

9 класс.

**Задача 9-1. Отвесим всем!**

**Часть 1. Очень теоретическая.**

1.1 Все выкладки существенно упрощаются, если сразу заметить, что нить отвеса в любом случае будет проходить через центр масс линейки с грузами.

Пренебрегая массой линейки это условие можно записать в виде

$$m_1 x = m_2 (L - x), \tag{1}$$

где  $L = 40\text{ см}$  - длина линейки.

Из уравнения (1) следует искомая зависимость

$$x(K) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} L = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} L = \frac{1}{K + 1} L. \tag{2}$$

где  $K = \frac{m_1}{m_2}$  - отношение масс подвешенных грузов.

График этой функции показан на рисунке.

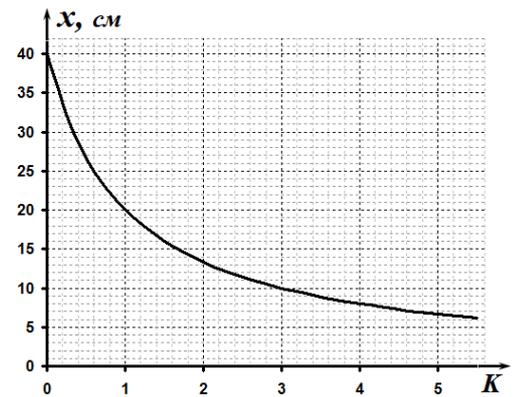
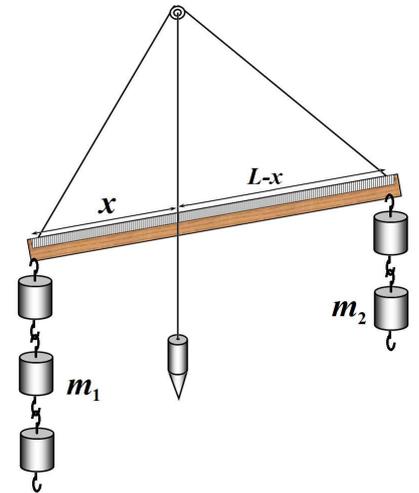
*Примечание.* Очевидна, что эта формула может быть получена и другими способами, например, из условия равенства моментов сил относительно любой точки.

Из уравнения (1) следует и наиболее простая функция

$$Z(x) = \frac{L - x}{x}. \tag{3}$$

и ее теоретическая зависимость (проще не бывает!) от отношения масс

$$Z_{теор.}(K) = K. \tag{4}$$



Теоретическая зависимость  $x(K)$

**Часть 2. Просто экспериментальная.**

2.1 Результаты измерений значения величины  $x$  для различных значений  $m_1$  и  $m_2$ , а также необходимые расчеты приведены в Таблице 1.

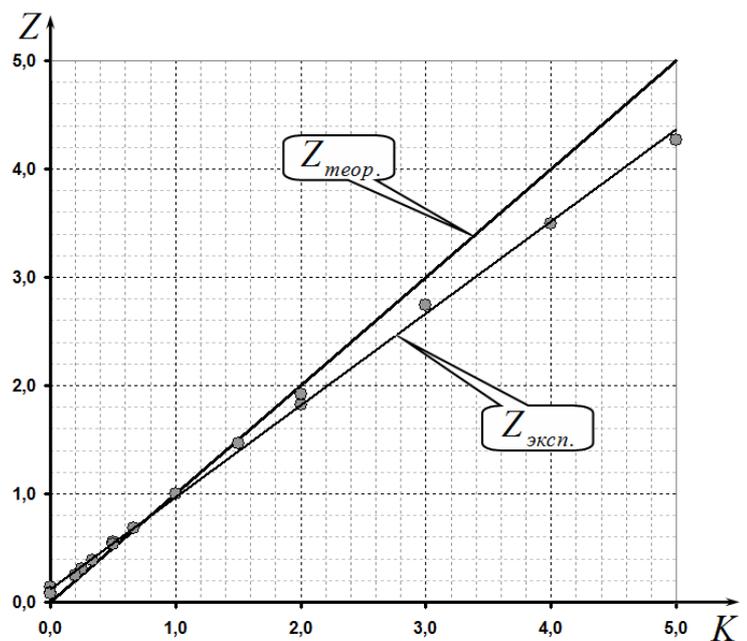
**Таблица 1. Результаты измерений.**

| № | $m_1$ | $m_2$ | $K = \frac{m_1}{m_2}$ | $x, \text{ мм}$ | $Z(x) = \frac{L - x}{x}$ | $Z_{теор.}$ |
|---|-------|-------|-----------------------|-----------------|--------------------------|-------------|
| 1 | 0     | 1     | 0                     | 350             | 0,143                    | 0,000       |
| 2 | 0     | 2     | 0                     | 367             | 0,090                    | 0,000       |
| 3 | 0     | 3     | 0                     | 369             | 0,084                    | 0,000       |
| 4 | 0     | 4     | 0                     | 371             | 0,078                    | 0,000       |

|    |   |   |       |     |       |       |
|----|---|---|-------|-----|-------|-------|
| 6  | 1 | 1 | 1     | 200 | 1,000 | 1,000 |
| 7  | 1 | 2 | 0,500 | 258 | 0,550 | 0,500 |
| 8  | 1 | 3 | 0,333 | 288 | 0,389 | 0,333 |
| 9  | 1 | 4 | 0,25  | 307 | 0,303 | 0,250 |
| 10 | 1 | 5 | 0,2   | 321 | 0,246 | 0,200 |
| 11 | 2 | 1 | 2     | 142 | 1,817 | 2,000 |
| 12 | 2 | 2 | 1     | 200 | 1,000 | 1,000 |
| 13 | 2 | 3 | 0,667 | 237 | 0,688 | 0,667 |
| 14 | 2 | 4 | 0,5   | 261 | 0,533 | 0,500 |
| 15 | 3 | 1 | 3     | 107 | 2,738 | 3,000 |
| 16 | 3 | 2 | 1,5   | 162 | 1,469 | 1,500 |
| 17 | 3 | 3 | 1     | 200 | 1,000 | 1,000 |
| 18 | 4 | 1 | 4     | 89  | 3,494 | 4,000 |
| 19 | 4 | 2 | 2     | 137 | 1,920 | 2,000 |
| 20 | 5 | 1 | 5     | 76  | 4,263 | 5,000 |

2.2 Графики экспериментальной и теоретической зависимостей  $Z(K)$  показаны на рисунке.

2.3 Видно, что отклонения экспериментальных точек от теоретической зависимости носят систематический характер, поэтому не могут быть оправданы погрешностями измерений (хотя они неизбежны). Очевидно, что основная причина расхождений – пренебрежение массой линейки.



2.4 Измерение массы линейки может быть проведено различными способами.

Самый очевидный – прямой расчет координаты центра масс (с учетом массы линейки  $m_0$ )

$$x = \frac{m_0 \frac{L}{2} - m_2 L}{m_0 + m_1 + m_2}, \quad (5)$$

Откуда следует формула для расчета массы линейки

$$m_0 = \frac{m_2 L - (m_1 + m_2)x}{x - \frac{L}{2}}. \quad (6)$$

Расчет по этой формуле приводит к достаточно большому разбросу результатов. В результате получено значение (по всем данным)  $m_0 = (45 \pm 10) \text{ г}$ .

## Задача 9-2 Чем и как питаться?

### Часть 1. Подготовительная.

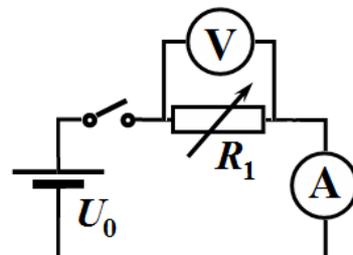
1.1 В результате измерений получено значение  $U_0 = 3,7V$

*Примечание.* Данное значение может быть иным, в зависимости от типа ЛПП и свежести батарейки.

1.2 Для измерения сопротивления необходимо одновременно измерить напряжение на реостате и силу тока через него. Схема для таких измерений очевидна и показана на рисунке.

В результате измерений получено  $R_{10} = R_{20} = 6,4 \text{ Ом}$ .

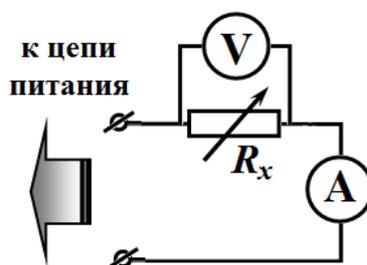
*Примечание.* Данное значение может быть иным, в зависимости от реостата.



1.3 Для выполнения заданий необходимо измерять напряжение  $U$  на реостате и силу тока  $I$  через него. Тогда сопротивление реостата можно рассчитать по закону Ома

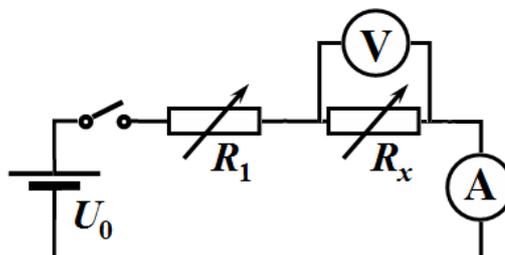
$$R = \frac{U}{I}. \quad (1)$$

Схема такой цепи также традиционна и показана на рисунке.



### Часть 2. Традиционная схема 1.

Схема измерений в данной части имеет вид, показанный на рисунке.



2.1 Не сложно подсчитать, что напряжение на нагрузке должно быть равно (если считать напряжение источника постоянным):

$$U = U_0 \frac{R_x}{R_1 + R_x}. \quad (2)$$

Соответственно, максимально напряжение на нагрузке будет при отключенном резисторе в цепи питания (при  $R_1 = 0$ )

$$U_{\max} = U_0; \quad (3)$$

А минимальное напряжение при полностью включенном резисторе в цепи питания (при  $R_1 = R_{10} = 6,4 \text{ Ом}$ )

$$U_{\min} = U_0 \frac{R_x}{R_{10} + R_x}. \quad (4)$$

2.2 Измерения проводились в следующей последовательности: Устанавливалось некоторое значение сопротивление резистора  $R_x$  (в порядке убывания); устанавливалось максимальное сопротивление резистора  $R_1$  в цепи нагрузки, при этом измерялись

значение напряжения через резистор  $R_x$  ( $U_{\min}$ ) и силы тока через него ( $I_{\min}$ ); не изменяя сопротивления  $R_x$ , сопротивление резистора  $R_1$  устанавливалось минимальным (нулевым) и проводились измерения напряжения и силы тока через резистор  $R_x$  ( $U_{\max}, I_{\max}$ , соответственно). Сопротивление  $R_x$  рассчитывалось, как по максимальным ( $R_x^{(1)} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$ ), так и по минимальным ( $R_x^{(2)} = \frac{U_{\min}}{I_{\min}}$ ) напряжения и силы тока. Ввиду недостаточной точности измерения эти величины незначительно различались, поэтому в качестве окончательного значения использовалось среднее значение  $R_x = \frac{R_x^{(1)} + R_x^{(2)}}{2}$ .

Также в таблице приведены теоретические значения минимального и максимального напряжений.

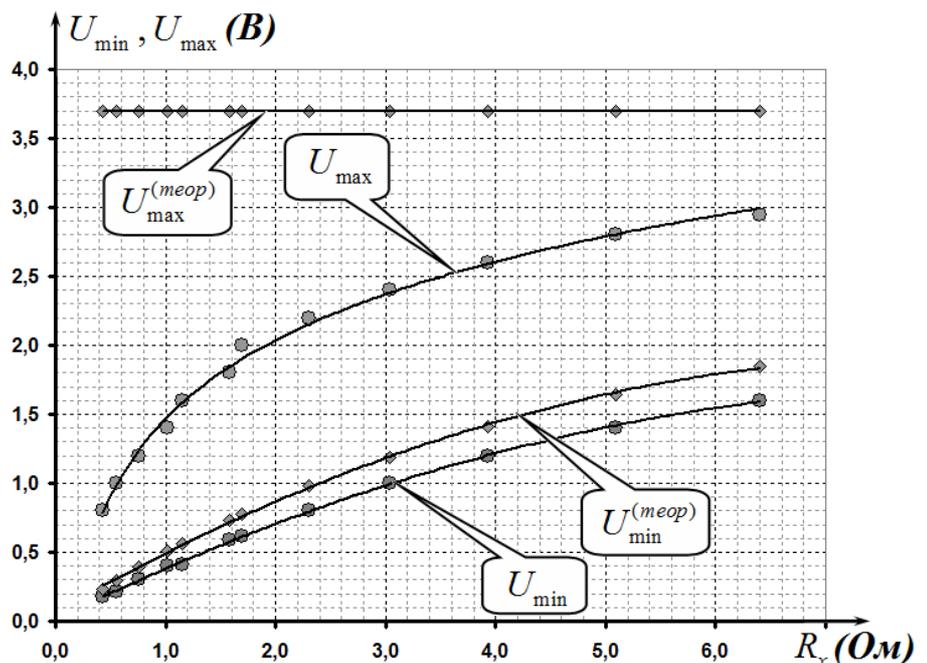
Все эти результаты приведены в Таблице 1.

**Таблица 1.**

| $U_{\min}$ ,<br>В | $I_{\min}$ ,<br>А | $U_{\max}$ ,<br>В | $I_{\max}$ ,<br>А | $R_x^{(1)}$ ,<br>Ом | $R_x^{(2)}$ ,<br>Ом | $R_x$ ,<br>Ом | $U_{\max}^{(теор)}$ ,<br>В | $U_{\min}^{(теор)}$ ,<br>В |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|---------------|----------------------------|----------------------------|
| 1,600             | 0,250             | 2,950             | 0,460             | 6,400               | 6,413               | 6,407         | 3,7                        | 1,851                      |
| 1,400             | 0,275             | 2,800             | 0,550             | 5,091               | 5,091               | 5,091         | 3,7                        | 1,639                      |
| 1,200             | 0,300             | 2,600             | 0,675             | 4,000               | 3,852               | 3,926         | 3,7                        | 1,407                      |
| 1,000             | 0,325             | 2,400             | 0,800             | 3,077               | 3,000               | 3,038         | 3,7                        | 1,191                      |
| 0,800             | 0,350             | 2,200             | 0,945             | 2,286               | 2,328               | 2,307         | 3,7                        | 0,980                      |
| 0,620             | 0,375             | 2,000             | 1,150             | 1,653               | 1,739               | 1,696         | 3,7                        | 0,775                      |
| 0,590             | 0,360             | 1,800             | 1,175             | 1,639               | 1,532               | 1,585         | 3,7                        | 0,735                      |
| 0,410             | 0,390             | 1,600             | 1,275             | 1,051               | 1,255               | 1,153         | 3,7                        | 0,565                      |
| 0,400             | 0,400             | 1,400             | 1,350             | 1,000               | 1,037               | 1,019         | 3,7                        | 0,508                      |
| 0,300             | 0,410             | 1,200             | 1,525             | 0,732               | 0,787               | 0,759         | 3,7                        | 0,392                      |
| 0,210             | 0,420             | 1,000             | 1,675             | 0,500               | 0,597               | 0,549         | 3,7                        | 0,292                      |
| 0,180             | 0,430             | 0,800             | 1,775             | 0,419               | 0,451               | 0,435         | 3,7                        | 0,235                      |

2.3 Графики полученных зависимостей показаны на рисунке.

2.4 Во всем диапазоне теоретические значения напряжений заметно превышают измеренные значения. Единственная возможная причина – уменьшение напряжения источника при увеличении силы тока через него.



### Теоретическое дополнение (от участников олимпиады не требуется!)

Объяснение полученных зависимостей не сложно, если знать такие характеристики источника, как ЭДС и внутреннее сопротивление. Однако эти понятия не входят в программу курса физики 9 класса, поэтому и дано такое краткое объяснение.

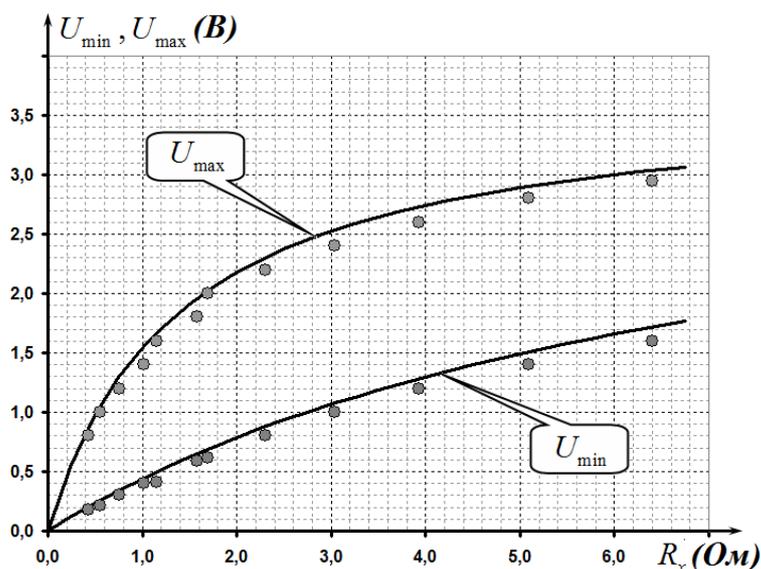
С учетом внутреннего сопротивления источника  $r \approx 1,4 \text{ Ом}$  и его ЭДС  $U_0 \approx 3,7 \text{ В}$  минимальное и максимальное значения напряжения рассчитываются по формулам

$$U_{\min} = U_0 \frac{R_x}{R_{10} + R_x + r} \quad (4)$$

$$U_{\max} = U_0 \frac{R_x}{R_x + r}$$

На рисунке приведены результаты расчетов по этим формулам, для наглядности оставлены экспериментальные данные.

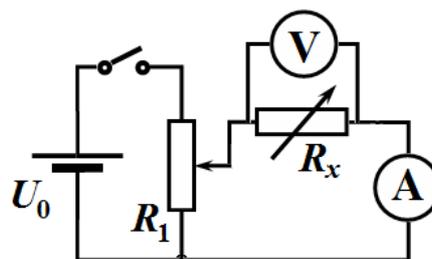
Как видно, наблюдается вполне приличное соответствие.



### Часть 3. Традиционная схема 2.

В данной части используется следующая схема.

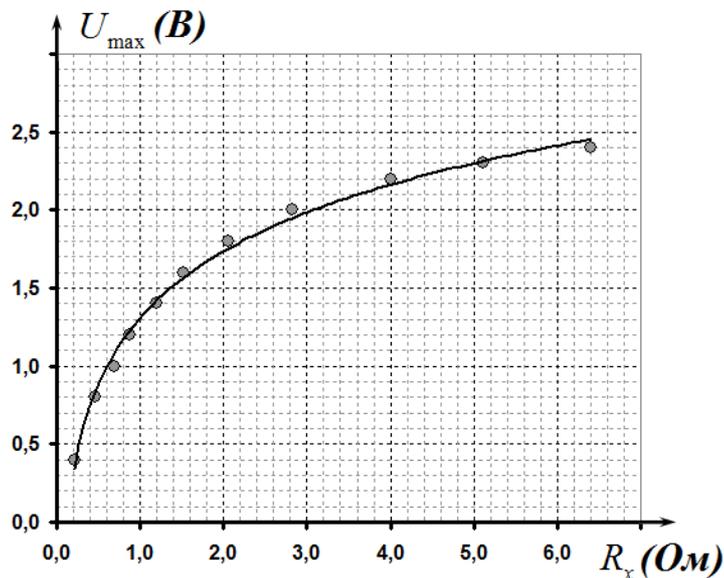
3.1 При постоянном напряжении источника в данной схеме цепи питания напряжение на нагрузке должно изменяться от нуля до  $U_0$ .



3.2 Измерения подтверждают, что минимальное значение напряжения на нагрузке равно нулю, поэтому эти данные не приводятся. Методика измерения аналогично той, которая описана в части 2. Результаты измерений и расчетов приведены в Таблице 2. По этим данным построен соответствующий график. Для экономии места теоретическое постоянное значение  $U_0 = 3,7 \text{ В}$  не приведено (не поместилось!).

Таблица 2.

| $U_{\max}$ ,<br>В | $I_{\max}$ ,<br>А | $R_x$ ,<br>Ом |
|-------------------|-------------------|---------------|
| 2,400             | 0,375             | 6,400         |
| 2,300             | 0,450             | 5,111         |
| 2,200             | 0,550             | 4,000         |
| 2,000             | 0,710             | 2,817         |
| 1,800             | 0,875             | 2,057         |
| 1,600             | 1,050             | 1,524         |
| 1,400             | 1,175             | 1,191         |
| 1,200             | 1,375             | 0,873         |
| 1,000             | 1,450             | 0,690         |
| 0,800             | 1,750             | 0,457         |
| 0,400             | 1,925             | 0,208         |



3.4 В этой схеме максимально возможное значение напряжения значительно меньше теоретического. Основная причина та же – падение напряжения (точнее ЭДС источника).

**Дополнение.** Можно провести точные расчет верхней границы напряжения с учетом ЭДС и внутреннего сопротивления источника. Результаты этих расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

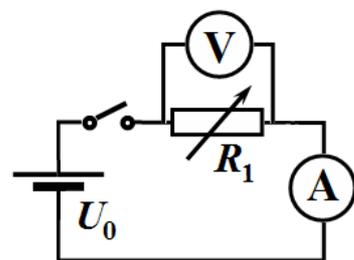
#### Часть 4. Какой у Вас источник?

Схема измерений приведена на рисунке.

Для получения необходимых данных следует провести измерения силы тока в цепи и напряжения на реостате.

Сопротивление реостата рассчитывается по формуле (1), а мощность, выделяющаяся на реостате, по формуле

$$P = UI.$$



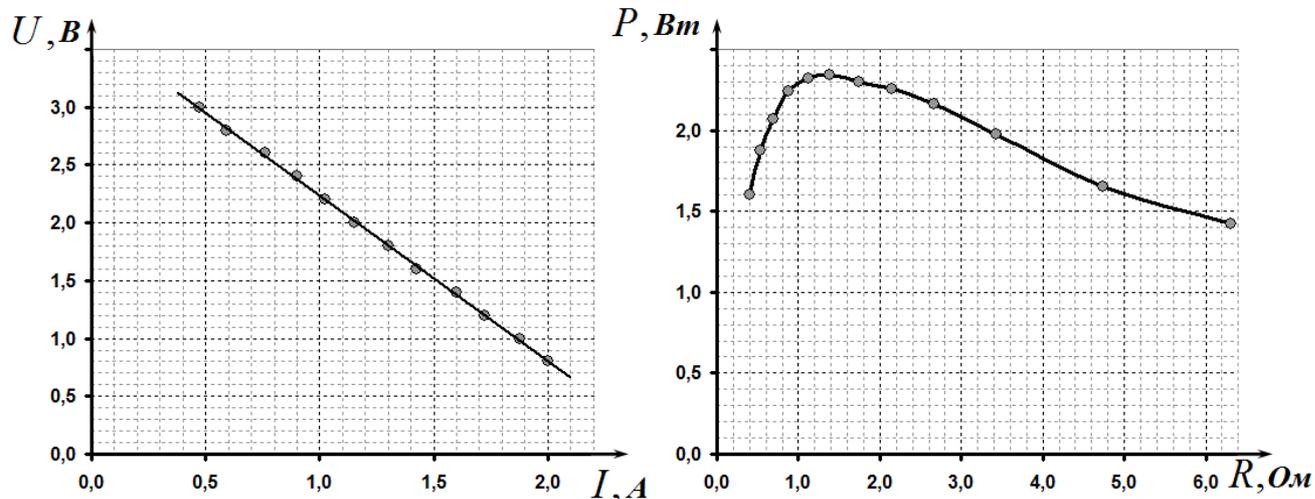
(5)

В таблице 3 приведены результаты измерений и соответствующих расчетов.

**Таблица 3.**

| $U, В$ | $I, А$ | $R, Ом$ | $P, Вт$ |
|--------|--------|---------|---------|
| 3,00   | 0,475  | 6,316   | 1,425   |
| 2,80   | 0,590  | 4,746   | 1,652   |
| 2,60   | 0,760  | 3,421   | 1,976   |
| 2,40   | 0,900  | 2,667   | 2,160   |
| 2,20   | 1,025  | 2,146   | 2,255   |
| 2,00   | 1,150  | 1,739   | 2,300   |
| 1,80   | 1,300  | 1,385   | 2,340   |
| 1,60   | 1,425  | 1,123   | 2,280   |
| 1,40   | 1,600  | 0,875   | 2,240   |
| 1,20   | 1,725  | 0,696   | 2,070   |
| 1,00   | 1,875  | 0,533   | 1,875   |
| 0,80   | 2,000  | 0,400   | 1,600   |

Графики полученных зависимостей приведены ниже.

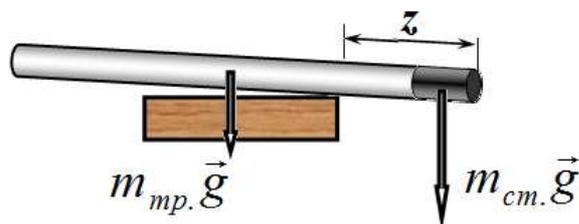


Эти графики подтверждают сделанное предположение – напряжение на выходе источника уменьшается при увеличении силы тока через него.

## Задача 10-1 Как по маслу!

Нами использована пластиковая трубка диаметром  $d = 4,0 \text{ мм}$ . Такой же диаметр имел и металлический стержень. Его длина  $l = 10 \text{ мм}$ , длина всей трубки  $L = 193 \text{ мм}$ .

1. Для измерения отношения массы стержня к массе трубки можно использовать следующую простую методику: располагаем трубку на краю стола и медленно начинаем ее сдвигать до тех пор, пока она не начнет опрокидываться, измеряем при этом длину свисающей части трубки  $z$ . В наших измерениях  $z = 30 \text{ мм}$ . При начале опрокидывания условие равновесия имеет вид



$$m_{\text{ст.}} \cdot g \left( z - \frac{l}{2} \right) = m_{\text{тр.}} \cdot g \left( \frac{L}{2} - z \right), \quad (1)$$

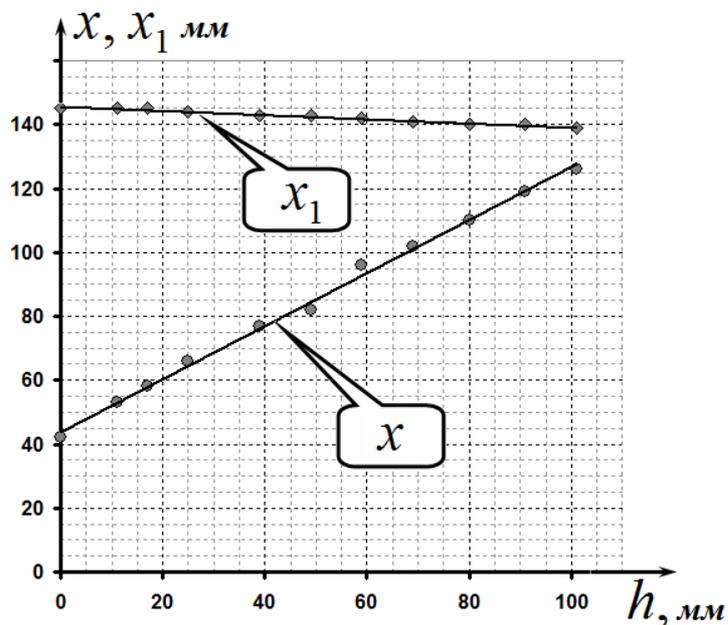
Откуда находим искомое отношение масс

$$\eta = \frac{m_{\text{ст.}}}{m_{\text{тр.}}} = \frac{\frac{L}{2} - z}{z - \frac{l}{2}} = \frac{\frac{193}{2} - 30}{30 - \frac{10}{2}} \approx 2,7 \quad (2)$$

2. Результаты измерений зависимости уровня воды  $x_1$  и координаты нижнего конца трубки  $x$  от высоты уровня масла  $h$  приведены в Таблице 1, по данным которой и построены соответствующие графики.

Таблица 1.

| $h$ , мм | $x$ , мм | $x_1$ , мм |
|----------|----------|------------|
| 0        | 42       | 145        |
| 11       | 53       | 145        |
| 17       | 58       | 145        |
| 25       | 66       | 144        |
| 39       | 77       | 143        |
| 49       | 82       | 143        |
| 59       | 96       | 142        |
| 69       | 102      | 141        |
| 80       | 110      | 140        |
| 91       | 119      | 140        |
| 101      | 126      | 139        |



4. Условие плавания трубки в мензурке (с водой маслом) имеет вид

$$\rho_0 s g (x_1 - x) + \rho s g h = m g, \quad (3)$$

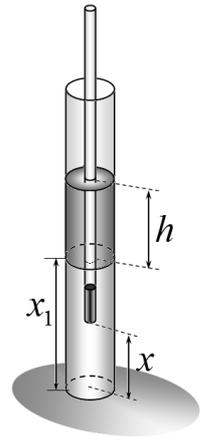
где  $\rho$  - плотность масла,  $s$  - площадь поперечного сечения трубки,  $m$  - масса трубки со стержнем.

Из уравнения (3) находим требуемую зависимость

$$(x_1 - x) = -\frac{\rho}{\rho_0} h + \frac{m}{\rho_0 s}. \quad (4)$$

Из этой формулы следует, что данная зависимость линейная, причем модуль коэффициента наклона графика равен отношению плотностей масла и воды.

На рисунке показан график этой зависимости, построенный по экспериментальным данным.



Коэффициенты линейной зависимости

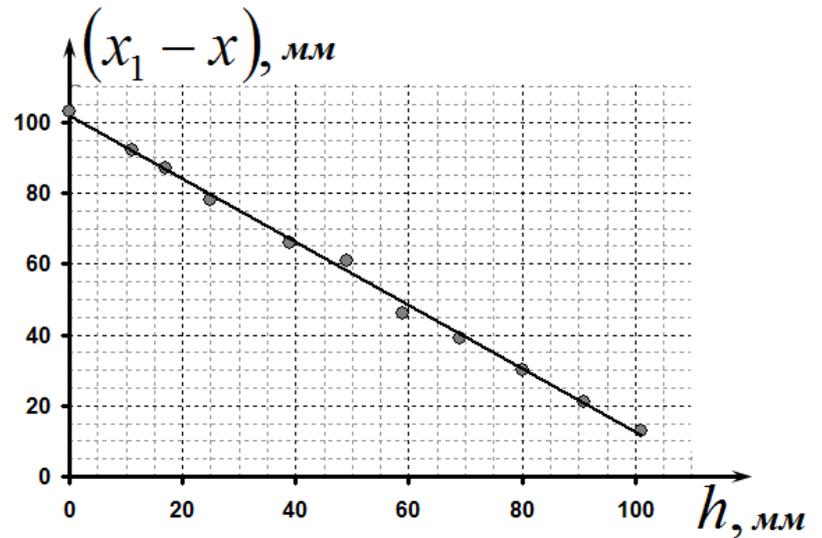
$$(x_1 - x) = ah + b,$$

рассчитанные по МНК, оказались равными

$$a = -(0,89 \pm 0,03)$$

$$b = (102 \pm 2) \text{ мм}$$

(5)



Следовательно, плотность масла равна

$$\rho = a\rho_0 = (0,89 \pm 0,03) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (6)$$

Параметр  $b$  позволяет рассчитать плотность материала стержня. Для этого выразим массу трубки со стержнем через массу стержня, используя ранее найденные значения их отношения

$$m = m_{cm.} + m_{mp.} = m_{cm.} \left( 1 + \frac{1}{\eta} \right) = m_{cm.} \frac{L-l}{L-2z} = \beta m_{cm.}$$

Численное значение коэффициента  $\beta$

$$\beta = \frac{L-l}{L-2z} = \frac{193-10}{193-60} = 1,38 \quad (7)$$

Основной вклад в его погрешность вносит погрешность измерения величины  $z$ , которую можно принять равной  $\Delta z = 1 \text{ мм}$ . Тогда

$$\Delta\beta = 2 \frac{L-l}{(L-2z)^2} \Delta z \approx 0,02. \quad (8)$$

Подставим теперь выражения для массы в формулу для параметра  $b$  линейной зависимости (4)

$$b = \frac{m}{\rho_0 s} = \frac{\beta m_{cm.}}{\rho_0 s} = \beta l \frac{\rho_1}{\rho_0}. \quad (9)$$

Из этой формулы следует, что плотность материала стержня может быть рассчитана по формуле

$$\rho_1 = \frac{b}{l\beta} \rho_0 = \frac{102}{10 \cdot 1,38} \cdot 1,0 \cdot 10^3 = 7,4 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (10)$$

С погрешностью

$$\Delta\rho_1 = \rho_1 \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)^2} \approx 0,2 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Таким образом, окончательное значение плотности стержня

$$\rho_1 = (7,4 \pm 0,2) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (10)$$

6 пункт данной задачи следует рассматривать как шутку. Понятно, что ни о каком сжатии масла речь не идет. Уровень воды опускается потому, что всплывает трубка. Если записать условие постоянства объема воды

$$xS_0 + (x_1 - x)(S_0 - s) = V,$$

то получим, что

$$\Delta x_1 = -\Delta x \frac{s}{S_0 - s} \approx -\Delta x \left(\frac{d}{D}\right)^2,$$

где  $\frac{d}{D}$  - отношение диаметров трубки и мензурки. Экспериментальные данные подтверждают этот вывод.

## Задача 10-2 Посмотрим?

### Часть 1. Линза.

1.1 Из формулы (2) следует, что искомая зависимость должна иметь вид:

$$b = \frac{Fa}{a - F}. \quad (1)$$

Из рисунка, приведенного в условии задачи не сложно увидеть, что увеличений линзы определяется формулой

$$G = \frac{l'}{l} = \frac{b}{a} = \frac{F}{a - F}. \quad (2)$$

Эту формулу удобно представить в виде

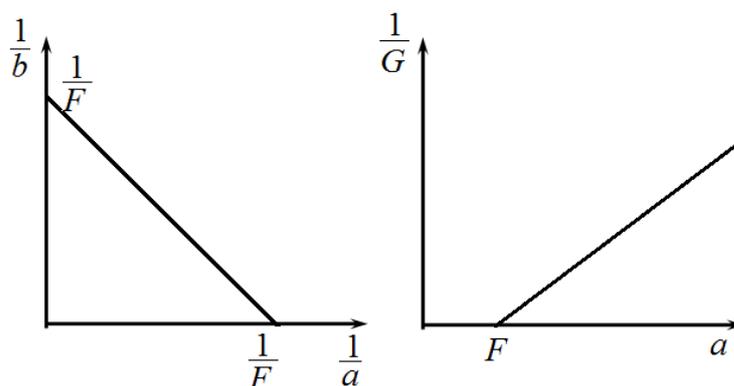
$$\frac{1}{G} = \frac{a}{F} - 1. \quad (3)$$

1.2 Измерения требуют большой аккуратности. Результаты зависят от предоставленной линзы.

1.3 Для проверки формулы линзы удобно построить зависимость величины  $\frac{1}{a}$  от  $\frac{1}{b}$ . В соответствии с формулой линзы эта зависимость представляется прямой линией, отсекающей на осях координат отрезки длиной  $\frac{1}{F}$  (см. рисунок). Следовательно, фокусное расстояние можно определить по длине этих отрезков.

1.4 Если построить график зависимости величины обратной увеличению  $\frac{1}{G}$  от

расстояния  $a$ , то в соответствии с формулой (3), получается прямая линия. Значение фокусного расстояния можно получить, либо как длину отрезка, отсекаемого прямой на оси  $a$ , либо (что точнее) как величину обратную коэффициенту наклона прямой (см. рисунок)

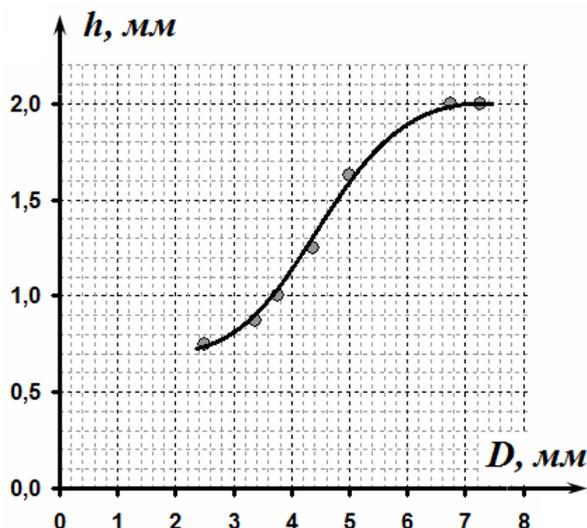


## Часть 2. Капля.

Измерения проведены при увеличении  $G = 8$ . В Таблице 1 приведены результаты измерений диаметра  $D'$ , и высоты  $h'$  изображения капли, а также пересчитанные размеры самой капли.

Таблица 1.

| $D', \text{мм}$ | $h', \text{мм}$ | $D, \text{мм}$ | $h, \text{мм}$ |
|-----------------|-----------------|----------------|----------------|
| 20              | 6               | 2,50           | 0,75           |
| 27              | 7               | 3,38           | 0,88           |
| 30              | 8               | 3,75           | 1,00           |
| 35              | 10              | 4,38           | 1,25           |
| 40              | 13              | 5,00           | 1,63           |
| 54              | 16              | 6,75           | 2,00           |
| 58              | 16              | 7,25           | 2,00           |



2.3 Форму и размеры капли определяют силы тяжести (которые стремятся сплющить каплю) и силы поверхностного натяжения (которые стремятся придать капле сферическую форму). При малых радиусах преобладают силы поверхностного натяжения, при больших – гравитационные силы. Поэтому с ростом объема капли ее высота стремиться к некоторому стационарному значению.

2.1 По порядку величины необходимую оценку радиуса можно провести, сравнивая гидростатическое давление внутри капли и лапласовское давление

$$2\rho gr \ll \frac{2\sigma}{r} \quad r \ll \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \approx \sqrt{\frac{0,07}{1 \cdot 10^3 \cdot 10}} \approx 3 \text{мм}.$$

Однако, в приведенных данных эта область не достигается. Заметим, что измеренная предельная высота капли близка к этому значению.

## Задача 11-1 «Докатились?!»

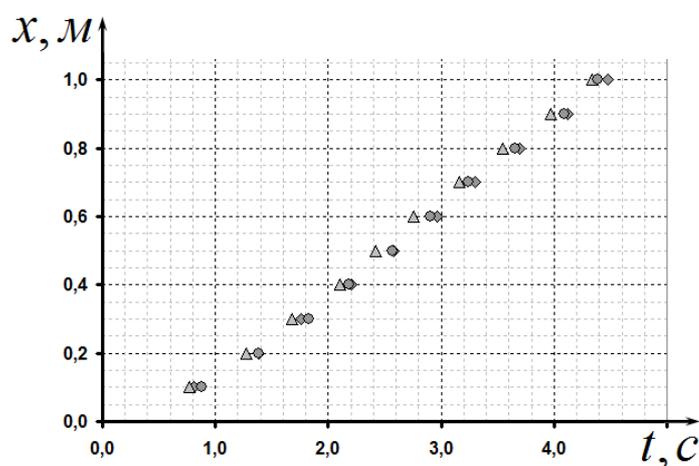
Мы подложили под ножки стола подставку высотой  $h = 2\text{ см}$ , при расстоянии между ножками  $l = 1,4\text{ м}$ , это соответствует углу наклона  $\alpha = \frac{h}{l} \approx 1,4 \cdot 10^{-2}$ .

### Часть 1. Качение пустой бутылки.

В Таблице 1 приведены результаты измерений времен прохождения  $t_k$  пространственных отметок  $x_k$ . Измерения проведены 3 раза (участникам олимпиады достаточно провести 1 серию). Заметим, что проводить усреднение этих данных не имеет смысла, так как проводятся независимые серии измерений. Справа приведены графики этих зависимостей.

Таблица 1.

| $x_k, \text{ м}$ | $t_k, \text{ с}$ | $t_k, \text{ с}$ | $t_k, \text{ с}$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 0                | 0                | 0                | 0                |
| 0,1              | 0,81             | 0,77             | 0,88             |
| 0,2              | 1,38             | 1,27             | 1,38             |
| 0,3              | 1,76             | 1,68             | 1,83             |
| 0,4              | 2,20             | 2,10             | 2,18             |
| 0,5              | 2,58             | 2,42             | 2,57             |
| 0,6              | 2,96             | 2,76             | 2,91             |
| 0,7              | 3,30             | 3,16             | 3,24             |
| 0,8              | 3,70             | 3,55             | 3,66             |
| 0,9              | 4,12             | 3,97             | 4,09             |
| 1                | 4,48             | 4,34             | 4,39             |

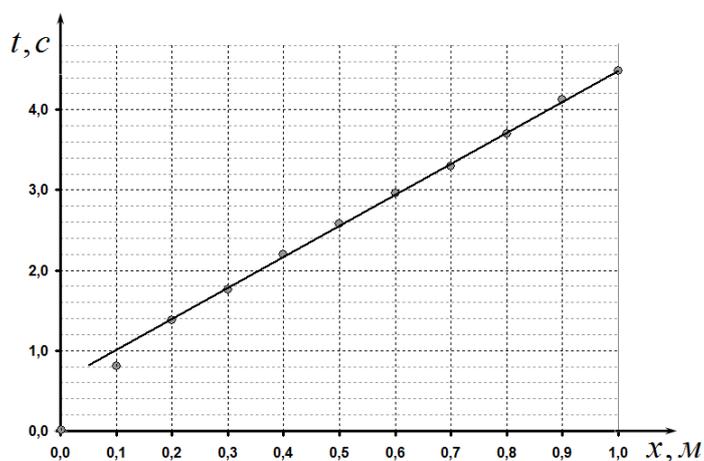


Графики показывают, что после 20 см пройденного пути скатывание можно считать равномерным, так как графики закона движения становятся прямыми.

Для расчета скорости предпочтительнее использовать метод наименьших квадратов. Причем применять его надо к зависимости  $t(x)$ , так как погрешность измерения времен заметно превышает погрешность измерения расстояний<sup>1</sup>. Для дальнейших расчетов использованы данные третьей серии из таблицы 1.

На графике нанесены экспериментальные точки. Хорошо видно, что первая точка отклоняется от линейной зависимости – она попадает на этап разгона. Поэтому линейная зависимость строится по МНК без учета этой точки.

Коэффициенты линейной зависимости  $t = cx + b$ , рассчитанные по МНК равны



<sup>1</sup> Допустимо применять МНК и к зависимости  $x(t)$ , также пропустив первую точку.

$$c = (3,87 \pm 0,06) \frac{c}{m}$$

$$b = (0,62 \pm 0,04)c$$

Отличие параметра  $b$  от нуля объясняется не только погрешностью измерений, но и наличием этапа разгона. Коэффициент  $c$  равен величине обратной скорости установившегося движения.

Поэтому скорость установившегося движения равна  $v = (0,259 \pm 0,004) \frac{m}{c}$ . Таким образом, относительная погрешность измерения менее 2%.

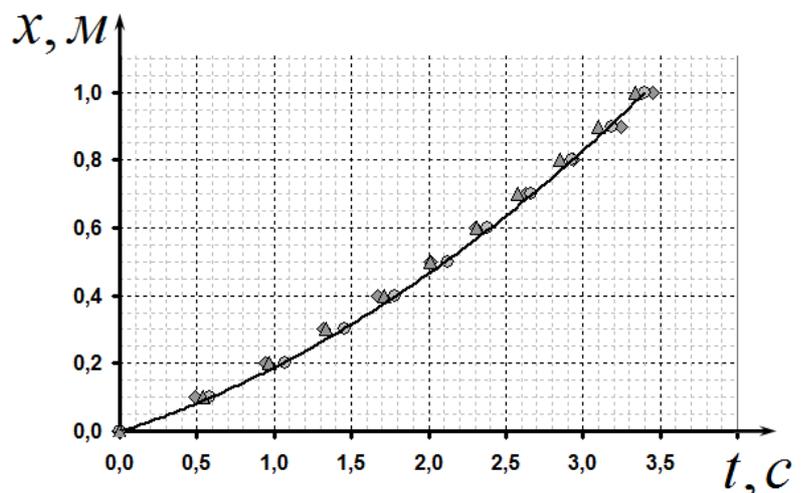
Основной причиной движения с постоянной скоростью, по-видимому, является сила сопротивления воздуха. Заметим, что сила трения качения не приводит к равномерному движению, так как она постоянна. Эта сила может только уменьшить ускорение.

## Часть 2. Качение полной бутылки.

В таблице 2 приведены измерения времен прохождения  $t_k$  пространственных отметок  $x_k$ . Измерения проведены 3 раза (участникам олимпиады достаточно провести 1 серию). Справа приведены графики этих зависимостей.

Таблица 2.

| $x_k, m$ | $t_k, c$ | $t_k, c$ | $t_k, c$ |
|----------|----------|----------|----------|
| 0        | 0        | 0        | 0        |
| 0,1      | 0,49     | 0,58     | 0,54     |
| 0,2      | 0,94     | 1,07     | 0,97     |
| 0,3      | 1,32     | 1,46     | 1,34     |
| 0,4      | 1,67     | 1,78     | 1,69     |
| 0,5      | 2,01     | 2,12     | 2,01     |
| 0,6      | 2,3      | 2,38     | 2,31     |
| 0,7      | 2,63     | 2,66     | 2,58     |
| 0,8      | 2,94     | 2,93     | 2,85     |
| 0,9      | 3,25     | 3,19     | 3,10     |
| 1,60     | 3,45     | 3,40     | 3,34     |

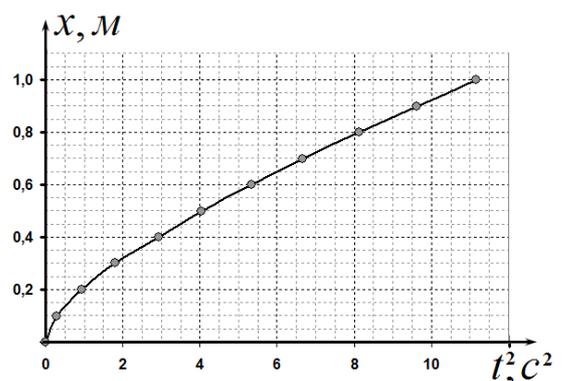


Хорошо видно, что полученные зависимости не являются линейными, но для доказательства того, что движение является равноускоренным, нужен дополнительный анализ. Ниже этот анализ проведен для третьей серии измерения времен.

При равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью закон движения имеет хорошо знакомый вид

$$x = \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$

Заметим, что «очевидная» линеаризация – построение зависимости координаты от квадрата времени, в данном (как и практически всегда при подобных измерениях) не приводит к успеху. Причиной этого являются неизбежные погрешности в определении начала отсчета,



запуска секундомера, наличие начальной скорости (всегда хочется подтолкнуть!). Подтверждением этот является приведенный график, который трудно назвать линейным. Чтобы исключить указанные погрешности можно поступить следующим образом. Запишем закон движения в виде

$$(x - x_1) = V_0(t - t_1) + \frac{a(t - t_1)^2}{2}, \quad (2)$$

где  $t_1$  время прохождения первой отметки с координатой  $x_1$ . Эту зависимость перепишем в виде

$$\frac{(x - x_1)}{(t - t_1)} = V_0 + \frac{a(t - t_1)}{2}, \quad (3)$$

Величина  $\langle v \rangle_1 = \frac{(x - x_1)}{(t - t_1)} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  имеет смысл средней скорости на интервале времени

$(t - t_1)$ , она линейно возрастает с ростом этого интервала. Поэтому эта зависимость также может быть обработана МНК.

В принципе, с чуть большей погрешностью можно обрабатывать зависимость

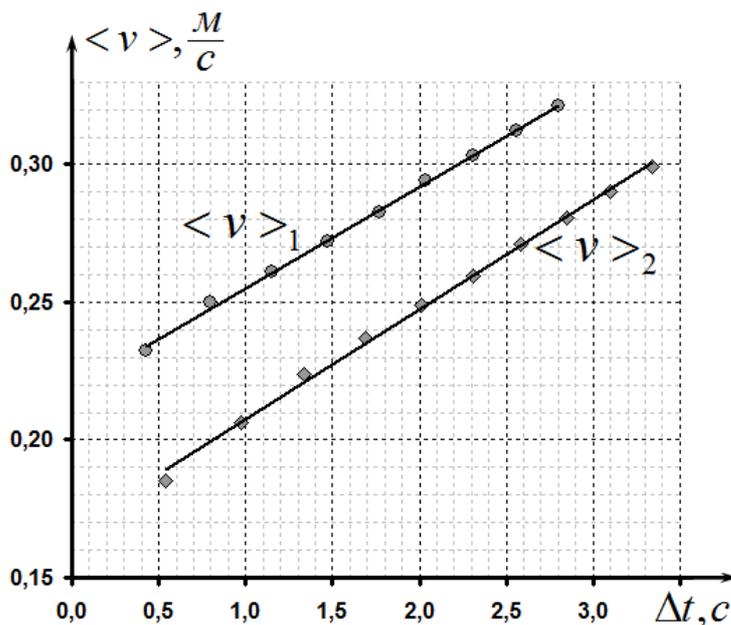
$$\langle v \rangle_2 = \frac{x}{t} = V_0 + \frac{at}{2}, \quad (4)$$

Правда, в этом случае с большой тщательностью необходимо пускать секундомер в момент прохождения нулевой отметки шкалы координат.

В таблице 3 приведены результаты расчетов для построения зависимостей (3) и (4). Графики этих зависимостей приведены рядом с таблицей.

**Таблица 3.**

| $x, \text{см}$ | $t, \text{с}$ | $\langle v \rangle_2$ | $\langle v \rangle_1$ |
|----------------|---------------|-----------------------|-----------------------|
| 0,10           | 0,54          | 0,185                 |                       |
| 0,20           | 0,97          | 0,206                 | 0,233                 |
| 0,30           | 1,34          | 0,224                 | 0,250                 |
| 0,40           | 1,69          | 0,237                 | 0,261                 |
| 0,50           | 2,01          | 0,249                 | 0,272                 |
| 0,60           | 2,31          | 0,260                 | 0,282                 |
| 0,70           | 2,58          | 0,271                 | 0,294                 |
| 0,80           | 2,85          | 0,281                 | 0,303                 |
| 0,90           | 3,10          | 0,290                 | 0,313                 |
| 1,00           | 3,34          | 0,299                 | 0,321                 |



Расчет ускорений по этим зависимостям с использованием МНК приводит к следующим значениям:

по зависимости (3)  $a = (7,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ;

по зависимости (4)  $a = (8,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

Как видно результаты близки, относительная погрешность составляет величину порядка 4%.

При движении полной бутылки вода практически сразу начинает двигаться как единое целое, поэтому почти не оказывает тормозящего действия. Так как масса полной бутылки

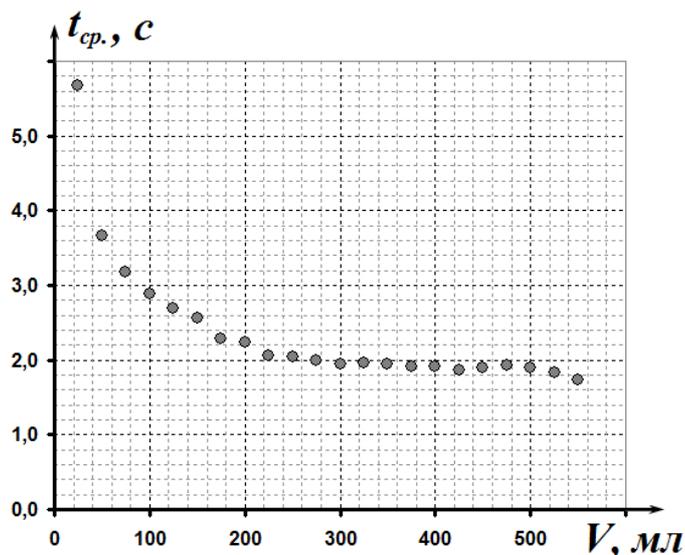
значительно больше массы пустой, влияние силы сопротивления воздуха становится намного меньше.

### Часть 3. Бутылка «наполовину пустая», или «наполовину полная»?

Результаты измерений зависимости времени скатывания (проводились на расстоянии 0,5 м) от объема воды, налитой в бутылку приведены в таблице 4. Рядом построен график полученной зависимости. Для каждого объема проведено три измерения, на графике приведены средние значения этих времен

Таблица 4.

| $V, \text{мл}$ | $t_1, \text{с}$ | $t_2, \text{с}$ | $t_3, \text{с}$ | $t_{\text{ср.}}, \text{с}$ |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------------------|
| 25             | 5,85            | 5,59            | 5,61            | 5,683                      |
| 50             | 3,82            | 3,54            | 3,65            | 3,670                      |
| 75             | 3,24            | 3,11            | 3,17            | 3,173                      |
| 100            | 2,92            | 2,78            | 2,95            | 2,883                      |
| 125            | 2,74            | 2,60            | 2,72            | 2,687                      |
| 150            | 2,57            | 2,55            | 2,58            | 2,567                      |
| 175            | 2,32            | 2,27            | 2,26            | 2,283                      |
| 200            | 2,22            | 2,27            | 2,21            | 2,233                      |
| 225            | 2,08            | 2,07            | 2,03            | 2,060                      |
| 250            | 2,05            | 2,05            | 2,04            | 2,047                      |
| 275            | 2,03            | 2,02            | 1,95            | 2,000                      |
| 300            | 2,00            | 1,93            | 1,93            | 1,953                      |
| 325            | 1,97            | 1,96            | 1,94            | 1,957                      |
| 350            | 1,93            | 1,98            | 1,91            | 1,940                      |
| 375            | 1,97            | 1,91            | 1,88            | 1,920                      |
| 400            | 1,86            | 1,96            | 1,93            | 1,917                      |
| 425            | 1,90            | 1,85            | 1,85            | 1,867                      |
| 450            | 1,89            | 1,95            | 1,87            | 1,903                      |
| 475            | 1,92            | 1,89            | 1,97            | 1,927                      |
| 500            | 1,97            | 1,87            | 1,84            | 1,893                      |
| 525            | 1,81            | 1,88            | 1,83            | 1,840                      |
| 550            | 1,70            | 1,75            | 1,77            | 1,740                      |



Изменение объема воды приводит:

- к уменьшению влияния сопротивления воздуха, при увеличении массы налитой воды влияние сопротивления воздуха уменьшается;
- изменению влияния сил вязкого трения (сначала они возрастают, а затем начинают уменьшаться – при полной бутылке, как было показано, они не играют решающей роли).

## Задача 11-2 Полумаятник.

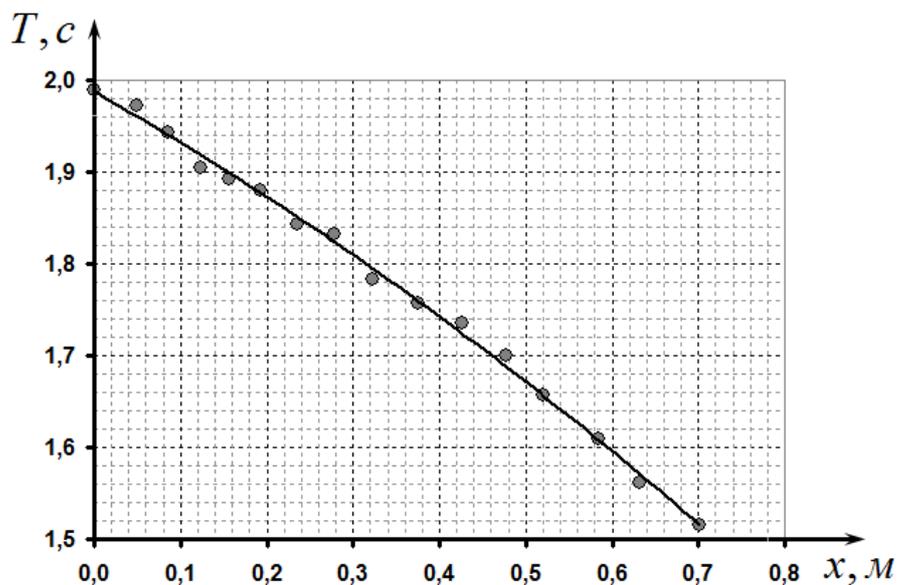
### Часть 1. Упор снизу.

В ходе измерений использовался маятник длиной  $L = 0,96\text{ м}$ .

1.1 Результаты измерений зависимости периода колебаний от положения упора приведены в Таблице 1. Периоды колебаний получены по измерениям 10 колебаний. Рядом показан график полученной зависимости.

Таблица 1.

| $x, \text{ м}$ | $T, \text{ с}$ |
|----------------|----------------|
| 0,000          | 1,989          |
| 0,050          | 1,972          |
| 0,085          | 1,943          |
| 0,123          | 1,905          |
| 0,156          | 1,893          |
| 0,192          | 1,880          |
| 0,236          | 1,844          |
| 0,279          | 1,832          |
| 0,323          | 1,783          |
| 0,375          | 1,757          |
| 0,427          | 1,735          |
| 0,477          | 1,700          |
| 0,520          | 1,657          |
| 0,584          | 1,610          |
| 0,632          | 1,562          |
| 0,701          | 1,515          |



1.3 Очевидно, что период колебаний будет равен полусумме периодов колебаний маятников с длинами  $L$  и  $(L - x)$ :

$$T = \frac{T_0 + T_1}{2} = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} + \pi \sqrt{\frac{L-x}{g}}. \quad (1)$$

1.4 Линеаризация данной зависимости может быть проведена различными способами. Один из них следующий. Представим формулу (1) в виде

$$2 \frac{T}{T_0} = 1 + \sqrt{\frac{L-x}{L}}, \quad (2)$$

где  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$  - период колебаний маятника без упора. Зависимость величины  $Z = 2 \frac{T}{T_0}$

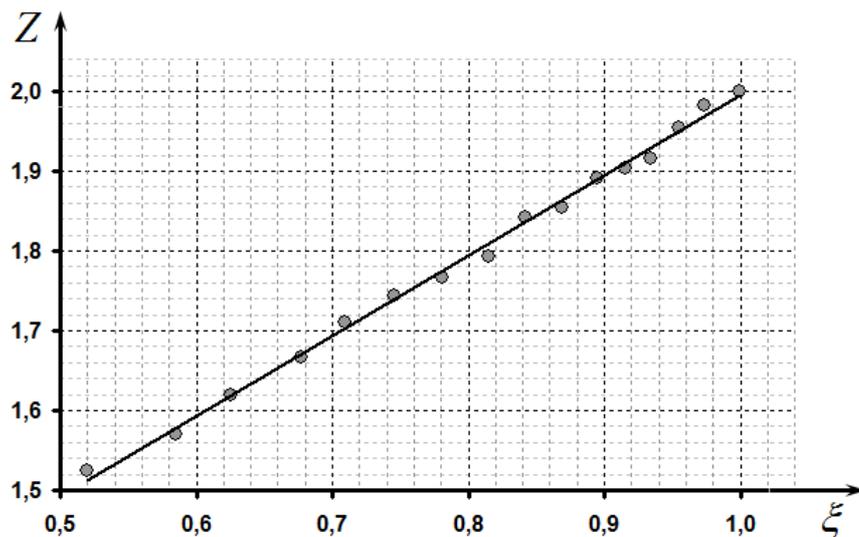
от величины  $\xi = \sqrt{\frac{L-x}{L}}$  имеет простой вид

$$Z = 1 + \xi. \quad (3)$$

В таблице 2 приведены результаты расчетов величин этой зависимости, проведенные по экспериментальным данным. Справа показан график полученной зависимости.

Таблица 2.

| $\xi$ | $Z$   |
|-------|-------|
| 1,000 | 2,000 |
| 0,974 | 1,983 |
| 0,955 | 1,954 |
| 0,934 | 1,915 |
| 0,915 | 1,903 |
| 0,894 | 1,891 |
| 0,868 | 1,854 |
| 0,842 | 1,842 |
| 0,815 | 1,793 |
| 0,781 | 1,767 |
| 0,745 | 1,744 |
| 0,709 | 1,710 |
| 0,677 | 1,666 |
| 0,626 | 1,619 |
| 0,585 | 1,570 |
| 0,519 | 1,524 |



В полном соответствии с теоретической формулой (3) получена линейная зависимость. Параметры этой зависимости  $Z = a\xi + b$ , рассчитанные по МНК, оказались равными

$$\begin{aligned} a &= 1,00 \pm 0,03 \\ b &= 0,99 \pm 0,03 \end{aligned} \quad (4)$$

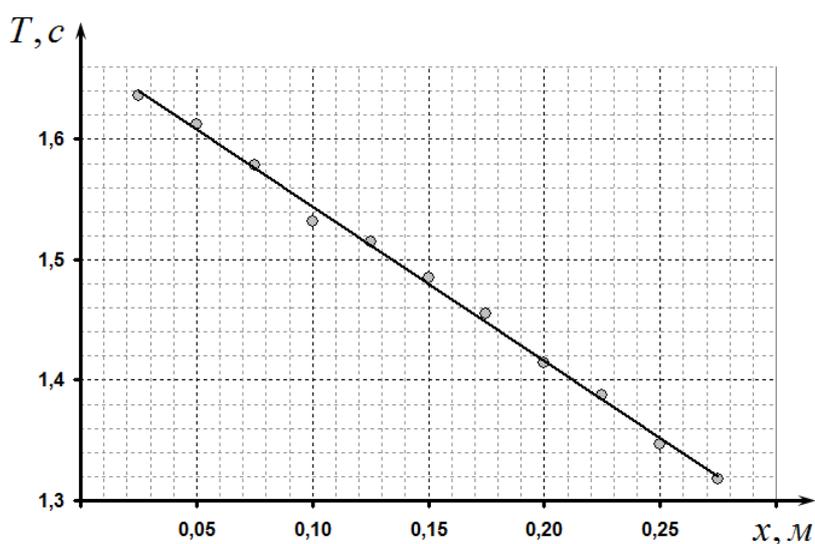
Что полностью подтверждает теоретическую формулу.

### Часть 2. Упор сбоку.

Измерения проведены при  $L = 0,88\text{ м}$ ,  $x_0 = 0,30\text{ м}$ . Результаты измерений зависимости периода колебаний  $T$  от положения упора  $x$  приведены в таблице 3. Рядом показан график полученной зависимости.

Таблица 3.

| $x, \text{ м}$ | $T, \text{ с}$ |
|----------------|----------------|
| 0,025          | 1,637          |
| 0,050          | 1,613          |
| 0,075          | 1,579          |
| 0,100          | 1,532          |
| 0,125          | 1,515          |
| 0,150          | 1,486          |
| 0,175          | 1,455          |
| 0,200          | 1,414          |
| 0,225          | 1,388          |
| 0,250          | 1,347          |
| 0,275          | 1,318          |



Как ни странно, эта зависимость с достаточной точностью может быть описана линейной функцией (период в секундах,  $x$  - в метрах)

$$T = 1,67 - 1,28x. \quad (5)$$