \alpha Rgr\gamma^2 = \lambda \gamma^2 R^2 g \sin \alpha \Rightarrow r = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R. \quad (4)$$

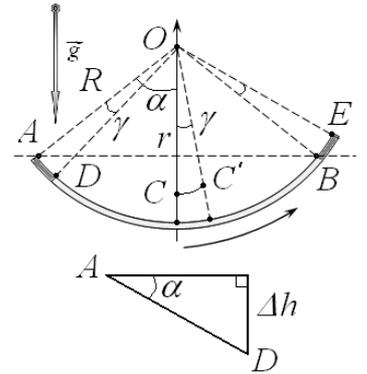


Рис. 1. Вычисление центра масс однородной дуги

¹ Задача допускает и более короткое решение, кроме того, в решении есть пункты, которые отсутствуют в окончательном варианте условия. Но автор очень старался!

1.2 Рассмотрим положение огня (точки горения) через промежуток времени t . Пусть к этому моменту времени сгорела дуга AB , тогда точка горения прошла по дуге AB расстояние $l = vt$, что соответствует

углу поворота огня на угол $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{vt}{R} = \omega t$,

где $R = OA$ – радиус кольца (Рис. 2). Если масса единицы длины (линейная плотность)

кольца $\lambda = \frac{m}{2\pi R}$, то в силу однородности

кольца сгоревшую массу найдем как

$$m_{AB} = \lambda \cdot l = \lambda R \alpha. \quad (5)$$

Заметим, что центр тяжести симметричных дуг AE и BD при движении точки горения всегда лежит в геометрическом центре кольца – точке O ., поскольку их массы одинаковы. Центр тяжести «нескомпенсированной» дуги DE – точка F лежит на биссектрисе угла EOD ($E\hat{O}F = \frac{\alpha}{2}$), причём согласно

первому пункту задачи можем записать

$$OF = 2R \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha}. \quad (6)$$

Таким образом, центр тяжести системы в рассматриваемый момент времени лежит на отрезке OF на некотором расстоянии $OC = r_C$ от начала координат. Учитывая, что массы соответствующих дуг

$$m_{EB} = m_{AB} = \lambda R \alpha, \quad m_{AE} = m_{BD} = \lambda R (\pi - \alpha) \quad (7)$$

можно «собрать» в точках O и F , искомое расстояние r_C найдем достаточно стандартным образом

$$r_C = \frac{m_{EB}}{m_{EB} + 2m_{AE}} OF = \frac{\alpha}{\alpha + 2(\pi - \alpha)} \cdot 2R \frac{\sin(\alpha/2)}{\alpha} = 2R \frac{\sin(\alpha/2)}{2\pi - \alpha}. \quad (8)$$

Как следует из (8), формулой, приведенной в условии для вычисления положения центра масс однородной дуги, можно пользоваться и в начальный период горения кольца, хотя проверить это никогда не помешает.

Подчеркнем, что поскольку центр масс системы находится на биссектрисе угла EOD , то угловая скорость вращения центра масс вокруг начала координат в два раза меньше угловой скорости вращения $\omega = v/R$ точки горения, т.е.

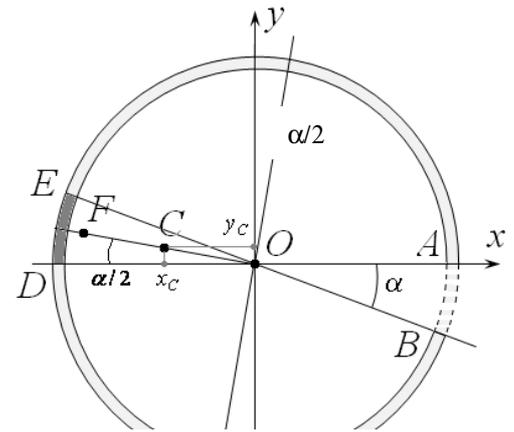


Рис. 2. Вычисление центра масс кольца при горении

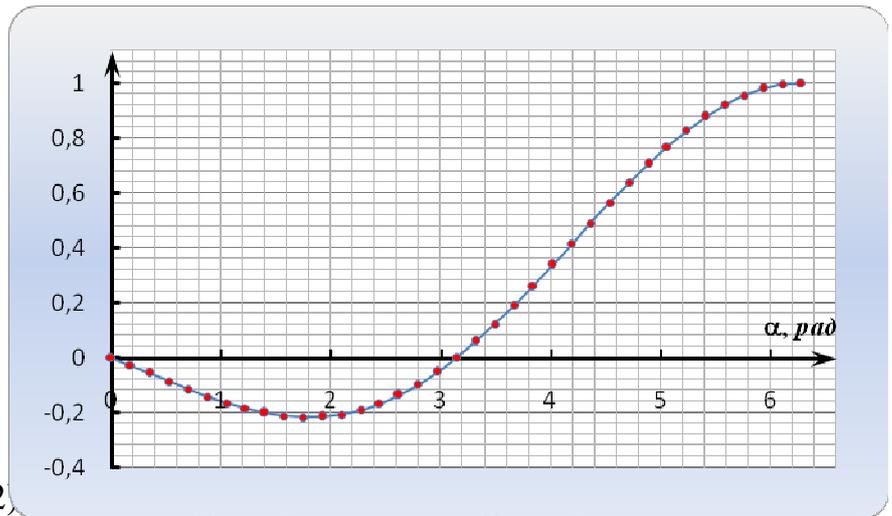
$$\omega_C = \frac{\omega}{2} = \frac{v}{2R}. \quad (9)$$

Это означает, что при полном сгорании кольца (т.е. при повороте точки горения на угол $\alpha = 2\pi$) угол поворота центра масс системы будет в два раза меньше

$$\alpha_C = \frac{2\pi}{2} = \pi. \quad (10)$$

С учётом этого обстоятельства, координаты центра тяжести системы в рассматриваемый момент времени найдем как

$$x_C = -r_C \cos(\alpha/2),$$



(11) Рис. 3. Зависимость $x_C^*(\alpha)$

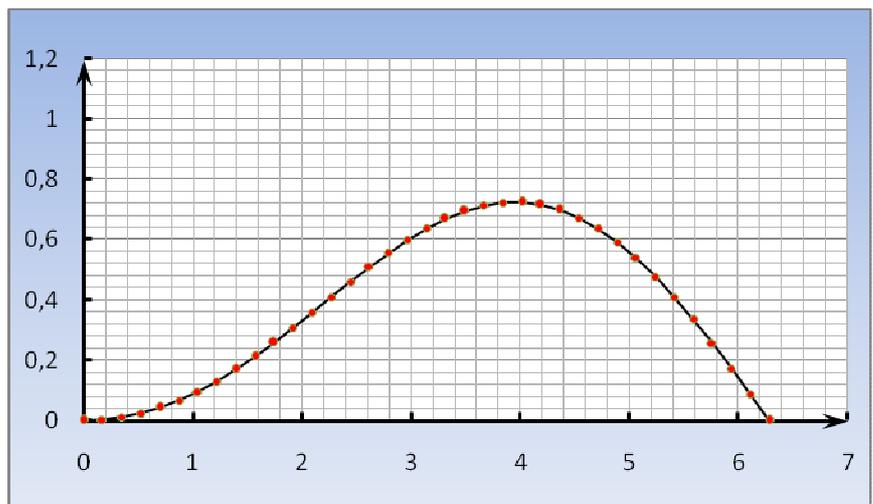
$$y_C = r_C \sin(\alpha/2) = 2R \frac{\sin(\alpha/2)\sin(\alpha/2)}{2\pi - \alpha} = 2R \frac{\sin^2(\alpha/2)}{2\pi - \alpha}. \quad (12)$$

1.3 Для построения графиков функций $x_C(\alpha)$ и $y_C(\alpha)$ удобно ввести безразмерные

координаты $x^* = \frac{x_C}{R}$

и $y^* = \frac{y_C}{R}$,

меняющиеся в пределах $[-1; 1]$. В этих координатах построим графики полученных функций (11) и (12).



Для этого разобьем полный угол поворота точки горения на интервалы по $\Delta\alpha = 10^\circ$ и заполним Таблицу 1 для функции (11) и по ней построим график.

Аналогично заполняем таблицу и строим график для функции (12).

Для наглядного представления об изменении положения центра масс со временем достаточно интересно построить оба графика в одних координатах.

Для удобства анализа на рисунке **Рис. 4. Зависимость $y^*_C(\alpha)$** ⁵ одновременно представлены зависимости $x^*(\alpha)$, $y^*(\alpha)$.

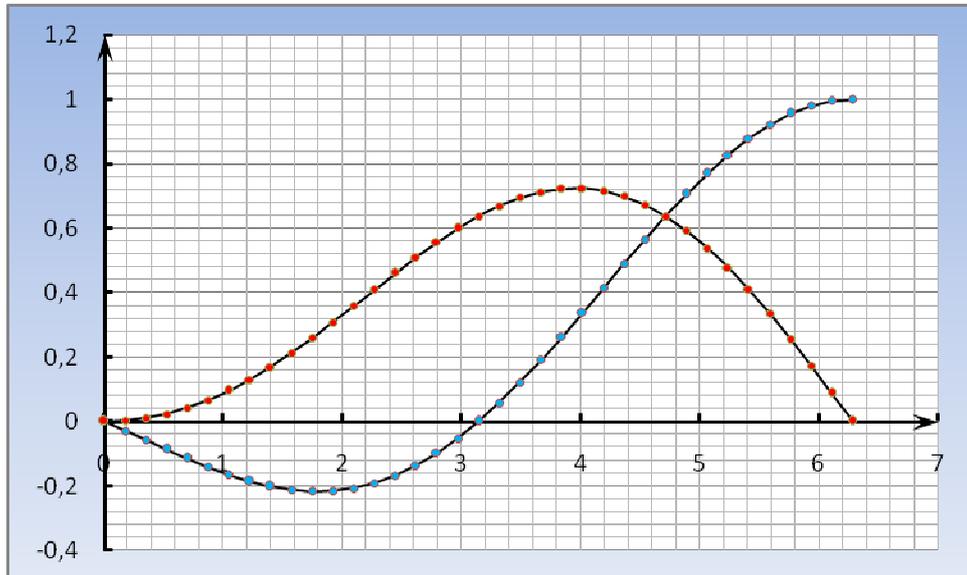


Рис. 5. Зависимости координат $x_C^*(\alpha)$, $y_C^*(\alpha)$ центра масс от угла (в радианах)

1.4 Используя точки для полученных зависимостей $x^*(\alpha)$, $y^*(\alpha)$, построим траекторию центра масс в течение всего процесса движения точки горения. Математически нам следует построить зависимость $y^*(x^*)$, исключив α из уравнений (11) и (12), однако проще это сделать непосредственно графически. Результат построения представлен на рисунке 6.

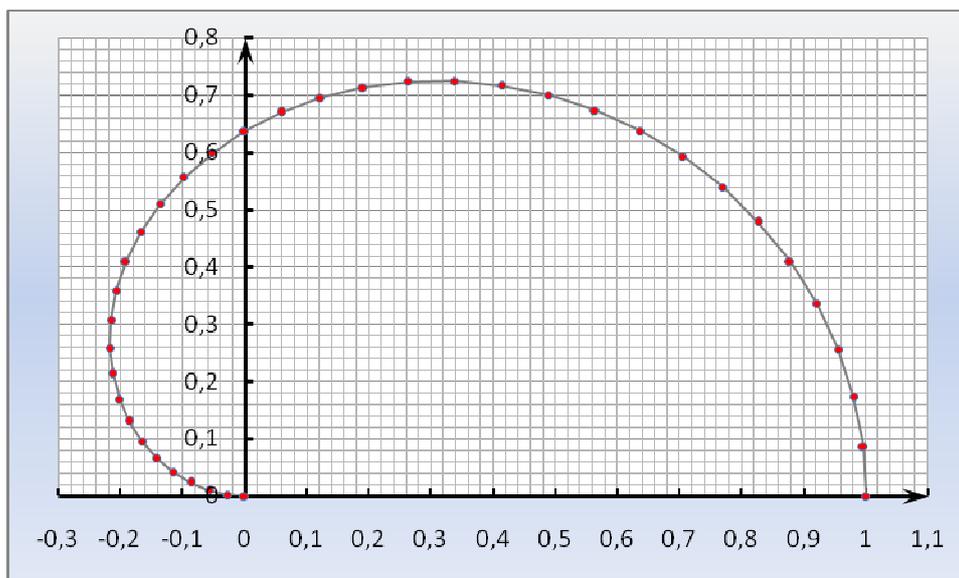


Рис. 6. Траектория центра масс при горении

Таким образом, центр масс горящего кольца описывает достаточно своеобразную кривую, общий вид которой представлен на Рис. 6.

Она начинается в центре кольца (точка O), а заканчивается непосредственно на самом кольце, попадая в точку начала горения (точка A) с «другой стороны». Это движение обусловлено как изменением формы тела, так и уменьшением его массы.

1.5 Максимальные смещения центра масс $x_{C \max}$ и $y_{C \max}$ горящего кольца вдоль соответствующих осей определим непосредственно из построенных графиков, приведенных на рисунках 2 и 3.

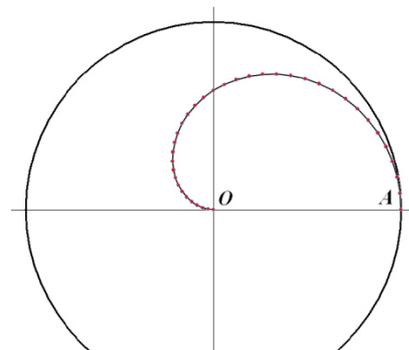


Рис. 7. Общий вид траектории центра масс при горении

$$x_{C \max} = |-0,22 R| = (22 \pm 2) \text{ см}, \quad (13)$$

$$y_{C \max} = 0,72 R = (72 \pm 2) \text{ см}. \quad (14)$$

В качестве оценки погрешности при записи (13) и (14) взято значение «одной клеточки» на рисунке 6.

Подчеркнём, что для аналитического нахождения данных величин необходимо численно решить трансцендентные уравнения, получающиеся в результате дифференцирования (11) и (12)

$$\begin{aligned} x_{C \max} : \quad \tan \alpha &= \alpha - 2\pi, & 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ y_{C \max} : \quad \tan(\alpha/2) &= \alpha - 2\pi, & 0 \leq \alpha \leq 2\pi \end{aligned} \quad (15)$$

Решение системы (15) методом Ньютона (касательных) приводит к значениям:

$$\text{для } x_{C \max} : \alpha = 1,79 \text{ рад, } x_{C \max} = -0,217 R, \quad (16)$$

$$\text{а для } y_{C \max} : \alpha = 3,95 \text{ рад, } y_{C \max} = 0,725 R, \quad (17)$$

что отлично согласуется со значениями (13) и (14), полученными графически.

1.6 Как следует из Рис. 7, в начальный момент (промежуток) времени скорость \vec{v}_1 центра масс горящего кольца направлена по касательной к траектории в точке O , т.е. против оси Ox (Рис. 8). Это означает, что на этом этапе «вертикальной» компонентой скорости v_{1y} можно пренебречь.

Следовательно, искомая скорость v_1 центра масс будет равна производной по времени от соответствующей координаты (11)

$$v_1 = v_{1x} = x'_C \Big|_{\alpha=0} = \left(-R \frac{\sin \alpha}{2\pi - \alpha} \right)_{\alpha=0}. \quad (18)$$

По правилам дифференцирования частного функций получим

$$\left(-R \frac{\sin \alpha}{2\pi - \alpha} \right)' = -R \frac{\cos \alpha \cdot \alpha' (2\pi - \alpha) + \alpha' \cdot \sin \alpha}{(2\pi - \alpha)^2} \Big|_{\alpha=0} = -\frac{\alpha' \cdot R}{2\pi} = -\frac{v}{2\pi}, \quad (19)$$

где v – скорость движения точки горения. Заметим, что при записи (19) учтено, что производная от угла α по времени есть угловая скорость $\alpha' = \omega$ движения точки горения вокруг начала координат. Расчет по формуле (19) даёт

$$v_1 = -1,6 \frac{\text{мм}}{\text{с}}. \quad (20)$$

Подчеркнём, что этот же результат (20) можно получить и без производных, более традиционным «школьным» способом – рассматривая моменты сил тяжести относительно центра кольца при малом смещении точки горения.

Аналогичным образом можем найти скорость центра масс \vec{v}_2 горящего кольца в момент времени, когда сгорела его половина, только в этом случае нельзя пренебрегать вертикальным компонентом скорости v_{2y} центра масс.

Действительно, на Рис. 8 вектор скорости \vec{v}_2 направлен по касательной к траектории в точке A , наклон которой к оси абсцисс (т.е. угол β) хорошо заметен даже «на глаз».

Расчет по формулам для соответствующих производных ((11) и (12)) даёт

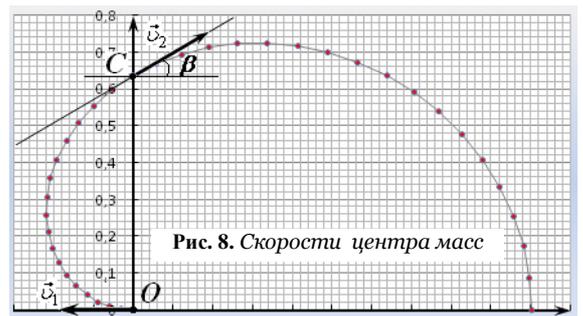


Рис. 8. Скорости центра масс

$$v_{2x} = -R \frac{\cos \alpha \cdot \alpha' (2\pi - \alpha) + \alpha' \cdot \sin \alpha}{(2\pi - \alpha)^2} \Big|_{\alpha=\pi} = \frac{\alpha' \cdot R}{\pi} = \frac{v}{\pi}, \quad (21)$$

$$v_{2y} = 2R\alpha' \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sin(\alpha/2) + (2\pi - \alpha) \cdot \cos(\alpha/2)}{(2\pi - \alpha)^2} \Big|_{\alpha=\pi} = \frac{2\alpha' \cdot R}{\pi^2} = \frac{2v}{\pi^2}, \quad (22)$$

Полную скорость центра масс кольца найдем по теореме Пифагора

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \frac{v}{\pi^2} \sqrt{4 + \pi^2} = 3,8 \frac{\text{мм}}{\text{с}}, \quad (23)$$

Для задания направления вектора \vec{v}_2 вычислим угол β , который вектор составляет с «горизонтом»

$$\beta = \arctg\left(\frac{v_{2y}}{v_{2x}}\right) = \arctg\left(\frac{2}{\pi}\right) = 32^\circ. \quad (24)$$

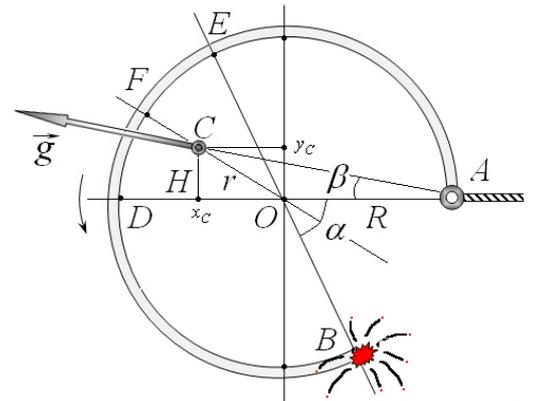


Рис. 9. Поворот подвешенного кольца

В принципе этот же угол с неплохой точностью можно найти «по клеточкам» из Рис. 8, поскольку он определяется угловым коэффициентом касательной к графику в точке A.

1.7 В процессе «медленного» горения кольцо будет плавно поворачиваться под действием моментов сил тяжести так, чтобы центр тяжести C неполного кольца и точка подвеса A находились на одной вертикали (рис. 9, повернут для удобства рассмотрения). Будем считать, что, несмотря на вращение, кольцо в любой момент времени находится в положении равновесия, а его угловым ускорением можно пренебречь (т.н. «квазистационарное приближение»).

На рисунке 9 вертикаль AC составляет искомый угол β с диаметром AD, причём

$$\text{tg} \beta = \frac{CH}{AH} = \frac{y_c}{R + x_c}. \quad (25)$$

С учётом равенств (11) и (12) получим

$$\text{tg} \beta = \frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)} \Rightarrow \beta = \arctg\left(\frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)}\right). \quad (26)$$

Так как $\omega = \frac{d\beta}{dt}$, то для нахождения угловой скорости вращения кольца необходимо продифференцировать (26) по времени. Для дифференцирования сложной функции введем замену

$$\xi = \frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)}, \quad (27)$$

тогда результат дифференцирования (26) можно записать в виде

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = (\text{arctg}(\xi))' = \frac{1}{1 + \xi^2} \cdot \xi', \quad (28)$$

где

$$\xi' = \frac{(1/2) \sin \alpha (\sin \alpha + (2\pi - \alpha)) - 2 \sin^2(\alpha/2) (\cos \alpha - 1)}{(\sin \alpha + (2\pi - \alpha))^2} \omega. \quad (29)$$

Подставляя (27) и (29) в (28) получаем окончательный ответ, запись которого представляется несколько громоздкой

$$\omega_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{2 \sin^2(\alpha/2)}{\sin \alpha + (2\pi - \alpha)} \right)^2} \cdot \xi'. \quad (30)$$

Для вычисления ω_1 подставим в (29) и (30) значение $\alpha = \pi$, тогда

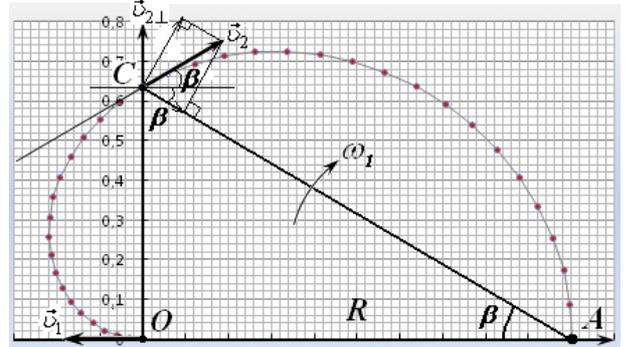
$$\omega_1 = \frac{4\omega}{\pi^2 + 4} = \frac{4v}{(\pi^2 + 4)R} = 2,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 2,9 \frac{\text{мрад}}{\text{с}}. \quad (31)$$

Этот же результат можно получить и «хитрее», если заметить, что искомая угловая скорость ω_1 есть ни что иное, как угловая скорость вращения отрезка AC вокруг точки A на рисунке 10, следовательно

$$\omega_1 = \frac{v_{2\perp}}{AC} = \frac{v_2 \cos(\pi/2 - 2\beta)}{R / \cos \beta} = \{(23)\} = \frac{4v}{(4 + \pi^2)R}, \quad (32)$$

где $\beta = \text{arctg}(\frac{2}{\pi})$, а $v_{2\perp}$ – проекция скорости \vec{v}_2 на нормаль к отрезку AC (см. рис. 10), «обеспечивающая» его поворот.

Как следует из (31) значение угловой скорости вращения кольца действительно мало по абсолютному значению, что делает вполне оправданным применение модели Рис. 10. Вращение подвешенного кольца



Для «фанатов» дифференцирования заметим, что если взять производную от (28) по времени ещё раз, то можно найти угловое ускорение кольца при данных условия (предупреждаем: формула «не влезит» на страницу!), численное значение которого в рассматриваемых рамках также должно быть достаточно малым.

Часть 2. «Электростатический огонь»

2.1 В начальном состоянии напряженность электростатического поля в центре кольца (точке O) равна нулю. По мере сгорания кольца уменьшается его длина, а, следовательно, и электрический заряд.

Рассмотрим положение огня (точки горения) через некоторый промежуток времени t , в течение которого выгорела дуга AB кольца (рис 11). В силу симметрии системы заметим, что теперь в центре кольца электростатическое поле определяется только участком DE кольца (выделен на рисунке), поскольку результирующее действие участков AE и BD кольца равно нулю.

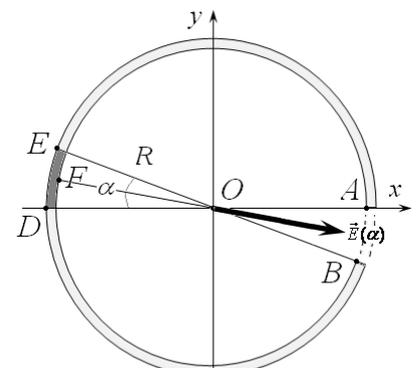


Рис. 11. Вычисление напряженности

Разобьём дугу на малые участки и просуммируем напряженности электростатического поля от каждого из них. При этом вектор результирующего поля $\vec{E}(\alpha)$ будет направлен вдоль биссектрисы OF угла EOD (см. рис 11). Результат суммирования легко получить геометрически, если заметить, что модуль $E(\alpha)$ искомого вектора $\vec{E}(\alpha)$ пропорционален длине хорды DE (или AB)

$$DE = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (33)$$

стягивающей дугу DE (на рисунке 11 не показана).

Действительно, согласно принципу суперпозиции электрических полей, искомое значение напряженности поля можно записать в виде суммы

$$E(\alpha) = \sum_i E_{ix} = \sum_i E_i \cos \alpha_i \quad (34)$$

где $E_i = k \frac{q_i}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \Delta l_i}{R^2}$ – модуль напряженности электростатического поля, создаваемого элементарным зарядом q_i небольшого участка Δl_i кольца, $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ –линейная плотность заряда кольца, α_i – угол между

вектором \vec{E}_i и биссектрисой OF угла EOD (см. Рис 11), ось Ox направлена вдоль биссектрисы FO .

С учетом последних равенств, сумма (33) примет вид

$$E(\alpha) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_i \Delta l_i \cos \alpha_i = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R^2} DE = \{(1)\} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (35)$$

Убедитесь самостоятельно, что сумма проекций элементарных участков дуги $\sum_i \Delta l_i \cos \alpha_i$ дает длину стягивающей её хорды

$$\sum_i \Delta l_i \cos \alpha_i = DE = 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$E(\alpha) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (36)$$

Для удобства построения графиков будем использовать безразмерную величину

$$E^* = E(\alpha) / E_0, \text{ где } E_0 = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

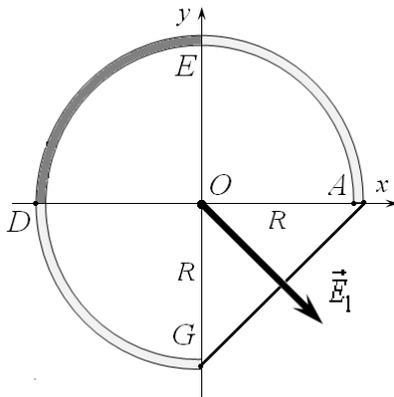
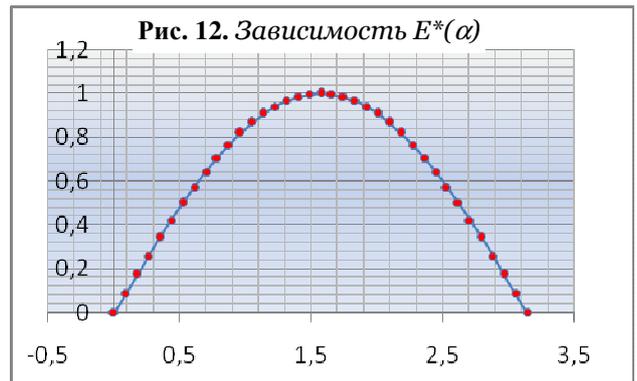


График полученной зависимости представлен на рисунке 12.



2.2 С учетом того, что при горении кольца угол α меняется от нуля до 2π , приходим к выводу, что максимум функции $E(\alpha)$ достигается при $\alpha = \pi$.

Следовательно, для E_{\max} можем записать

$$E_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{q}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2} = E_0. \quad (37)$$

С учётом того, что поле от «трёх четвертей» кольца соответствует $\alpha = \pi/2$, можем получить, что в данном случае

$$E_{\max} = \sqrt{2}E_1 \Rightarrow \frac{E_{\max}}{E_1} = \sqrt{2} = 1,4. \quad (38)$$

Задание 3. Автомобиль и топливо

Автомобиль и топливо. Решение

1. Простая поездка

1.1. Пусть расход топлива равен χ . За некоторый промежуток времени Δt автомобиль проедет расстояние $l = v\Delta t$ и израсходует объём $V = \chi l = \chi v\Delta t$ топлива. При сгорании этого топлива выделится энергия $Q = qm = q\rho V = q\rho\chi v\Delta t$. Часть η данной энергии пойдёт на обеспечение электроники автомобиля и преодоление силы сопротивления воздуха, работа которой за указанный промежуток времени равна $kv \cdot l = kv^2\Delta t$. В итоге получаем:

$$\eta q\rho\chi v\Delta t = P_1\Delta t + kv^2\Delta t \quad (1)$$

Откуда выражаем расход топлива:

$$\chi = \frac{1}{\eta q\rho} \left(\frac{P_1}{v} + kv \right) \quad (2)$$

$$\chi = \frac{1}{0,15 \cdot 44 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710 \text{ кг/м}^3} \left(\frac{1000 \text{ Вт}}{80 \frac{\text{м}}{3,6 \text{ с}}} + 15 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \cdot \frac{80 \text{ м}}{3,6 \text{ с}} \right) = 8,07 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^3}{\text{м}} = 8,07 \frac{\text{л}}{100 \text{ км}} \quad (3)$$

1.2. Выражение (2) можно преобразовать к виду $\chi + \frac{1}{\chi}$:

$$\chi = \frac{1}{\eta q\rho} \left(\frac{P_1}{v} + kv \right) = \frac{\sqrt{P_1 k}}{\eta q\rho} \left(\frac{\sqrt{P_1}}{v\sqrt{k}} + \frac{v\sqrt{k}}{\sqrt{P_1}} \right) \geq \frac{2\sqrt{P_1 k}}{\eta q\rho} \quad (4)$$

То есть минимальный расход топлива равен:

$$\chi_{\min} = \frac{2\sqrt{P_1 k}}{\eta q\rho} = \frac{2\sqrt{1000 \text{ Вт} \cdot 15 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}}}{0,15 \cdot 44 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710 \text{ кг/м}^3} = 5,23 \frac{\text{л}}{100 \text{ км}} \quad (5)$$

Реализуется минимальное значение расхода при условии $\frac{\sqrt{P_1}}{v\sqrt{k}} = 1$ (согласно примечанию про выражение вида $\chi + \frac{1}{\chi}$ в условии задачи), то есть:

$$v_0 = \sqrt{\frac{P_1}{k}} = \sqrt{\frac{1000 \text{ Вт}}{15 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}}} = 8,16 \text{ м/с} = 29,4 \text{ км/ч} \quad (6)$$

2. Подъём в гору

2.1. В случае подъёма в выражении (1) в правой части необходимо добавить работу на преодоление силы тяжести – mgh . Так как высота подъёма h рассчитывается как $h = l \sin \alpha = v\Delta t \sin \alpha$, получим уравнение:

$$\eta q\rho\chi v\Delta t = P_1\Delta t + kv^2\Delta t + mg \sin \alpha v\Delta t \quad (7)$$

Откуда следует выражение для расхода топлива:

$$\chi = \frac{1}{\eta q\rho} \left(\frac{P_1}{v} + kv + mg \sin \alpha \right) \quad (8)$$

$$\chi = \frac{1}{0,15 \cdot 44 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710 \text{ кг/м}^3} \left(\frac{1000 \text{ Вт}}{80 \frac{\text{м}}{3,6 \text{ с}}} + 15 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \cdot \frac{80 \text{ м}}{3,6 \text{ с}} + 1500 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \sin 3^\circ \right)$$
$$\chi = 24,5 \frac{\text{л}}{100 \text{ км}}$$

2.2. В выражении (8) зависимость от скорости имеет вид $\frac{P_1}{v} + kv$, идентичный рассмотренному в первом пункте задачи. Тогда минимальный расход топлива будет реализован при той же скорости равномерного движения $v_0 = \sqrt{\frac{P_1}{k}} = 29,4 \text{ км/ч}$. Сам минимальный расход при этом равен:

$$\chi_{min} = \frac{2\sqrt{P_1 k + mg \sin \alpha}}{\eta q \rho} = \frac{2\sqrt{1000 \text{ Вт} \cdot 15 \frac{\text{кг}}{\text{м}} + 1500 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \sin 3^\circ}}{0,15 \cdot 44 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 21,6 \frac{\text{л}}{100 \text{ км}} \quad (9)$$

3. Спуск с горы

3.1. Теперь сила тяжести совершает работу над автомобилем – данное поступление энергии надо записать в левую сторону выражения (1):

$$\eta q \rho \chi v \Delta t + mg \sin \alpha v \Delta t = P_1 \Delta t + kv^2 \Delta t \quad (10)$$

Отсюда расход топлива определяется выражением:

$$\chi = \frac{1}{\eta q \rho} \left(\frac{P_1}{v} + kv - mg \sin \alpha \right) \quad (11)$$

$$\chi = \frac{1}{0,15 \cdot 44 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} \left(\frac{1000 \text{ Вт}}{\frac{80 \text{ м}}{3,6 \text{ с}}} + 15 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \cdot \frac{80 \text{ м}}{3,6 \text{ с}} - 1500 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \sin 1^\circ \right)$$

$$\chi = 2,60 \frac{\text{л}}{100 \text{ км}}$$

3.2. Приравняв выражение (11) к нулю, можно получить квадратное уравнение:

$$kv_0^2 - mg \sin \alpha v_0 + P_1 = 0 \quad (12)$$

Его дискриминант равен:

$$D = m^2 g^2 \sin^2 \alpha - 4P_1 k \quad (13)$$

А решение имеет вид:

$$v_0 = \frac{1}{2k} [mg \sin \alpha \pm \sqrt{D}] \quad (14)$$

Подставляя числовые значения, получим два искоемых значения скорости:

$$v_{01} = 11,1 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 39,9 \frac{\text{км}}{\text{ч}}, v_{02} = 6,01 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 21,6 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \quad (15)$$

3.3. При движении автомобиля с ускорением необходимо в выражении (10) дополнительно учитывать расходы энергии по увеличению скорости автомобиля. Из второго закона Ньютона известно, для того, чтобы тело двигалось с ускорением a , к нему должна быть приложена равнодействующая сила, по модулю равная ma , которая и будет совершать работу по разгону. Воспользуемся этим знанием в нашей задаче: расходы энергии на ускорение автомобиля считаем как работу некоторой силы, равной ma при перемещении на расстояние $v \Delta t$. Тогда, в отсутствие расхода топлива, уравнение (10) примет вид:

$$mg \sin \alpha v \Delta t = P_1 \Delta t + kv^2 \Delta t + mav \Delta t \quad (16)$$

Отсюда получаем искомую зависимость ускорения от скорости:

$$a = g \sin \alpha - \frac{1}{m} \left(kv + \frac{P_1}{v} \right) \quad (17)$$

Рассмотрим знак ускорения вблизи найденных значений v_0 . Во-первых, можно убедиться, что при скорости v_{01} или v_{02} ускорение действительно равно нулю. Во-вторых, отметим, что в сумме $kv + \frac{P_1}{v}$ при скорости v_{01} основную роль играет первое слагаемое, а при скорости v_{02} – второе. В этом можно убедиться, к примеру, подставив численные значения.

Пусть автомобиль двигался со скоростью v_{01} и эта скорость немного увеличилась. Определим знак ускорения. В скобке в (17) основную роль играет слагаемое kv – оно увеличится, а само ускорение уменьшится. Учитывая, что при v_{01} оно было равно нулю, получаем $a < 0$ при $v > v_{01}$. Аналогичными рассуждениями можно прийти к результату $a > 0$ при $v < v_{01}$. Такие соотношения говорят об устойчивости значения скорости v_{01} : при небольшом отклонении ускорение возвращает величину скорости обратно к v_{01} . Качественное объяснение полученных знаков ускорения следующее. v_{01} – большее из

двух найденных значений v_0 . При больших скоростях основную роль в сопротивлении движению оказывает сила сопротивления воздуха. С увеличением скорости эта сила также увеличится, что создаст тормозящее, то есть отрицательное, ускорение и наоборот. Если рассмотреть движение автомобиля при скорости, близкой к v_{02} , то основную роль будет играть слагаемое $\frac{P_2}{v}$, имеющее смысл торможения двигателем. Как видно, его влияние уменьшается с увеличением скорости, что приведёт к следующей расстановке знаков ускорения: $a > 0$ при $v > v_{02}$ и $a < 0$ при $v < v_{02}$. Такая расстановка знаков говорит о неустойчивости значения скорости v_{02} . Действительно, при малом, например, возрастании скорости возникшее ускорение будет еще больше её увеличивать, удаляя всё дальше от величины v_{02} .

Знаки ускорения оказались такими, что со временем значения скоростей будут расходиться от v_{02} и сходиться к v_{01} . Таким образом, через достаточно большой промежуток времени спуска автомобиля с горки не расходуя топливо, автомобиль будет двигаться со скоростью $v_{01} = 39,9 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.4. Постоянную скорость спуска с горы, не расходуя топливо, мы сможем определить из выражения (14) в том случае, если дискриминант (13) квадратного уравнения неотрицательный:

$$D = m^2 g^2 \sin^2 \alpha - 4P_1 k \geq 0$$

Отсюда получаем условие для угла уклона:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\geq \frac{2\sqrt{P_1 k}}{mg} & (18) \\ \alpha &\geq \arcsin \frac{2\sqrt{1000 \text{ Вт} \cdot 15 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}}}{1500 \text{ кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} \\ \alpha &\geq 0,95^\circ \end{aligned}$$

4. Разгон

Для вычислений будет удобно заранее посчитать величину постоянного ускорения автомобиля.

$$a = \frac{v_1}{\Delta t} = \frac{(90/3,6) \frac{\text{м}}{\text{с}}}{2 \cdot 60 \text{ с}} = 0,208 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \quad (19)$$

4.1. Количество энергии, необходимое на разгон автомобиля мы уже считали в п.3.3. Запишем (1), добавляя слагаемое, связанное с разгоном.

$$\eta q \rho \chi v \Delta t = P_1 \Delta t + kv^2 \Delta t + mav \Delta t \quad (20)$$

Вспоминая, что для равноускоренного движения без начальной скорости справедливо $v = at$, получим искомое выражение для зависимости расхода топлива от времени.

$$\chi(t) = \frac{1}{\eta q \rho} \left(\frac{P_1}{at} + kat + ma \right) \quad (21)$$

4.2. Пройдя некоторое малое расстояние Δl , автомобиль расходует объём топлива равный $\Delta V = \chi \Delta l$. Если это расстояние пройдено за промежуток времени Δt , то временной расход топлива равен:

$$\psi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \chi \frac{\Delta l}{\Delta t} = \chi v \quad (22)$$

Выражение (22) показывает связь между введенными временным и обычным расходами топлива в любой момент времени. Подставляя (21) в (22) и используя $v = at$ для равноускоренного движения, получим требуемую зависимость.

$$\psi(t) = \frac{1}{\eta q \rho} (P_1 + ka^2 t^2 + ma^2 t) \quad (23)$$

4.3. Средний временной расход будем рассчитывать по формуле

$$\langle \psi \rangle = V / \Delta t \quad (24)$$

где V – объём топлива, израсходованного автомобилем за все $\Delta t = 120$ с пути. Для нахождения этой величины удобным оказывается построить график зависимости $\psi(t)$ (рис. 1). Действительно на каждом малом участке пути объём потраченного топлива равен произведению величин ψ и Δt , из чего следует, что полный объём топлива V будет равен площади под указанным графиком.

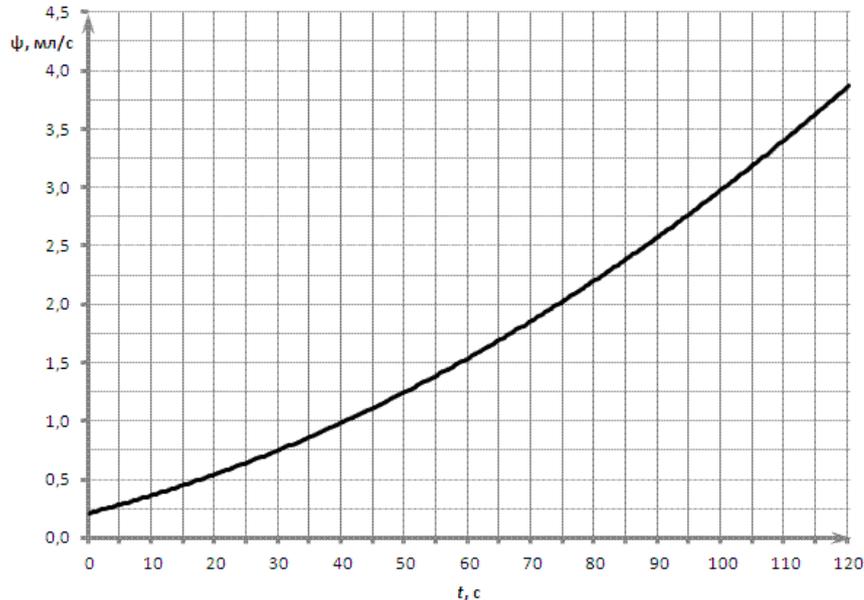


Рисунок 3 - График зависимости временного расхода от времени

На рис. 1 под графиком оказалось приблизительно 154 клетки. Площадь одной клетки, исходя из цен деления осей, равна: $0,25 \frac{\text{мл}}{\text{с}} \times 5 \text{ с} = 1,25 \text{ мл}$. Тогда полный объём израсходованного автомобилем топлива равен: $V = 1,25 \text{ мл} \cdot 154 = 192,5 \text{ мл}$.

Таким образом, средний временной расход топлива равен:

$$\langle \psi \rangle = V / \Delta t = \frac{192,5 \text{ мл}}{120 \text{ с}} = 1,60 \frac{\text{мл}}{\text{с}}$$

4.4. Зная полный объём потраченного топлива, можно определить и средний путевой его расход. Вспоминая, что для равноускоренного движения пройденный путь $l = \frac{at^2}{2}$, получаем:

$$\langle \chi \rangle = \frac{V}{l} = \frac{2V}{at^2} = \frac{2 \cdot 192,5 \text{ мл}}{0,208 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (120 \text{ с})^2} = 0,129 \frac{\text{мл}}{\text{м}} = 12,9 \frac{\text{л}}{100 \text{ км}}$$

5. Постоянный расход

5.1. Исходя из графика, представленного в условии задачи, мы можем получить информацию о горизонтальной координате, высоте, и угле наклона дороги в любой точке. На основании того, что горизонтальные координаты на дороге на два порядка превышают вертикальные, отсчитываемые от места начала движения, будем считать, что пройденный автомобилем путь мало отличается от его координаты x (то есть высота подъема пренебрежимо мала по сравнению с горизонтальным перемещением). Так как по условию ускорением можно пренебречь, то справедливо выражение (8) для расхода топлива при подъёме на склон. Его можно переписать в виде квадратного уравнения для скорости:

$$kv^2 + (mg \sin \alpha - \eta q \rho \chi)v + P_1 = 0 \quad (25)$$

Подставив значение $\sin \alpha$, из уравнения (25) сможем определить скорость движения при заданном расходе топлива. Возьмём некоторое количество точек на графике в условии и

проведём для них соответствующие вычисления. Результаты будем записывать в таблицу. Для определения угла α по графику удобной процедурой является измерение $\operatorname{tg} \alpha$, построив касательную к профилю. К нашему удобству, для малого уклона $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha$. У квадратного уравнения, вообще говоря, два различных корня. Однако один из них будет соответствовать медленному движению, не подходящему под условие данного пункта. Для того чтобы найти время движения автомобиля, построим график зависимости величины, обратной скорости ($1/v$) от пройденного пути. Действительно, их произведение на каждом малом промежутке дает соответствующий интервал времени, а вся площадь под графиком будет определять полное время движения автомобиля.

Таблица 1

№	l , км	h , м	$\sin \alpha$	v_1 , м/с	v_2 , м/с	$1/v_2$, с/км
1	0	0	0,014	6,85	9,73	102,734
2	1	12	0,01	4,05	16,45	60,790
3	2	22	0,0082	3,56	18,70	53,470
4	3	30	0,0063	3,17	21,00	47,611
5	4	35	0,004	2,83	23,55	42,459
6	6	39	0,0007	2,46	27,15	36,830
7	8	40	0	2,39	27,91	35,824
8	10	41	0,0005	2,44	27,38	36,526
9	12	45	0,0039	2,82	23,66	42,259
10	13	50	0,0062	3,17	21,06	47,480
11	14	56	0,0083	3,59	18,58	53,819
12	15	66	0,0118	4,77	13,96	71,608

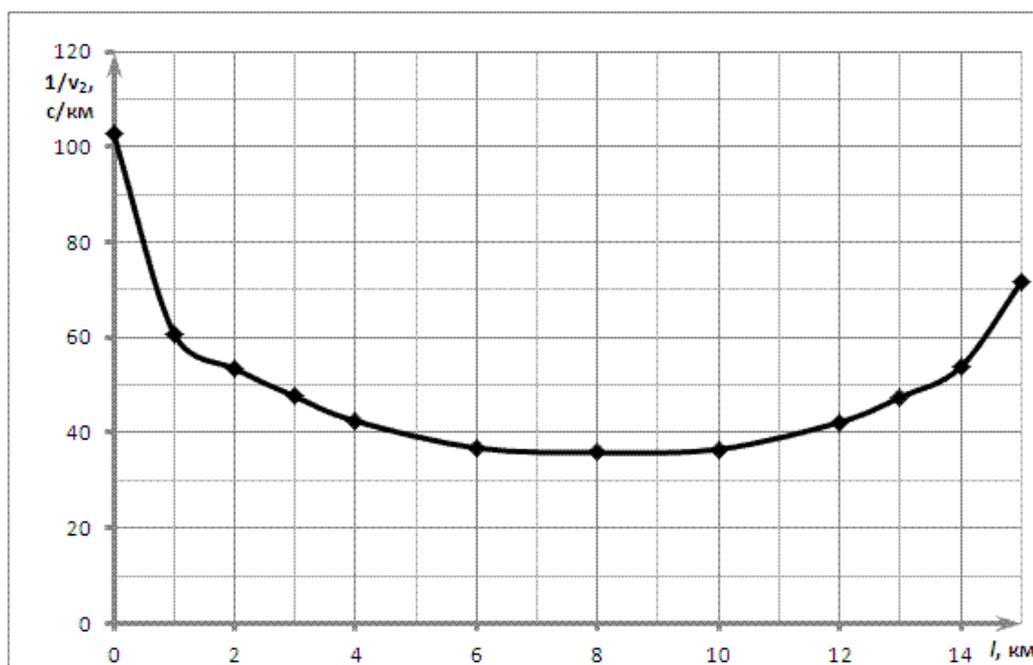


Рисунок 4 - График зависимости обратной скорости от пройденного пути

Под графиком на рис. 2 оказалось примерно 67 клеток. Площадь каждой определяется ценой деления и равна: $1 \text{ км} \times 10 \frac{\text{с}}{\text{км}} = 10 \text{ с}$. Получаем, что общее время движения автомобиля из пункта А в пункт В оцениваем как:

$$T = 67 \text{ клеток} \times 10 \text{ с} = 670 \text{ с} = 11,2 \text{ минуты}$$

6. Интересно знать

6.1. Согласно введенному определению, расход топлива – это объем делённый на единицу пути: $\chi = \frac{V}{L}$. По размерности эта величина соответствует некоторой площади. Действительно, если мы объём делим на некоторую длину объекта, то получаем среднюю площадь поперечного сечения. В качестве длины объекта L в нашей формуле выступает пройденный путь. Получаем, если мы весь объем расходуемого топлива растянем тонкой струёй вдоль пройденного пути (вдоль траектории), то величина расхода χ будет равна малой площади поперечного сечения этой струи.