



*А.И. Слободянюк  
Н.В. Козловский  
Л.Г. Маркович*



*Республиканская  
физическая  
олимпиада  
(III этап)  
2010 год.*

Экспериментальный тур  
Решение

## 9 класс.

Медленное движение.

В данной задаче изучается закон движения, причем во всех случаях это движение является равномерным. С точки зрения «теоретиков» не разницы строить зависимость координаты от времени  $x(t)$ , или времени от координаты  $t(x)$ . Однако «настоящий экспериментатор»<sup>1</sup> должен строить вторую зависимость  $t(x)$ , потому, что в ходе измерений предпочтительнее измерять время прохождения заданного пути (так проще и точнее). При таком методе измерения погрешность измерения времени больше погрешности заметно больше, чем погрешность определения координаты, поэтому время должно быть «функцией», а координата – «аргументом». Ниже мы везде будем строить зависимость  $t(x)$ . Коэффициент наклона прямой в этом случае равен величине обратной скорости.

Ниже приведены результаты измерений и графики полученных зависимостей. Они построены отдельно, чтобы не загромождать рисунки. Для каждого стержня измерения проведены дважды, причем во второй раз установка перевернута, поэтому наклон графика противоположный. В качестве оси координат везде использована шкала линейки (поэтому графики не выходят из нуля). Полностью допустимым является иное начало отсчета, например, совпадающее с положением стержня в момент начала отсчета времени. В названии таблицы приведен диаметр исследуемого стержня. Приведенные здесь измерения проведены в неразбавленном геле для мытья посуды. В нижней строке указаны рассчитанные по графикам скорости движения (в  $см/с$ ).

Таблица 1.  $d = 2,0 мм$ .

Открытый конец вверх		Открытый конец вниз	
$x, см$	$t, с$	$x, см$	$t, с$
36	0		
35	7,67	33	0
34	14,91	34	7,49
33		35	14,65
32	29,65	36	21,23
31	36,8	37	27,77
30	44,16	38	34,43
29		39	
28		40	47,25
27	64,59		
<b>0,139</b>		<b>0,149</b>	

График 1.



<sup>1</sup> По нашему мнению, высшим баллом за методику измерения следует оценивать именно измерение  $t(x)$ , так точность в этом случае действительно выше. При измерении зависимости  $x(t)$  (то есть попытка фиксировать координату в определенные моменты времени) трудно точно зафиксировать положение тела. При оценивании построения графика следует учесть методику измерения – построение графика должно соответствовать ей. В противном случае следует немного наказывать при выставлении оценок.

Таблица 2.  $d = 2,5\text{мм}$ .

Открытый конец вверх		Открытый конец вниз	
$x, \text{см}$	$t, \text{с}$	$x, \text{см}$	$t, \text{с}$
36	0	32	0
35	8,39	33	8,19
34	16,94	34	17,43
33	25,68	35	25,48
32	34,22	36	33,69
31	43,79	37	42,09
30	53,5	38	50,22
29	62,39	39	57,74
27	79,85	40	
36	0	32	0
<b>0,112</b>		<b>0,121</b>	

График 2.

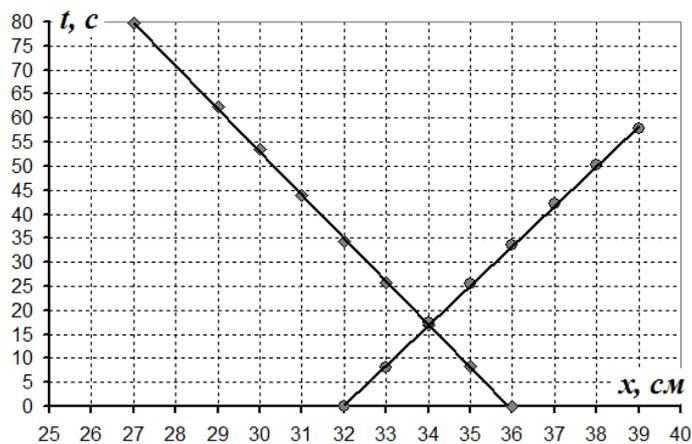


Таблица 3.  $d = 2,8\text{мм}$ .

Открытый конец вверх		Открытый конец вниз	
$x, \text{см}$	$t, \text{с}$	$x, \text{см}$	$t, \text{с}$
36	0	32	0
35	11,01	33	10,04
34	22,73	34	22,17
33	37,92	35	32,94
32		36	45,4
32	50,99	37	55,16
31	63,77	38	67,17
30	74,25	39	77,9
29	85,4	40	91,53
28	98,08	32	0
<b>0,081</b>		<b>0,088</b>	

График 3.

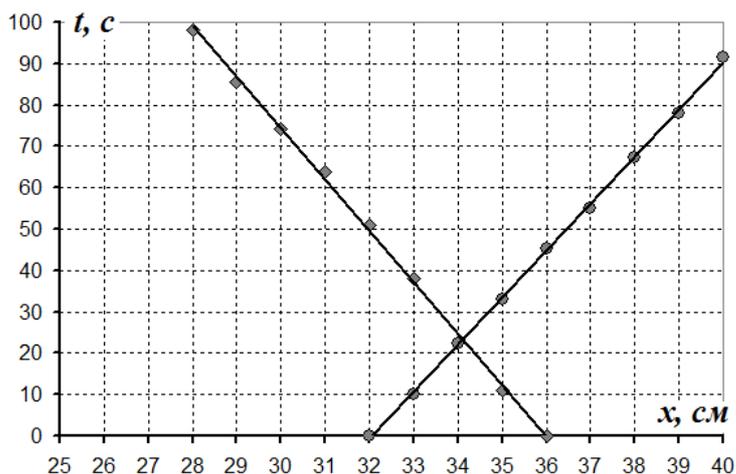


Таблица 4.  $d = 3,0\text{мм}$ .

Открытый конец вверх		Открытый конец вниз	
$x, \text{см}$	$t, \text{с}$	$x, \text{см}$	$t, \text{с}$
		32	0
		33	14,52
		34	28,06
		35	41,82
		36	55,82
		37	69,15
		38	82,72
		39	95,1
		40	108,03
		<b>0,074</b>	

График 4.

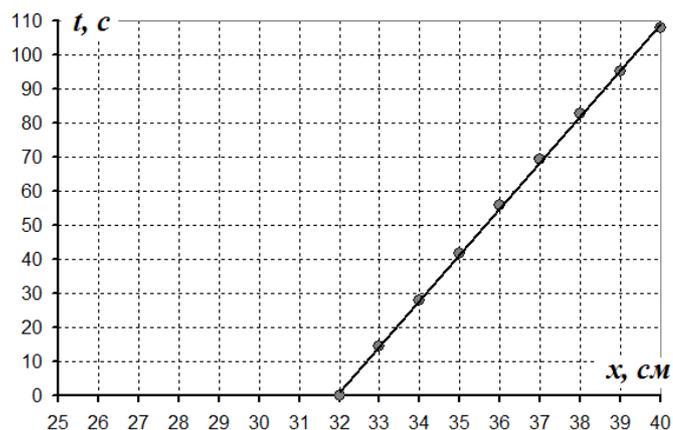


Таблица 5.  $d = 3,5\text{мм}$ .

Открытый конец вверх		Открытый конец вниз	
$x, \text{см}$	$t, \text{с}$	$x, \text{см}$	$t, \text{с}$
36	0		
35	31,61		
34	64,06		
33	98,22		
32			
31	162,63		
30	194,4		
29	225,92		
28	258,21		
27	291,94		
<b>0,0309</b>			

График 5.

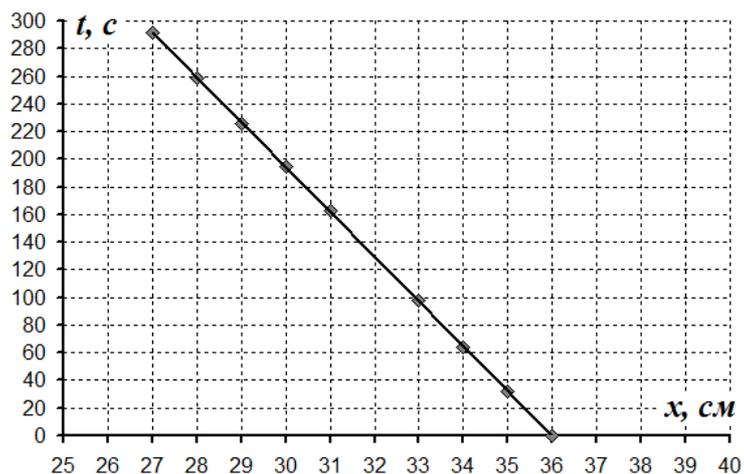
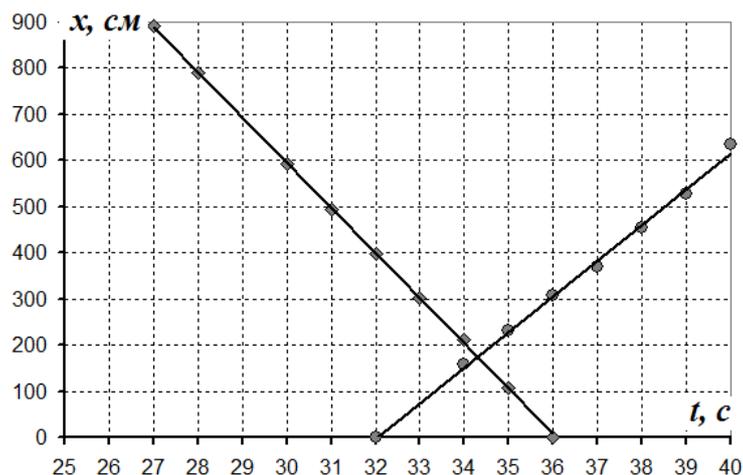


Таблица 6.  $d = 4,0\text{мм}$ .

Открытый конец вверх		Открытый конец вниз	
$x, \text{см}$	$t, \text{с}$	$x, \text{см}$	$t, \text{с}$
36	0	32	0
35	108,04	33	
34	211,07	34	157,01
33	303,25	35	230,65
32	399,17	36	306,16
31	493,42	37	368,37
30	591,98	38	452,83
29		39	526,82
28	790,42	40	633,97
27	891,23	32	0
<b>0,0102</b>		<b>0,130</b>	

График 6.

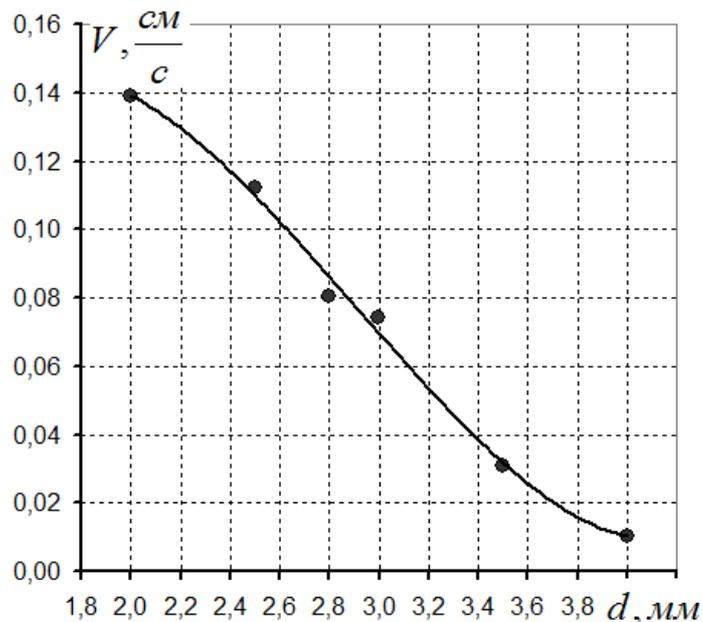


Заметим, что в соответствии с условием от участников не требуется измерять закон движения для всех стержней. Достаточно провести такие измерения для одного стержня (с меньшим шагом, для стержня максимального диаметра – движение медленное, измерения точнее). Для остальных – можно несколько раз измерить время прохождения фиксированного пути, и рассчитать скорость движения. Мы тоже позволили себе также пропустить некоторые измерения.

Разброс значений времен движения (соответственно и скоростей) может быть весьма заметным, порядка 20%. Это обусловлено тем, на каком расстоянии от оси трубки движется стержень. Поэтому измерения времен следует производить неоднократно, 5-6 раз!

График зависимости скорости стержня от его диаметра показан на рисунке 7. По его внешнему виду трудно определить вид функциональной зависимости. Однако, в теоретическом туре участники должны были получить, что зависимость скорости от толщины зазора кубическая, поэтому следует предпринять попытку такой проверки.

График 7.



Эту проверку можно провести различными способами, например, построить зависимость скорости от куба разности диаметров трубки ( $D = 5,1\text{ мм}$ ) и стержня. (график 8).

Эта зависимость близка к линейной, что частично подтверждает выдвинутую гипотезу.

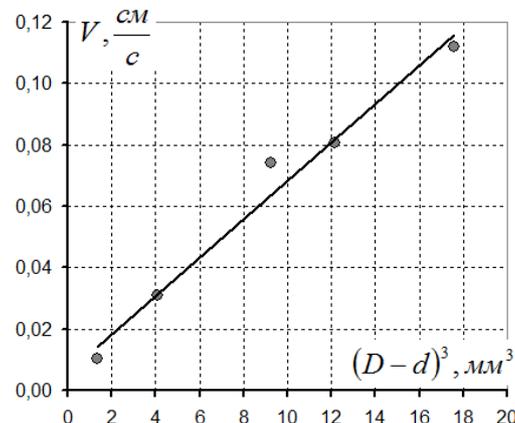


График 8.

Наиболее разумным (но не доступным для девятиклассников) методом определения показателя степени является построения графика в двойном логарифмическом масштабе. Такой метод анализа показывает, что показатель степени действительно близок к трем.

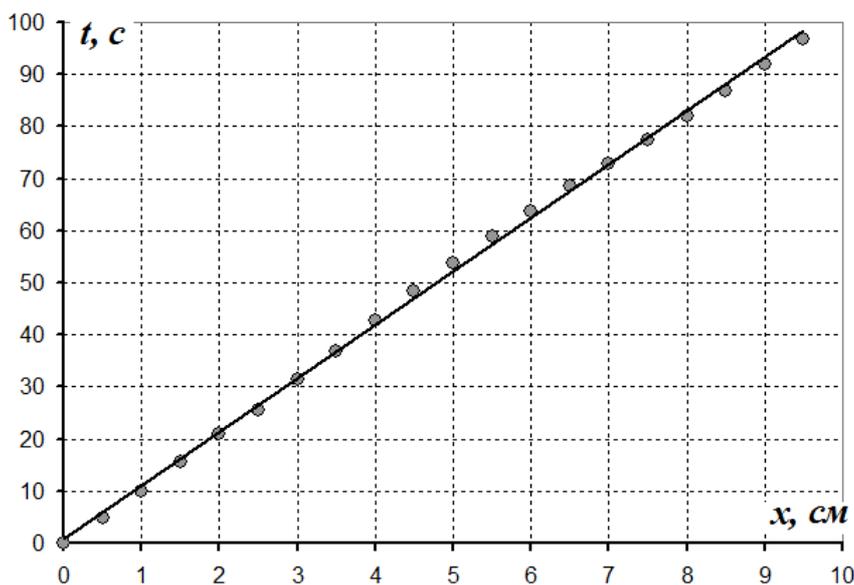
**Дополнение.**

Приведем данные по изучению закона движения в геле, слегка разбавленном водой. В этом случае скорости движения значительно больше, что ускоряет измерения, но увеличивает их погрешность. Кроме того, в этом случае можно провести измерения для более толстого стержня (приведено, для  $d = 4,0\text{ мм}$ ).

Таблица 7.

$x, \text{ см}$	$t, \text{ с}$
0,00	0,00
0,50	4,91
1,00	9,93
1,50	15,63
2,00	20,85
2,50	25,58
3,00	31,54
3,50	36,93
4,00	42,86
4,50	48,52
5,00	53,80
5,50	58,97
6,00	63,61
6,50	68,43
7,00	72,76
7,50	77,50
8,00	82,06
8,50	86,85
9,00	92,02
9,50	96,75

График 9.



Приведем также зависимость скорости стержня от разности диаметров трубки и стержня. Эта зависимость гораздо больше похожа на степенную зависимость, причем показатель степени (если отбросить движение самого тонкого стержня) весьма близок к 3.

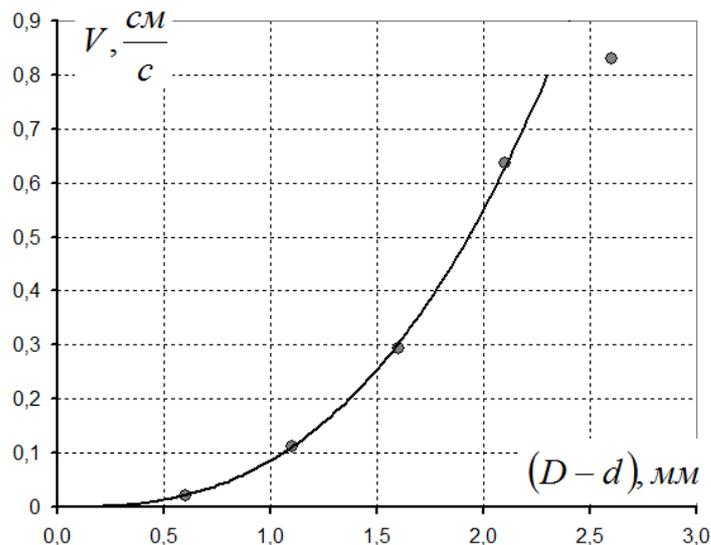


График 10.

## Часть 2. Дерево.

Если погрузить стержень в трубку с гелем сверху, то он установится на определенной глубине. Отношение длины погруженной части к полной длине стержня будет равно отношению их плотностей. По нашим измерениям это отношение близко к 0,7 (оно зависит от используемого геля).

Доказательство равномерности движения проводится аналогично, приведенному в первой части. Эксперимент показывает, что движение действительно очень близко к равномерному.

Время всплытия (следовательно, и скорость) в пределах погрешностей измерений **не зависит (!)** от длины палочки, поэтому график этой «зависимости» является горизонтальной прямой. Причина этого явления подробно рассмотрена в теоретической задаче: суммарная сила давления жидкости и сила вязкого трения пропорциональны длине стержня, поэтому скорость установившегося движения от длины стержня не зависит.

Трение и сопротивление.**Часть 1. Изучение молотка.**

1. Энергия, полученная коробком, расходуется на работу по преодолению силы трения, поэтому

$$E = \mu mgS ,$$

Откуда следует, что

$$S = \frac{E}{\mu mg} . \quad (1)$$

2. Так как энергия, переданная коробку, пропорциональна пройденному им пути, то в качестве единицы энергии можно использовать сам пройденный путь  $S$  (будем измерять в см).

Результаты измерений зависимости пройденного пути  $S$  от отклонения маятника  $x$  приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

$x, \text{ см}$	Пройденный путь $S, \text{ см}$					среднее
	1	2	3	4	5	
<b>1,0</b>	0,3	0,4	0,5	0,4	0,3	<b>0,38</b>
<b>1,5</b>	0,7	0,7	0,8	0,7	0,8	<b>0,74</b>
<b>2,0</b>	1,6	1,5	1,6	1,3	1,5	<b>1,50</b>
<b>2,5</b>	2,5	2,5	2,4	2,4	2,3	<b>2,42</b>
<b>3,0</b>	3,4	3,1	3,3	3,4	3,5	<b>3,34</b>
<b>3,5</b>	5,0	4,8	4,9	4,8	4,9	<b>4,88</b>
<b>4,0</b>	5,9	6,0	5,8	5,7	6,1	<b>5,90</b>
<b>4,5</b>	7,0	7,1	7,1	7,5	7,0	<b>7,14</b>
<b>5,0</b>	8,6	8,8	8,7	9,5	8,9	<b>8,90</b>
<b>5,5</b>	10,1	10,5	11,1	11,3	11,1	<b>10,82</b>

На графике 1 построена данная зависимость. Эта зависимость очень похожа на квадратичную. Для проверки этого предположения зависимость следует линеаризовать. Для этого рядом построен график 2 зависимости пройденного пути от квадрата начального отклонения молотка. Этот график подтверждает, переданная энергия пропорциональна квадрату начального отклонения.

График 1.

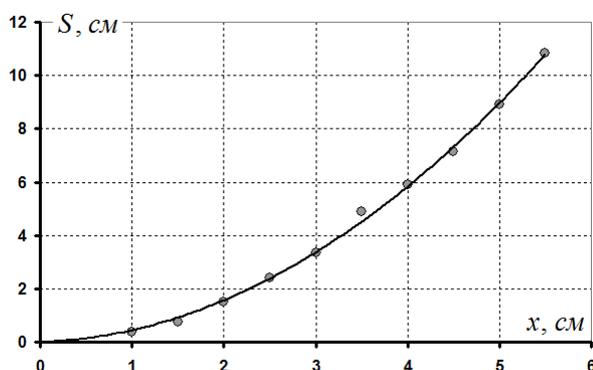
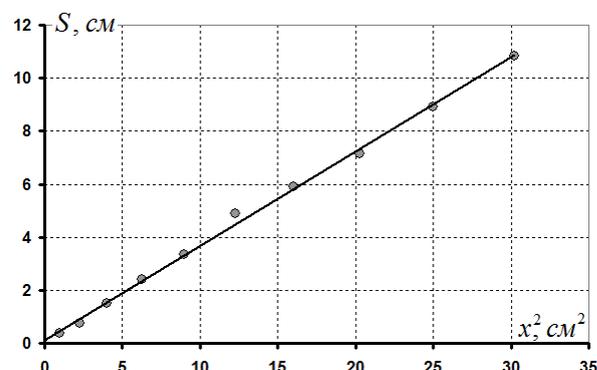


График 2.



Функция, описывающая линеаризованную зависимость, имеет вид

$$S = Kx^2 + b . \quad (2)$$

Параметры этой зависимости<sup>2</sup>, рассчитанные по методу наименьших квадратов, равны

$$K = (0,354 \pm 0,012) \text{ см}^{-1}$$

$$b = (0,12 \pm 0,19) \text{ см}$$

Параметр  $b$  может быть признан равным нулю, поэтому гипотеза о пропорциональности между переданной энергией и квадратом начального отклонения подтверждается. Теоретически данный результат очевиден – потенциальная энергия молотка в начальном положении пропорциональна квадрату отклонения (энергия упругой деформации), следовательно, кинетическая энергия в нижней точке и переданная энергия имеют ту же зависимость.

Возможна и другая линейризация – зависимость корня из смещения от начального отклонения  $\sqrt{S} = ax + b$

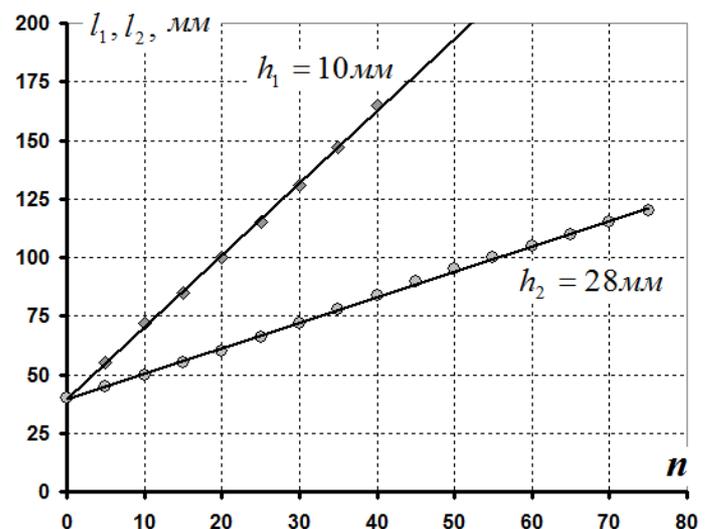
### Часть 2. Поролон.

В Таблице 2 приведены результаты измерений (средние по 3 измерениям) расстояния  $l$ , пройденного деревянной палочкой, протыкающей кусок поролона толщиной  $h$  от числа ударов  $n$ . На графике 3 построены эти зависимости.

Таблица 2.

$n$	$l_1, \text{мм}$	$l_2, \text{мм}$
	$h_1 = 10 \text{мм}$	$h_2 = 28 \text{мм}$
0	40	40
5	55	45
10	72	50
15	85	55
20	100	60
25	115	66
30	131	72
35	147	78
40	165	84
45		90
50		95
55		100
60		105
65		110
70		115
75		120

График 3.



Полученные зависимости линейны с высокой точностью, но с разными коэффициентами наклона. Такие результаты могут быть объяснены, если предположить, что на палочку, при ее движении через поролон действует сила трения, пропорциональная толщине слоя поролона  $h$ :

$$F_{\text{тр.}} = kh. \quad (3)$$

В этой модели, путь пройденной палочкой за  $n$  ударов, определяется формулой

$$l = l_0 + \frac{E}{kh} n, \quad (4)$$

<sup>2</sup> По условию задачи эти параметры рассчитывать не требуется, но доказательство того, что энергия пропорциональна квадрату отклонения необходимо.

где  $E$  - энергия, переданная палочке при одном ударе,  $l_0$  - начальная глубина погружения палочки. Теоретическая зависимость (4) объясняет экспериментальные данные, представленные в таблице 2 и на графике 3.

Используя метод наименьших квадратов, найдем параметры линейных зависимостей

$$l = an + b. \quad (5)$$

Для  $h_1 = 10\text{мм}$ :

$$a_1 = (3,08 \pm 0,07)\text{мм}; \quad b_1 = (39,5 \pm 1,7)\text{мм};$$

Для  $h_2 = 28\text{мм}$

$$a_2 = (1,09 \pm 0,02)\text{мм}; \quad b_2 = (39,4 \pm 0,8)\text{мм};$$

Во-первых, параметры  $b$  в пределах погрешностей совпадают с начальным положением палочки.

Во-вторых, согласно теоретической зависимости (4), коэффициенты наклона должны быть обратно пропорциональны толщине слоя поролона. То есть должно выполняться соотношение

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{h_2}{h_1} \approx 2,8.$$

Найдем это отношение для рассчитанных коэффициентов наклона

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3,08}{1,09} \approx 2,82;$$

$$\Delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{a_1}{a_2} \sqrt{\left(\frac{\Delta a_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a_2}{a_2}\right)^2} = 0,12 \quad (6)$$

Таким образом, предположение о пропорциональности между силой трения и толщиной слоя поролона полностью подтверждается.

Отметим, что параметр  $a$  и есть средний путь, проходимый палочкой через поролон за один удар.

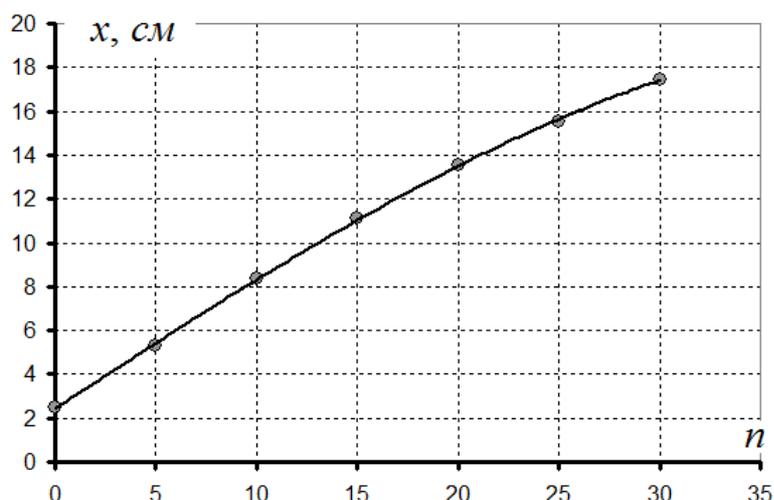
### Часть 3. Бумага.

Результаты измерения средней глубины погружения  $x$  «деревянного гвоздя» в книгу от числа ударов  $n$  приведены в Таблице 3, на графике 4 построена полученная зависимость.

Таблица 3.

$n$	$x, \text{см}$	$x^2, \text{см}^2$
0	2,5	6,3
5	5,3	28,1
10	8,4	70,0
15	11,1	123,2
20	13,5	183,2
25	15,5	241,3
30	17,5	305,1

График 4.



Полученная зависимость является нелинейной. Этот результат становится понятным, если учесть, что работа силы трения зависит от глубины проникновения. Можно предположить, что сила сопротивления, действующая на острие палочки мала

(палочка только раздвигает страницы), поэтому в первом приближении ею можно пренебречь.

Как и в первой части задачи, предположим, что сила трения, действующая на палочку пропорциональна глубине погружения (3).

Тогда, работа силы трения во время  $n$ -го удара рассчитывается по формуле

$$E = k \frac{x_n + x_{n-1}}{2} (x_n - x_{n-1}),$$

из которой следует, что глубины погружения связаны соотношением

$$x_n^2 = x_{n-1}^2 + \frac{2E}{k}.$$

Следовательно, квадраты глубины погружения образуют арифметическую прогрессию, записанную в явном виде

$$x_n^2 = x_0^2 + \frac{2E}{k} n. \quad (7)$$

Для проверки этой формулы, построим зависимость квадрата глубины погружения от числа ударов (График 5)

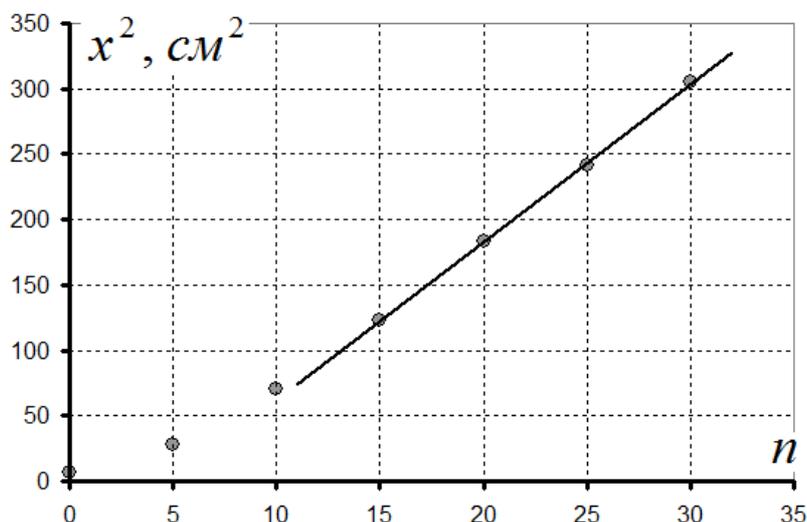


График 5.

Строго говоря, эта зависимость не является линейной, но при заметной глубине погружения (при  $x > 10$  см) точки графика почти точно ложатся на прямую. По-видимому, при малых  $x$  определенную роль играет сила, действующая на острие. При больших глубинах основную роль играют силы, действующие на боковую поверхность, что подтверждается графиком 5.

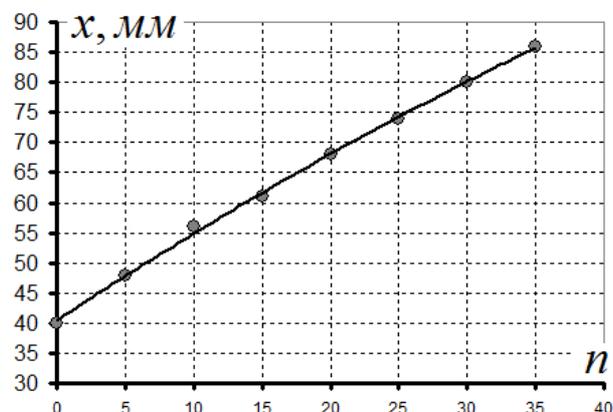
#### Часть 4. Спица в поролоне.

Результаты измерения зависимости глубины проникновения спицы в поролон  $x$  от числа ударов (об пол)  $n$  приведены в Таблице 4 и на графике 6.

Таблица 4.

$n$	$x, \text{мм}$	$x^2, \text{см}^2$	$\xi$	$Z$
0	40	16,00		
5	48	23,04	2,20	25,00
10	56	31,36	2,40	25,00
15	61	37,21	2,53	28,57
20	68	46,24	2,70	28,57
25	74	54,76	2,85	29,41
30	80	64,00	3,00	30,00
35	86	73,96	3,15	30,43

График 6.



Зависимость не линейна, что опять свидетельствует о заметном влиянии силы трения на боковой поверхности на движение спицы.

В ходе проникновения спицы в поролон она должна разрывать материал, поэтому также должна сказываться сила, действующая на острие. Последнюю разумно считать постоянной (вспомните теоретическую задачу!).

При наличии двух сил, постоянной  $f$  (на острие) и пропорциональной глубине проникновения  $F_{mp.} = kx$ , работа по преодолению этих сил равна

$$A = \frac{k(x^2 - x_0^2)}{2} + f(x - x_0).$$

Эта работа равна суммарной энергии, полученной спицей за все удары. Поэтому уравнение для определения зависимости глубины погружения от числа ударов имеет вид

$$\frac{k(x^2 - x_0^2)}{2} + f(x - x_0) = En. \quad (8)$$

Проверить данное соотношение достаточно сложно при малом числе экспериментальных данных.

Очень интересным является следующее преобразование<sup>3</sup>. Разделим уравнение (8) на  $(x - x_0)$  и преобразуем его к виду

$$\frac{x_0}{(x - x_0)} n = \frac{kx_0^2}{2E} \left( \frac{(x + x_0)}{x_0} + 2 \frac{f}{kx_0} \right) \quad (9)$$

Построим зависимость между безразмерными величинами  $Z = \frac{x_0}{(x - x_0)} n$  и  $\xi = \frac{(x + x_0)}{x_0}$ .

Если исходные предположения модели о характере действующих сил верны, то указанная зависимость линейна

$$Z = A\xi + B.$$

Причем параметры этой зависимости имеют явный физический смысл:

<sup>3</sup> Трудно ожидать, что участники олимпиады предложат такой путь анализа, поэтому эта часть выделена курсивом. При оценивании данного пункта задачи предлагается оценивать саму модель (8) и попытки ее любой разумной линеаризации и обоснования вывода о применимости данной модели. Ниже изложены альтернативные варианты, которые, по нашему мнению должны оцениваться не более чем в половину баллов за последний пункт задания.

- параметр  $A = \frac{kx_0^2}{2E}$  - равен отношению энергии, необходимой чтобы совершить работу против сил бокового трения при погружении на начальную глубину  $x_0$ ;

- значение  $\xi^* = -\frac{B}{A} = 2 \frac{f}{kx_0}$  (при котором  $Z$  обращается в нуль) равно отношению силы

лобового сопротивления к величине силы бокового трения при погружении на половину начальной глубины.

В таблице 4 приведены результаты расчетов величин  $(\xi, Z)$ , а на графике 7 построена зависимость между ними.

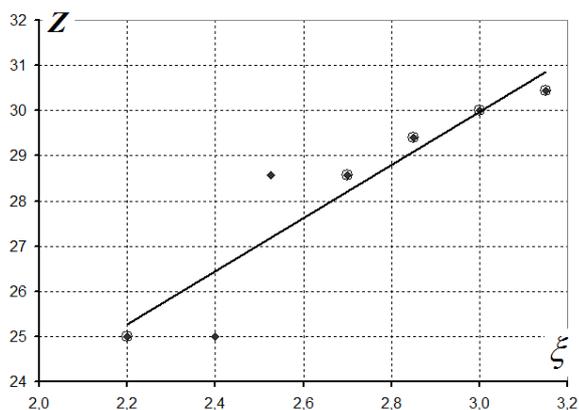


График 7.

Конечно, трудно назвать ее идеально линейной, но нужная тенденция наблюдается. Если отбросить явно выпадающие точки и найти параметры линейной зависимости, то получим следующие значения

$$A = 5,9 \pm 1,6$$

$$B = 12 \pm 6 \quad \xi^* \approx 2$$

Полученные значения вполне разумны: если бы не было лобового сопротивления, то для того чтобы забить спицу на 40 мм необходимо примерно 6 ударов; сила лобового сопротивления приметно равна силе бокового сопротивления на 20 мм длины спицы (по меньшей мере она сравнима с силой бокового трения).

Еще раз подчеркнем, анализировать экспериментальные данные этой части задачи сложно так как, и данных мало, и точность не высока.

Если построить зависимости  $x(n)$  и  $x^2(n)$  (Графики 8 – 9), то каждую из них с некоторой погрешностью можно принять за линейную.

График 8.

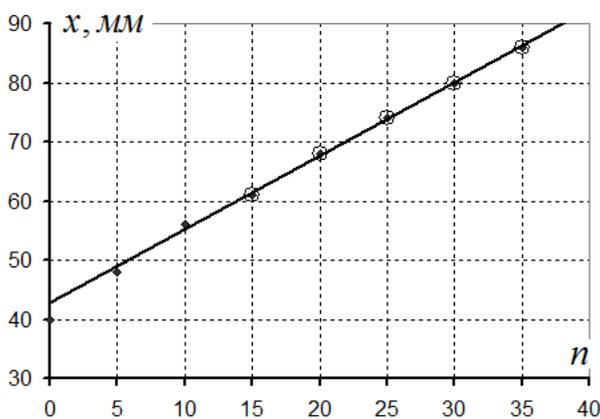
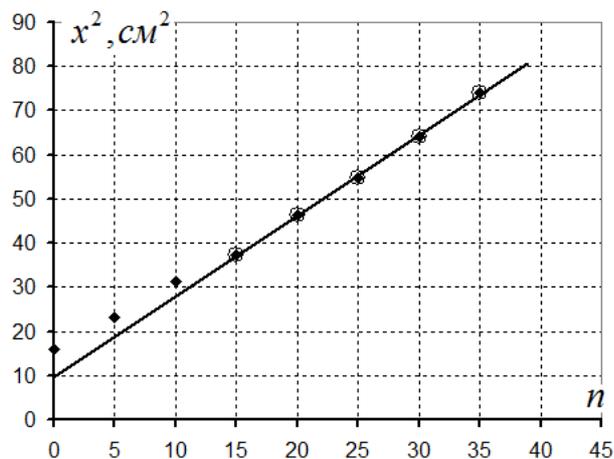


График 9.



В первом случае следует признать, что преобладает сила лобового сопротивления, во втором – сила бокового трения.

**Как измерить радиус кривизны с помощью секундомера?**

**1.1-1.3** Для расчета периода колебаний необходимо измерить диаметр полукольца. Так как полукольцо имеет некоторую толщину, то измерим как внешний  $D_1$ , так и его внутренний  $D_2$  диаметры:

$$D_1 = (109 \pm 1) \text{ мм}$$

$$D_2 = (101 \pm 1) \text{ мм}$$

В данном случае основная погрешность есть приборная, в качестве которой взята цена деления линейки.

Рассчитаем значения периодов колебаний по приведенным формулам (заменяя в них радиус на диаметр):

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\pi D_1}{4g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi \cdot 109 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 9,81}} \approx 0,587 \text{ с}; \quad \Delta T_1 = \frac{1}{2} T_1 \frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{1}{2} \cdot 0,587 \cdot \frac{1}{109} \approx 0,003 \text{ с}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{D_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{109 \cdot 10^{-3}}{9,81}} \approx 0,662 \text{ с}; \quad \Delta T_2 = \frac{1}{2} T_2 \frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{1}{2} \cdot 0,662 \cdot \frac{1}{109} \approx 0,003 \text{ с}$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{\pi - 2}{2} \frac{D_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi - 2}{2} \frac{109 \cdot 10^{-3}}{9,81}} \approx 0,500 \text{ с}; \quad \Delta T_3 = \frac{1}{2} T_3 \frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{1}{2} \cdot 0,500 \cdot \frac{1}{109} \approx 0,003 \text{ с}$$

Для повышения точности измерения и оценки случайных погрешностей проведем несколько (у нас 5) измерений времен 15 колебаний. Предварительный эксперимент показывает, что большее число колебаний измерить сложно из-за их затухания. Результаты измерений и их обработки приведены в Таблице 1. Случайная погрешность измерения времени рассчитывалась по формуле<sup>4</sup>

$$\Delta t = 3 \sqrt{\frac{\sum_i (t_i - \langle t \rangle)^2}{N(N-1)}} \quad (1)$$

где  $N$  - число измерений.

Погрешность измерения периода равна  $\Delta T = \frac{\Delta t}{n}$ , где  $n = 15$  - число колебаний в одном измерении.

**Таблица 1. Результаты измерений и их обработки.**

	Колебания 1	Колебания 2	Колебания 3
Время 15 колебаний	8,83	10,24	7,72
	8,94	10,25	7,74
	8,91	10,20	7,67
	8,85	10,28	7,72
	8,96	10,28	7,75
Среднее время 15 колебаний	8,883	10,243	7,713
<b>Среднее значение периода</b>	<b>0,593</b>	<b>0,683</b>	<b>0,515</b>
Погрешность измерения времени	0,076	0,044	0,041
<b>Погрешность измерения периода</b>	<b>0,0050</b>	<b>0,0030</b>	<b>0,0028</b>

Для наглядного сравнения результатов расчетов и измерений сведем их в одну таблицу 2.

<sup>4</sup> Не следует строго следовать приведенному расчету погрешностей. Допустим и упрощенный вариант, по среднему модулю отклонения.

**Таблица 2. Результаты расчетов и измерений.**

	Колебания 1	Колебания 2	Колебания 3
Расчет	$(0,583 \pm 0,03)c$	$(0,662 \pm 0,03)c$	$(0,500 \pm 0,03)c$
Измерения	$(0,593 \pm 0,05)c$	$(0,683 \pm 0,03)c$	$(0,515 \pm 0,03)c$

Как видно из Таблицы 2 наблюдается неплохое соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями. Небольшие расхождения в случае колебаний 1 и 3 типов, скорее всего, обусловлены неучтенной в расчетах толщиной полукольца.

Это предположение подтверждает заметное расхождение (явно выходящее за пределы погрешности) для колебаний 2 типа. В этом случае можно уточнить теоретическую формулу. В формулах для периода колебаний (ссылаемся на решение задачи теоретического тура) в знаменателе стоит величина равная расстоянию от оси вращения до центра масс, поэтому формула (2) из условия задачи может быть уточнена:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{D_1}{g} \cdot \frac{D_1}{D_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{109 \cdot 10^{-3}}{9,81} \cdot \frac{109}{101}} \approx 0,688 c. \quad (2)$$

При таком уточнении мы получаем лучшее соответствие с экспериментальными данными.

1.4 Рассчитаем отношения периодов колебаний. Погрешность измерения отношения периодов рассчитывается по формуле<sup>5</sup>

$$\Delta \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{T_1}{T_2} \sqrt{\left( \frac{\Delta T_1}{T_1} \right)^2 + \left( \frac{\Delta T_2}{T_2} \right)^2} \quad (3)$$

Теоретическое отношение периодов может быть рассчитано «без погрешностей». Результаты расчетов также представим в Таблице 3.

**Таблица 3. Отношение периодов.**

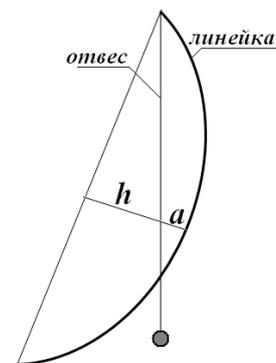
	$\frac{T_1}{T_2}$	$\frac{T_1}{T_3}$	$\frac{T_2}{T_3}$
Теоретическое	$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = 0,8862$	$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi-2)}} = 1,173$	$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2}{(\pi-2)}} = 1,324$
Экспериментальное	$0,868 \pm 0,011$	$1,151 \pm 0,011$	$1,326 \pm 0,010$

Со всеми ранее сделанными оговорками можно говорить о соответствии результатов расчетов и измерений.

<sup>5</sup> Допустим и упрощенный метод расчета  $\Delta \left( \frac{T_1}{T_2} \right) = \frac{T_1}{T_2} \left( \left| \frac{\Delta T_1}{T_1} \right| + \left| \frac{\Delta T_2}{T_2} \right| \right)$

## Часть 2.

**2.1 – 2.2** Для измерения положения центра масс можно подвесить линейку (со скотчем) за один из ее концов и рядом отвес. На самой линейке засечь точку пересечения  $x$ . После этого на листе бумаги зарисовать линейку, провести линию отвеса (через конец линейки и точку пересечения отвесом) и ось симметрии изогнутой линейки. Точка пересечения этих прямых и будет центром масс. Затем необходимо измерить требуемые геометрические величины  $a$ ,  $h$ .



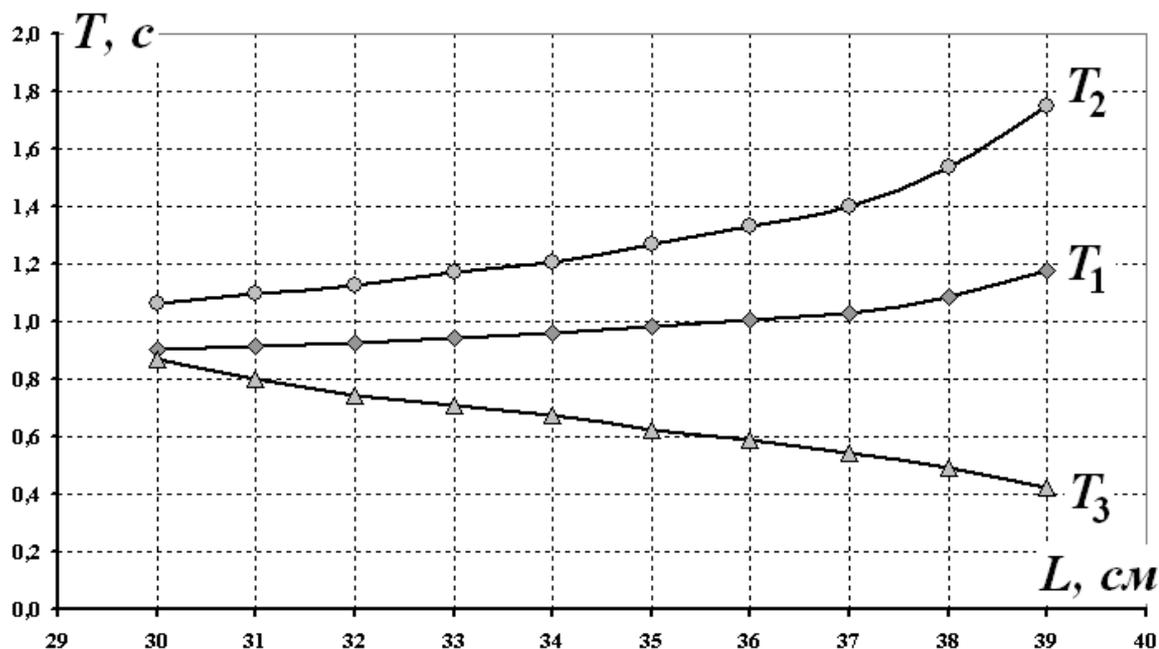
Периоды всех типов колебаний измеряются стандартно.

Результаты измерений (среднее значения периодов рассчитаны по 3 измерениям) представлены в Таблице 4 и на Графике 1.

**Таблица 4. Зависимости периодов колебаний от изгиба линейки.**

$L, \text{ см}$	$a, \text{ см}$	$h, \text{ см}$	$\langle T_2 \rangle, \text{ с}$	$\langle T_1 \rangle, \text{ с}$	$\langle T_3 \rangle, \text{ с}$	$(b^2)_1, \text{ см}^2$	$(b^2)_2, \text{ см}^2$
39	3,6	1,5	1,747	1,176	0,425	<b>111,5</b>	<b>108,6</b>
38	4,7	2,1	1,536	1,087	0,493	<b>116,7</b>	<b>116,8</b>
37	5,0	2,7	1,402	1,031	0,540	<b>107,9</b>	<b>123,1</b>
36	5,7	2,9	1,333	1,008	0,587	<b>112,2</b>	<b>118,5</b>
35	6,3	3,2	1,270	0,984	0,624	<b>112,8</b>	<b>117,1</b>
34	6,7	3,4	1,208	0,961	0,676	<b>109,8</b>	<b>111,1</b>
33	6,7	4,0	1,171	0,946	0,706	<b>104,9</b>	<b>119,9</b>
32	7,0	4,3	1,124	0,928	0,745	<b>101,7</b>	<b>116,3</b>
31	7,5	4,4	1,097	0,912	0,802	<b>99,5</b>	<b>111,9</b>
30	7,5	4,8	1,065	0,904	0,871	<b>97,0</b>	<b>112,2</b>

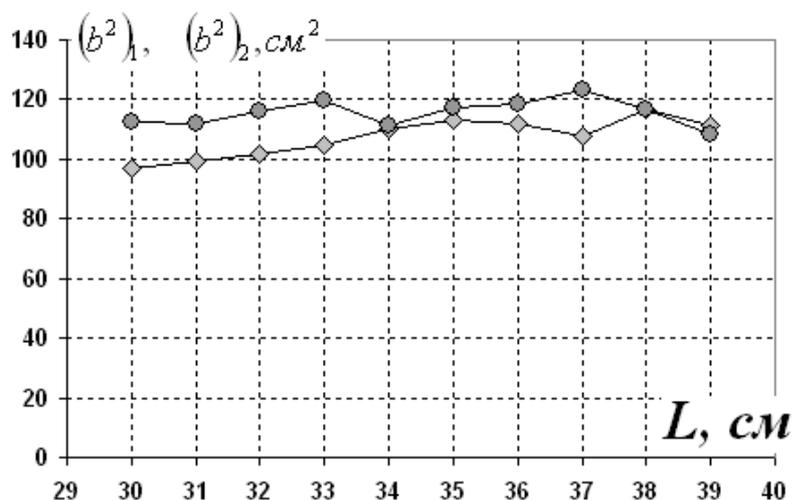
**График 1. Зависимости периодов колебаний от изгиба линейки.**



2.3 Для проверки согласования формул (4) – (5) выразим из них значения параметра  $b^2$  :

$$\begin{aligned} (b^2)_1 &= \frac{gh}{4\pi^2} T_1^2 - h^2 \\ (b^2)_2 &= \frac{ga}{4\pi^2} T_1^2 - a^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Результаты расчетов этих параметров для различных значений изгибов линейки представлены в последних столбцах Таблицы 4 и на Графике 2.



**График 2.** Зависимости параметров  $(b^2)_1, (b^2)_2$  от изгиба линейки.

Погрешность измерения периода составляет величину порядка 2% , погрешность измерения положения центра масс - порядка 10%, поэтому погрешность определения данных параметров составляет не менее 10%. Следовательно, можно говорить о том, что рассчитанные значения данных параметров соответствуют друг другу в пределах погрешности измерений.

Если считать параметр  $b^2$  постоянным, то его значение следует взять равным среднему арифметическому из всех рассчитанных значений с погрешностью равной примерно 10%.

Расчет этой величины приводит к значениям

$$\begin{aligned} \langle b^2 \rangle &= (110 \pm 10) \text{см}^2 \\ \langle b \rangle &= (10,5 \pm 0,5) \text{см} \end{aligned}$$

Таким образом, можно считать, что значения параметра  $b^2$  могут лежать в интервале  $[100, 120] \text{см}^2$  и при этом в пределах погрешности его можно считать постоянным<sup>6</sup>.

Линеаризация зависимостей может быть проведена различными способами. С нашей точки зрения наиболее эстетично выглядит «симметричная»:

$$\begin{aligned} T_1^2 &= \frac{4\pi^2 b}{g} \left( \frac{b}{h} + \frac{h}{b} \right) \\ T_2^2 &= \frac{4\pi^2 a}{g} \left( \frac{a}{h} + \frac{h}{a} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

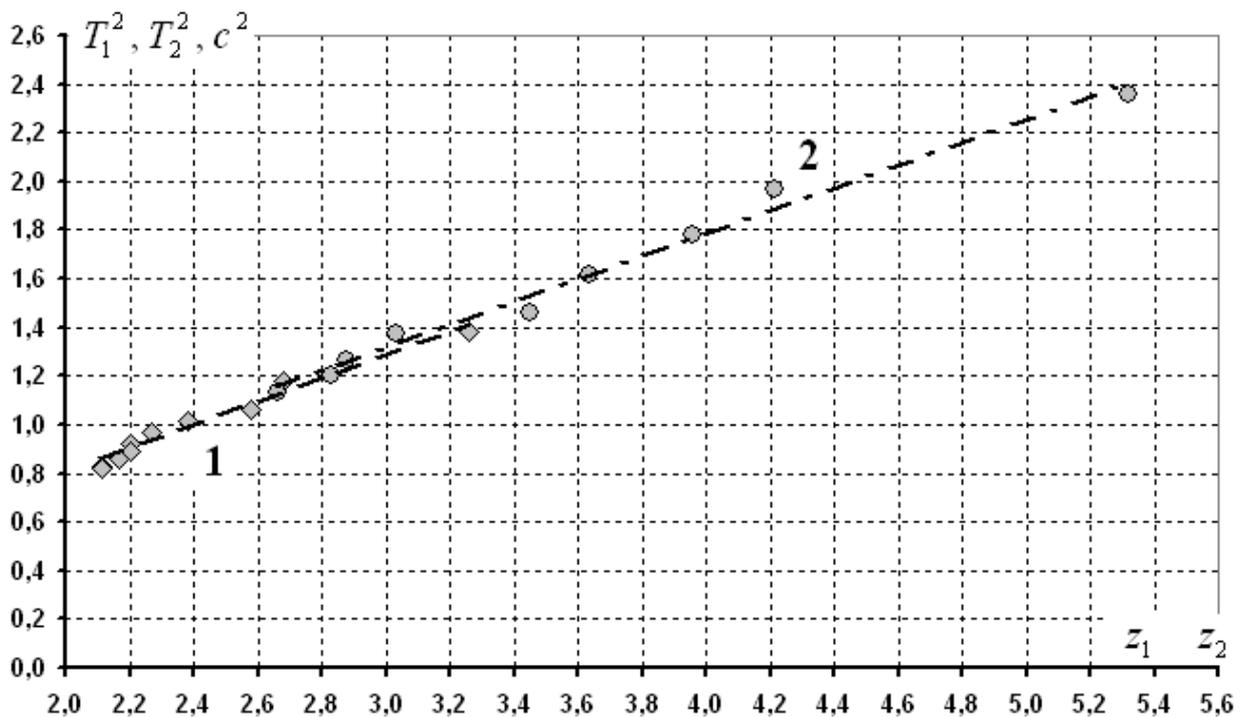
<sup>6</sup> В качестве допустимого разброса значений этого параметра также можно взять стандартное отклонение, рассчитанное по всем значениям данного параметра. По приведенным данным оно равно  $\sigma_b \approx 6 \text{см}$ , что примерно совпадает с полученной выше оценкой разброса.

**Таблица 5. Линеаризация зависимостей периодов от деформации.**

$z_1 = \left(\frac{b}{h} + \frac{h}{b}\right)$	$T_1^2, c^2$		$z_2 = \left(\frac{a}{h} + \frac{h}{a}\right)$	$T_2^2, c^2$
3,260	1,383		7,379	3,053
2,682	1,182		5,317	2,360
2,576	1,063		4,215	1,965
2,385	1,015		3,956	1,777
2,267	0,968		3,633	1,613
2,205	0,924		3,453	1,460
2,205	0,894		3,034	1,372
2,167	0,861		2,875	1,264
2,114	0,831		2,828	1,203
2,114	0,817		2,663	1,135

Построим графики зависимостей квадратов периодов  $T_1^2, T_2^2$  от соответствующего аргумента  $z_1, z_2$  (График 3)

**График 3. Линеаризация зависимостей.**



Из графиков линеаризованных зависимостей хорошо видно, полученные зависимости, во-первых, линейны; во-вторых, описываются одной функцией (в пределах погрешности):

$$T^2 = a z + c,$$

где

для первого типа колебаний

$$a = (0,49 \pm 0,06)c^2; \quad b = (-0,17 \pm 0,14)c^2$$

для второго типа колебаний

$$a = (0,47 \pm 0,03)c^2; \quad b = (-0,09 \pm 0,12)c^2$$

Таким образом, можно считать, что в пределах погрешностей измерений приведенные формулы правильно описывают экспериментальные данные по зависимостям периодов колебаний первого и второго типа от деформации линейки.

2.6 Из формул (4), (6) следует, что отношение квадратов периодов соответствующих колебаний равно

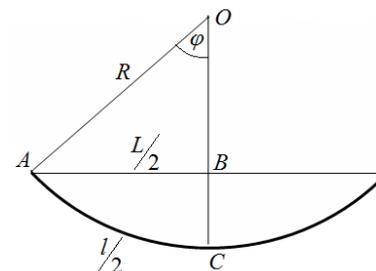
$$\frac{T_1^2}{T_3^2} = \frac{R-a}{h}, \quad (6)$$

что позволяет рассчитать радиус кривизны изгиба линейки по формуле

$$R = a + h \frac{T_1^2}{T_3^2}. \quad (7)$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 6.

Получим уравнение для расчета радиуса кривизны по измерению расстояния между концами линейки. Из рисунка следует, что угол дуги линейки (в предположении, что это дуга окружности) может быть представлен в виде:



из длины дуги  $AC$ :  $\varphi = \frac{l}{2R}$ ; (где  $l = 41,7\text{ см}$  - длина линейки);

из треугольника  $OAB$ :  $\sin \varphi = \frac{L}{2R}$ ,

Разделив эти уравнения друг на друга, получим уравнение для определения угла  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{l}{L} \sin \varphi.$$

Решить это уравнение можно численно (причем это решение требует достаточно громоздких расчетов). Найдя угол  $\varphi$ , можно рассчитать искомое значение радиуса

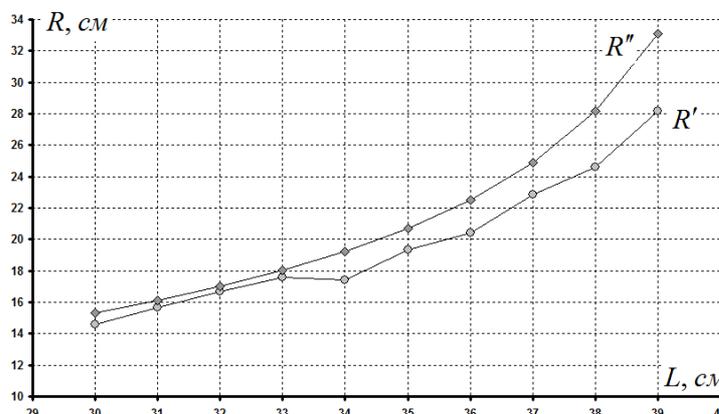
кривизны  $R = \frac{l}{2\varphi}$ .

В Таблице 6 и на графике 4 показаны результаты расчетов радиуса кривизны по измеренным периодам колебаний ( $R'$ ) и по измерению расстояния между концами изогнутой линейки ( $R''$ )

Таблица 6.

График 4. Зависимость радиуса кривизны линейки от величины изгиба.

$L, \text{ см}$	$R', \text{ см}$	$R'', \text{ см}$
39	28,15	33,1
38	24,58	28,2
37	22,83	24,9
36	20,40	22,5
35	19,35	20,7
34	17,40	19,2
33	17,57	18,0
32	16,68	17,0
31	15,64	16,1
30	14,60	15,3



Г

Полученные результаты свидетельствуют, что данные, полученные двумя способами близки друг к другу, причем результаты ближе друг другу при больших изгибах (т.е. при меньших  $L$ ). В нашем случае изогнутую линейку можно считать дугой окружности при  $L < 34\text{ см}$ .

Радиус кривизны можно также приближенно найти геометрическими построениями. Для этого к профилю линейки необходимо построить две касательных в точках  $C$  и  $C'$  (близкие к середине линейки) -  $AB$  и  $A'B'$ , восстановить к ним перпендикуляры. Точка их пересечения будет являться центром кривизны. Такие построения для  $L = 35\text{см}$  дали результат  $R \approx 20\text{см}$ , что хорошо согласуется с рассчитанными данными.

