



***Республиканская
физическая
олимпиада (III этап)
2008 год***

***Решения задач
теоретического
тура.***

10 класс 12-летней школы.

Задача 1. Плавкий предохранитель.

Необходимо определить какая из проволок быстрее достигнет температуры плавления. При последовательном соединении сила тока через все проволоки одинакова. Время, необходимое для достижения температуры плавления, рассчитывается с помощью цепочки очевидных формул:

$$\tau = \frac{cmt_{нл.}}{I^2 R} = \frac{c\gamma St_{нл.}}{I^2 \rho \frac{l}{S}} = \frac{S^2}{I^2 l} \frac{c\gamma t_{нл.}}{\rho}. \quad (1)$$

Первый множитель одинаков для всех проволок, поэтому время до начала плавления меньше у той из проволок, для которой второй множитель меньше. Расчет этого значения для всех проволок дает

$$\left(\frac{c\gamma t_{нл.}}{\rho}\right)_{Al} = 5,60 \cdot 10^{16}; \quad \left(\frac{c\gamma t_{нл.}}{\rho}\right)_{Cu} = 2,15 \cdot 10^{17}; \quad \left(\frac{c\gamma t_{нл.}}{\rho}\right)_{Fe} = 5,62 \cdot 10^{16};$$

Следовательно, первой перегорит алюминиевая проволока.

При параллельном соединении постоянно напряжение, поэтому в этом случае время до начала плавления рассчитывается по формулам

$$\tau = \frac{cmt_{нл.} R}{U^2} = \frac{c\gamma St_{нл.} \rho \frac{l}{S}}{U^2} = \frac{l^2}{U^2} c\gamma t_{нл.} \rho. \quad (2)$$

Расчет вариативного параметра в этом случае дает

$$(c\gamma t_{нл.} \rho)_{Al} = 43,9; \quad (c\gamma t_{нл.} \rho)_{Cu} = 62,3; \quad (c\gamma t_{нл.} \rho)_{Fe} = 540;$$

В этом случае также быстрее перегорит алюминиевая проволока.

Задача 2. «Баскетбол»

1. Закон движения мячика имеет вид

$$\begin{aligned} x &= V_x t \\ y &= V_y t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \quad (1)$$

2. Чтобы мячик попал в корзину, необходимо, чтобы находясь на высоте $h = h_2 - h_1$, его координата x лежала в диапазонах

а) прямым броском - $[l - 2r, l]$;

б) отразившись от стены - $[l, l + 2r]$.

Из закона движения определяем координату x , когда $y = h$.

$$V_y t - \frac{gt^2}{2} = h \Rightarrow t = \frac{V_y + \sqrt{V_y^2 - 2gh}}{g} \quad (2)$$

Выбранный знак соответствует спадающей ветви траектории.

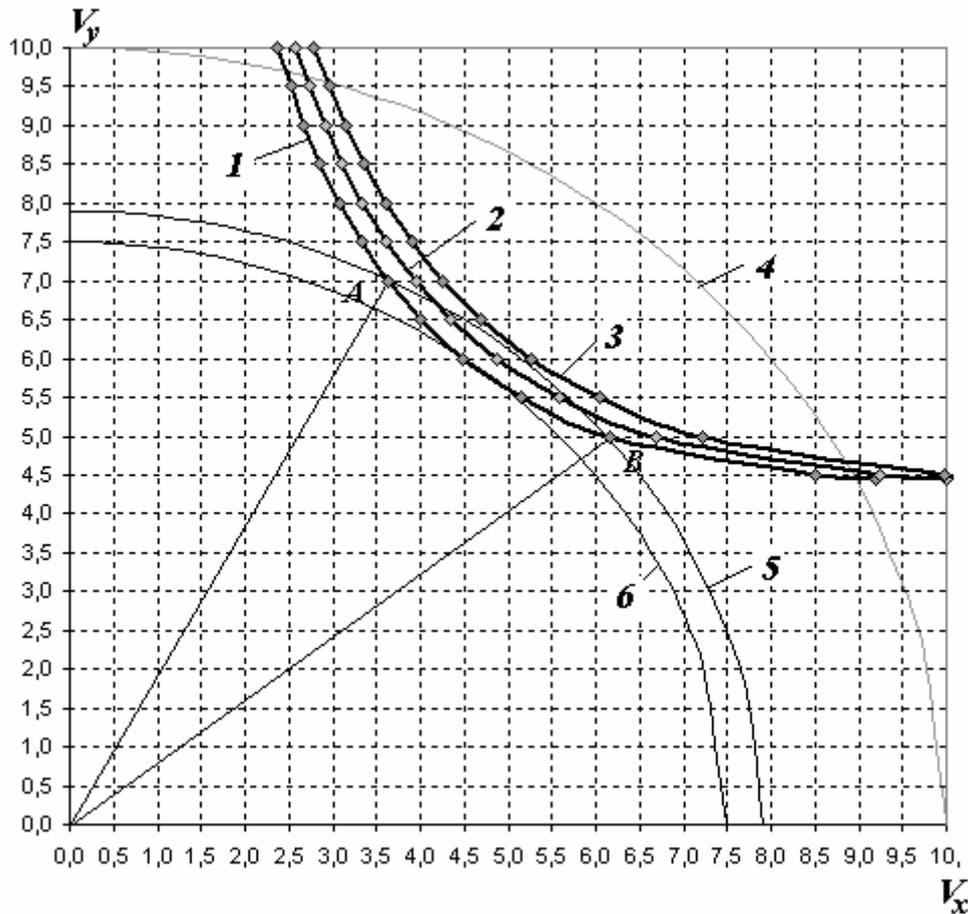
Для того, в этот момент координата x равна

$$x = V_x t = V_x \frac{V_y + \sqrt{V_y^2 - 2gh}}{g}. \quad (3)$$

Отсюда определяем требуемое значение горизонтальной проекции скорости

$$V_x = \frac{gx}{V_y + \sqrt{V_y^2 - 2gh}}, \quad (4)$$

Подставляя границы диапазонов x можем рассчитать границы диапазонов нужной проекции скорости. Вычисления легко провести с помощью калькулятора. Полученные диапазоны наносятся на диаграмму.



1- мячик попадает передний край дужки; 2- мячик попадает в точку крепления; 3 – мячик попадает в дужку, отразившись от стенки.

Проводя дугу окружности, так чтобы она касалась кривой 1, получим минимальную скорость $V_{\min} \approx 7,5 \frac{M}{c}$.

Проводя дугу, так чтобы она касалась кривой 3, получаем значение скорости, при котором диапазон углов попадания максимален $V_{\text{opt}} \approx 7,9 \frac{M}{c}$. Диапазон углов также определяем по графику (в пределах дуги AB) По графику определяем значения предельных углов: $39^\circ \div 62^\circ$.

Задача 3. «Сейсморазведка»

1. Поскольку по условию толщины слоев намного больше, чем расстояние от места взрыва до приемника, то углы падения звуковых волн на границу раздела слоев можно считать малыми.

Рассмотрим возможные пути распространения звука от места взрыва до приемника (см. рисунок):

0) Без отражений (вблизи земной поверхности). Время, за которое звук дойдет до приемника, равно

$$t_0 = \frac{2l}{v_1}. \quad (1)$$

1) Отражение от первой границы. Угол падения на границу φ_1 равен углу отражения.

Путь, пройденный звуком, равен

$$s_1 = 2 \frac{h_1}{\cos \varphi_1} \approx 2 \frac{h_1}{1 - \frac{\varphi_1^2}{2}} \approx 2h_1(1 + \frac{\varphi_1^2}{2}), \quad (2)$$

при этом сам угол падения

$$\varphi_1 \approx \text{tg} \varphi_1 = \frac{l}{h_1}, \quad (3)$$

откуда время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$t_1 = \frac{2h_1}{v_1} (1 + \frac{\varphi_1^2}{2}) \approx \frac{2h_1}{v_1} (1 + \frac{l^2}{h_1^2}) = \frac{2h_1}{v_1} + \frac{1}{h_1 v_1} l^2. \quad (4)$$

2) Отражение от второй границы. Угол падения φ_1^* связан с углом преломления φ_2^* законом преломления

$$\frac{\sin \varphi_1^*}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2^*}{v_2}, \quad (5)$$

который ввиду малости углов можно записать, как

$$\frac{\varphi_1^*}{v_1} = \frac{\varphi_2^*}{v_2}, \quad (6)$$

откуда

$$\varphi_2^* = \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^*. \quad (7)$$

Кроме того, горизонтальное смещение звукового луча до точки отражения равно l

$$l = h_1 \text{tg} \varphi_1^* + h_2 \text{tg} \varphi_2^* \approx h_1 \varphi_1^* + h_2 \varphi_2^*. \quad (8)$$

Из (7) и (8) находим значения углов

$$l = h_1 \varphi_1^* + h_2 \varphi_2^* = h_1 \varphi_1^* + h_2 \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^* = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2}{v_1} \varphi_1^*, \quad (9)$$

$$\varphi_1^* = \frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2} l, \quad (10)$$

$$\varphi_2^* = \frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2} l. \quad (11)$$

Пусть луч прошел расстояние s_1^* в первой среде и s_2^* во второй. Эти расстояния можно выразить через толщины слоев h_1 и h_2 и углы φ_1^* и φ_2^* :

$$s_1^* = \frac{h_1}{\cos \varphi_1^*} \approx h_1 (1 + \frac{\varphi_1^{*2}}{2}), \quad (12)$$

$$s_2^* = \frac{h_2}{\cos \varphi_2^*} \approx h_2 \left(1 - \frac{\varphi_2^{*2}}{2}\right). \quad (13)$$

Время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{s_1^*}{v_1} + \frac{s_2^*}{v_2} = 2 \frac{h_1}{v_1} \left(1 + \frac{\varphi_1^{*2}}{2}\right) + 2 \frac{h_2}{v_2} \left(1 + \frac{\varphi_2^{*2}}{2}\right) = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{h_1}{v_1} \varphi_1^{*2} + \frac{h_2}{v_2} \varphi_2^{*2} = \\ &= 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{h_1}{v_1} \left(\frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2}\right)^2 l^2 + \frac{h_2}{v_2} \left(\frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2}\right)^2 l^2 = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}\right) + \frac{1}{(h_1 v_1 + h_2 v_2)} l^2 \end{aligned} \quad (14)$$

3) Отражение от третьей границы. Угол падения φ_1^\dagger связан с углом преломления φ_2^\dagger и углом преломления φ_3^\dagger законом преломления

$$\frac{\sin \varphi_1^\dagger}{v_1} = \frac{\sin \varphi_2^\dagger}{v_2} = \frac{\sin \varphi_3^\dagger}{v_3}, \quad (15)$$

который ввиду малости углов можно записать, как

$$\frac{\varphi_1^\dagger}{v_1} = \frac{\varphi_2^\dagger}{v_2} = \frac{\varphi_3^\dagger}{v_3}, \quad (16)$$

откуда

$$\varphi_2^\dagger = \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^\dagger, \quad (17)$$

$$\varphi_3^\dagger = \frac{v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger. \quad (18)$$

Кроме того, горизонтальное смещение звукового луча до точки отражения равно l

$$l = h_1 \operatorname{tg} \varphi_1^\dagger + h_2 \operatorname{tg} \varphi_2^\dagger + h_3 \operatorname{tg} \varphi_3^\dagger \approx h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \varphi_2^\dagger + h_3 \varphi_3^\dagger. \quad (19)$$

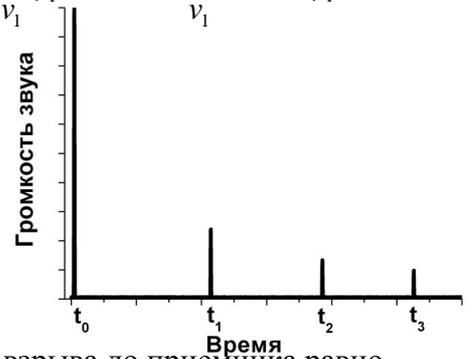
Из (16), (17) и (18) находим значения углов

$$l = h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \varphi_2^\dagger + h_3 \varphi_3^\dagger = h_1 \varphi_1^\dagger + h_2 \frac{v_2}{v_1} \varphi_1^\dagger + h_3 \frac{v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3}{v_1} \varphi_1^\dagger, \quad (20)$$

$$\varphi_1^\dagger = \frac{v_1}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l, \quad (21)$$

$$\varphi_2^\dagger = \frac{v_2}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l, \quad (22)$$

$$\varphi_3^\dagger = \frac{v_3}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3} l. \quad (23)$$



Время распространения звукового сигнала от места взрыва до приемника равно

$$\begin{aligned} t_3 &= \frac{s_1^\dagger}{v_1} + \frac{s_2^\dagger}{v_2} + \frac{s_3^\dagger}{v_3} = 2 \frac{h_1}{v_1} \left(1 + \frac{\varphi_1^{\dagger 2}}{2}\right) + 2 \frac{h_2}{v_2} \left(1 + \frac{\varphi_2^{\dagger 2}}{2}\right) + 2 \frac{h_3}{v_3} \left(1 + \frac{\varphi_3^{\dagger 2}}{2}\right) = \\ &= 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} + \frac{h_3}{v_3}\right) + \frac{1}{(h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3)} l^2. \end{aligned} \quad (24)$$

В моменты времени t_0, t_1, t_2, t_3 к приемнику придут звуковые волны от взрыва и на графике зависимости регистрируемой приемником громкости звука от времени появятся максимумы. Поскольку, звуковая мощность при каждом отражении от границ слоев теряется, то амплитуда второго максимума будет меньше, чем первого и т.д. Примерный график зависимости громкости звука от времени представлен на рисунке.

2. Согласно формуле (4) время прихода сигналов к приемникам линейно зависят от l^2 .

$$t_1 = \frac{2h_1}{v_1} - \frac{1}{h_1 v_1} l^2.$$

Таким образом, график зависимости времени прихода звуковых волн от l^2 будет представлять собой прямую, точка пересечения с вертикальной осью которой даст значение

$$\tau_1 = 2 \frac{h_1}{v_1}, \quad (25)$$

а тангенс угла наклона

$$k_1 = \frac{1}{h_1 v_1}, \quad (26)$$

(те, кто знает метод наименьших квадратов, могут им воспользоваться).

Аналогично для зависимостей моментов времени t_2 и t_3 от l^2 :

$$\tau_2 = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} \right), \quad (27)$$

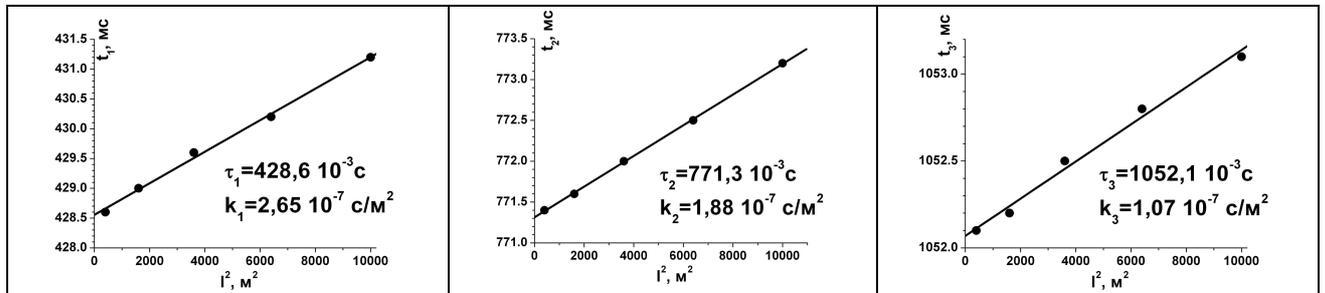
$$k_2 = \frac{1}{h_1 v_1 + h_2 v_2}, \quad (28)$$

$$\tau_3 = 2 \left(\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} + \frac{h_3}{v_3} \right), \quad (29)$$

$$k_3 = \frac{1}{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3}. \quad (30)$$

Значения времен прихода сигналов в зависимости от l^2 приведены в таблице и на графиках. Момент времени прихода сигнала находится по максимуму громкости.

$l, \text{ м}$	$l^2, \text{ м}^2$	$t_1, \text{ мс}$	$t_2, \text{ мс}$	$t_3, \text{ мс}$
20	400	428,6	771,4	1052,1
40	1600	429,0	771,6	1052,2
60	3600	429,6	772,0	1052,5
80	6400	430,2	772,5	1052,8
100	10000	431,2	773,2	1053,1



Значения параметров (31)

$$\tau_1 = 428,6 \cdot 10^{-3} \text{ c}, \quad \tau_2 = 771,3 \cdot 10^{-3} \text{ c}, \quad \tau_3 = 1052,1 \cdot 10^{-3} \text{ c}.$$

$$k_1 = 2,65 \cdot 10^{-7} \text{ c/m}^2, \quad k_2 = 1,88 \cdot 10^{-7} \text{ c/m}^2, \quad k_3 = 1,07 \cdot 10^{-7} \text{ c/m}^2.$$

Значения толщин слоев и скоростей звука находятся из системы уравнений (25)-(30):

$$\frac{h_1}{v_1} = \frac{\tau_1}{2}, \quad (32)$$

$$\frac{h_2}{v_2} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}, \quad (33)$$

$$\frac{h_3}{v_3} = \frac{\tau_3 - \tau_2}{2}, \quad (34)$$

$$h_1 v_1 = \frac{1}{k_1}, \quad (35)$$

$$h_2 v_2 = \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}, \quad (36)$$

$$h_3 v_3 = \frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2}. \quad (37)$$

Из (32)-(37) получаем

$$h_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{2k_1}} \approx 0,90 \text{ км}, \quad (38)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\tau_1 k_1}} \approx 4,2 \text{ км/с}, \quad (39)$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} \approx 0,51 \text{ км}, \quad (40)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\tau_2 - \tau_1} \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} \approx 3,0 \text{ км/с}, \quad (41)$$

$$h_3 = \sqrt{\frac{\tau_3 - \tau_2}{2} \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2} \right)} \approx 0,75 \text{ км}, \quad (42)$$

$$v_3 = \sqrt{\frac{2}{\tau_3 - \tau_2} \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2} \right)} \approx 5,4 \text{ км/с}. \quad (43)$$

Толщины слоев и скорости звука в них определены неточно – случайные факторы вносят погрешность и на графиках громкости, регистрируемой приемником, присутствует шум. Вероятнее всего, земные породы расположены так: 1 – песок, 2 – глина, 3 – железная руда.

10 класс 11-летней школы.

Задача 1. «Ошибочная разминка»

1.1. «Из пушки по...»

Уравнения движения тела, брошенного с начальной скоростью v под углом к горизонту α :

$$x = v \cos \alpha \cdot t, \quad (1)$$

$$y = v \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Дальность полета s можно определить, как горизонтальное расстояние, которое пролетел снаряд до момента падения

$$t^* = \frac{2v \sin \alpha}{g}, \quad (3)$$

$$s = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (4)$$

Если скорость вылета снаряда испытывает малые флуктуации $v = v_0 \pm \Delta v_0$, то и дальность полета будет испытывать малые флуктуации

$$s \pm \Delta s = \frac{(v_0 \pm \Delta v_0)^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{v_0^2 \pm 2v_0 \Delta v_0 + \Delta v_0^2}{g} \sin 2\alpha \approx \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \pm \frac{2v_0 \Delta v_0}{g} \sin 2\alpha, \quad (5)$$

откуда

$$\Delta s = \frac{2v_0 \Delta v_0}{g} \sin 2\alpha. \quad (6)$$

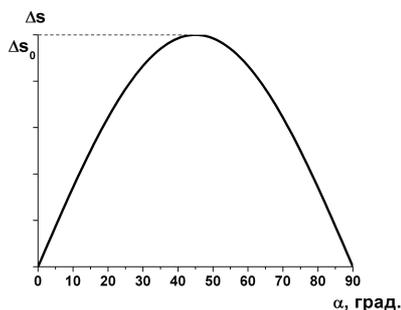
При стрельбе под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ неточность стрельбы максимальна и равна

$$\Delta s_0 = \frac{2v_0 \Delta v_0}{g}. \quad (7)$$

Отсюда

$$\Delta s = \Delta s_0 \sin 2\alpha. \quad (8)$$

Примерный график зависимости $\Delta s(\alpha)$ изображен на рисунке.



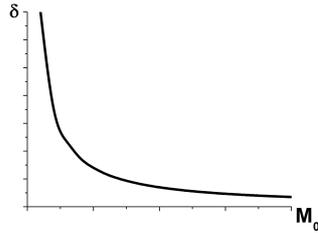
1.2. «Пружинные весы»

Очевидно, что показания весов оказались завышенными из-за того, что сама пружина имеет массу, а градуировка по закону Гука производилась при горизонтальном положении пружины. Это значит, что даже без груза весы будут показывать вес ΔP_0 - это и есть их абсолютная погрешность.

Относительная погрешность пружинных весов равна

$$\delta = \frac{\Delta P_0}{M_0 g}. \quad (9)$$

Примерный график зависимости $\delta(M_0)$ - гипербола - представлен на



рисунке.

1.3. «Гальванометр»

Показания вольтметра будут пропорциональны силе тока, протекающего по нему. При подключении к его клеммам напряжения U сила тока в нем будет равна

$$I_0 \pm \Delta I_0 = \frac{U}{R_V + R \mp \Delta R} = \frac{U}{(R_V + R)(1 \mp \frac{\Delta R}{R_V + R})} \approx \frac{U}{(R_V + R)} (1 \pm \frac{\Delta R}{R_V + R}), \quad (10)$$

$$I_0 = \frac{U}{(R_V + R)}, \quad (11)$$

$$\Delta I_0 = \frac{U \Delta R}{(R_V + R)^2}. \quad (12)$$

Максимальное напряжение, которое можно измерить таким вольтметром, равно

$$U_{\max} = (R_V + R)I_{\max}, \quad (13)$$

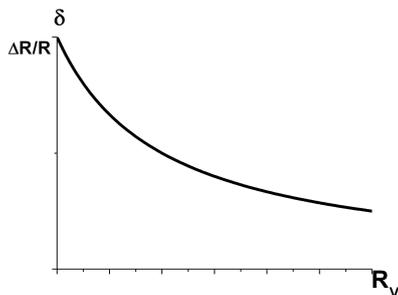
поэтому максимальная погрешность прибора

$$\Delta U_{\max} = (R_V + R)\Delta I_0 = \frac{U_{\max} \Delta R}{(R_V + R)} = I_{\max} \Delta R. \quad (14)$$

Относительная погрешность вольтметра равна

$$\delta_U = \frac{\Delta U}{U_{\max}} = \frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{\Delta R}{R_V + R}. \quad (15)$$

Примерный график зависимости относительной погрешности напряжения, измеренного вольтметром, от сопротивления R_V изображен на рисунке.



Поскольку для создания из гальванометра амперметра резистор R_A подключается к нему параллельно, сила тока I_0 , втекающая в прибор, будет перераспределяться между гальванометром I_G и подключенным к нему резистором I_R по правилам для параллельно соединенных проводников:

$$I_0 = I_G + I_R, \quad (16)$$

$$I_G R_G = I_R R_A. \quad (17)$$

Сила тока, текущего через гальванометр из (16) и (17) равна

$$I_G = I_0 \frac{R_A}{R_A + R_G}. \quad (18)$$

Поскольку сопротивление гальванометра имеет погрешность $R_G = R \mp \Delta R$, то и сила тока, измеряемая им, будет определена с погрешностью

$$I_G \pm \Delta I_G = I_0 \frac{R_A}{R_A + R \mp \Delta R} = I_0 \frac{R_A}{R_A + R(1 \mp \frac{\Delta R}{R+R_A})} = I_0 \frac{R_A}{R_A + R} \pm I_0 \frac{R_A \Delta R}{(R_A + R)^2}. \quad (19)$$

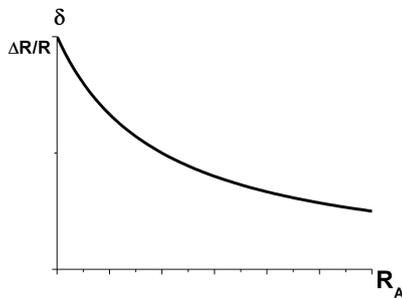
Погрешность измерения будет максимальна при пропускании через гальванометр максимального тока $I_{\max} = I_{0\max} \frac{R_A}{R_A + R}$ и равна

$$\Delta I_{G\max} = I_{0\max} \frac{R_A \Delta R}{(R_A + R)^2} = I_{\max} \frac{\Delta R}{R_A + R}. \quad (20)$$

Относительная погрешность измерений будет равна

$$\delta_I = \frac{\Delta I_G}{I_G} = \frac{\Delta R}{R + R_A}. \quad (21)$$

Примерный график зависимости относительной погрешности силы тока, измеренной амперметром, от сопротивления R_A изображен на рисунке.



1.4. «Термометр»

Уравнение теплового баланса

$$mcT + C_0 T_0 = (mc + C_0) \Theta, \quad (22)$$

где Θ — установившаяся в равновесии температура.

$$\Theta = \frac{mcT + C_0 T_0}{mc + C_0}. \quad (23)$$

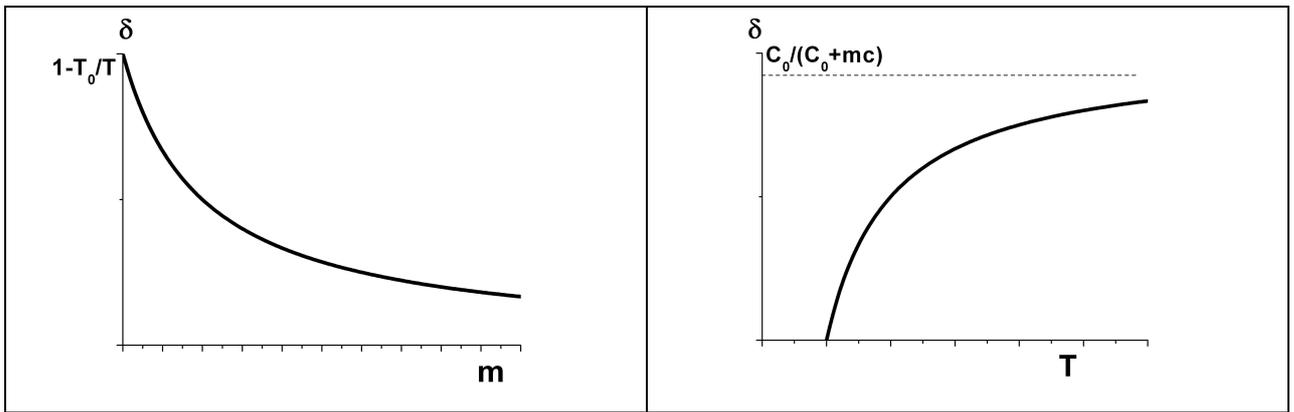
Погрешность измерения будет характеризоваться разностью между температурой воды до измерения и установившейся в тепловом равновесии температурой

$$\Delta T = T - \Theta = T - \frac{mcT + C_0 T_0}{mc + C_0} = \frac{C_0(T - T_0)}{mc + C_0}. \quad (24)$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta T}{T} = \frac{C_0}{C_0 + mc} \left(1 - \frac{T_0}{T} \right). \quad (25)$$

Примерные графики зависимости относительной погрешности δ от измеряемой температуры воды T и от массы воды в калориметре m изображены на рисунках.



1.5. «Лазерный зайчик»

Координата лазерного зайчика равна

$$x = L \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (26)$$

Поскольку угол испытывает флуктуации $\varphi \pm \Delta\varphi$, то зайчик смещается по стене.

В случае, когда лазерный луч перпендикулярен стенке

$$\pm \Delta x_0 = L \cdot \operatorname{tg}(0 \pm \Delta\varphi) \approx \pm L \Delta\varphi, \quad (27)$$

откуда можно определить флуктуации угла

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x_0}{L}. \quad (28)$$

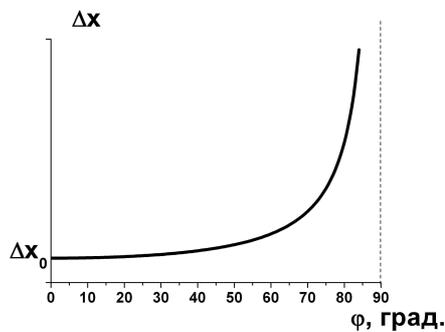
В случае, когда лазерный луч идет под углом φ , координата равна

$$x \pm \Delta x = L \cdot \operatorname{tg}(\varphi \pm \Delta\varphi) \approx L \cdot \operatorname{tg} \varphi \pm L \frac{\Delta\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad (29)$$

а флуктуации координаты зайчика

$$\Delta x = \frac{L \Delta\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\Delta x_0}{\cos^2 \varphi}. \quad (30)$$

График зависимости $\Delta x(\varphi)$ изображен на рисунке.

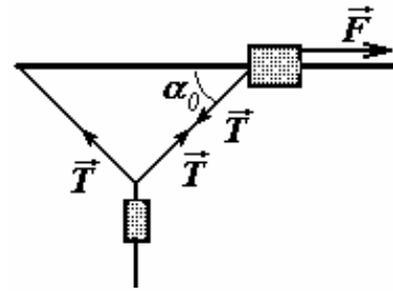


Задача 2. «Муфта»

А) В положении равновесия выполняются уравнения

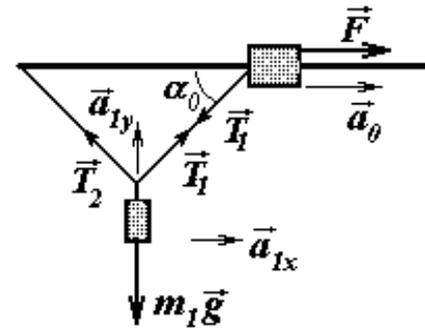
$$\begin{aligned} m_1 g &= 2T \sin \alpha_0 \\ F &= T \cos \alpha_0 \end{aligned}$$

из которых следует $F = \frac{m_1 g \cos \alpha_0}{2 \sin \alpha_0} \approx 10 \text{ Н}$.



Б) В начале движения распределение сил будет таким, как показано на рисунке. Заметим, что груз начнет смещаться как по горизонтали, так и по вертикали. Уравнения второго закона Ньютона для муфты и груза будут иметь вид

$$\begin{aligned} m_0 a_0 &= F - T_1 \cos \alpha_0 \\ m_1 a_{1x} &= (T_1 - T_2) \cos \alpha_0 \\ m_1 a_{1y} &= (T_1 + T_2) \sin \alpha_0 - m_1 g \end{aligned} \quad (1)$$



Легко заметить, что горизонтальная составляющая

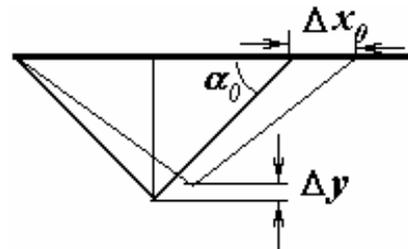
ускорения груза в два раза меньше ускорения муфты $a_{1x} = \frac{a_0}{2}$.

Для поиска связи между ускорением муфты и вертикальной составляющей ускорения

груза рассмотрим малые смещения из положения равновесия муфты $\Delta x_0 = \frac{a_0 \tau^2}{2}$ и груза

$\Delta y = \frac{a_{1y} \tau^2}{2}$ за малый промежуток времени τ . Учитывая неизменность длины нити, запишем на основании теоремы Пифагора

$$\left(\frac{2l \cos \alpha_0 + \frac{a_0 \tau^2}{2}}{2} \right)^2 + \left(l \sin \alpha_0 - \frac{a_{1y} \tau^2}{2} \right)^2 = l^2,$$



где обозначено l - длина половинки нити.

Возводя в квадрат и пренебрегая малыми слагаемыми, пропорциональными τ^4 , получим

искмое соотношение между ускорениями (с учетом $\alpha_0 = 45^\circ$) $a_{1y} = \frac{a_0 \cos \alpha_0}{2 \sin \alpha_0} = \frac{a_0}{2}$. Для

упрощения расчетов сразу подставим $\cos \alpha_0 = \sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ в уравнения (1)

$$\begin{aligned} m_0 a_0 &= F - T_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_1 \frac{a_0}{2} &= (T_1 - T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_1 \frac{a_0}{2} &= (T_1 + T_2) \frac{\sqrt{2}}{2} - m_1 g \end{aligned}$$

Для решения этой системы уравнений проще всего удвоить первое уравнение и сложить его со вторым и третьим, в результате чего получим

$$(2m_0 + m_1)a_0 = 2F - m_1g \Rightarrow a_0 = \frac{2F - m_1g}{2m_0 + m_1} = 20 \frac{M}{c^2}.$$

В) Для определения скорости муфты воспользуемся законом сохранения энергии

$$Fx_0 = \frac{m_0V_0^2}{2} + \frac{m_1V_{1x}^2}{2} + \frac{m_1V_{1y}^2}{2} + m_1gy_1, \quad (2)$$

где $x_0 = L \cos \alpha_1 - L \cos \alpha_0$ - смещение муфты, $y_1 = \frac{L}{2}(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1)$ - высота подъема груза. Горизонтальная составляющая скорости груза в два раза меньше скорости муфты $V_{1x} = \frac{V_0}{2}$. Связь между скоростью муфты и вертикальной составляющей скорости груза можно установить способом, аналогичным поиску соотношения между ускорениями,

$$\left(\frac{2l \cos \alpha_1 + V_0 \tau}{2} \right)^2 + (l \sin \alpha_1 - V_{1y} \tau)^2 = l^2.$$

Из этого уравнения следует $V_{1y} = \frac{V_0 \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha_1}$.

Подставляя полученные соотношения в уравнение (2) получим

$$F \frac{L}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) = \frac{m_0V_0^2}{2} + \frac{m_1V_0^2}{8} + \frac{m_1V_0^2}{8} \left(\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \right)^2 + m_1g \frac{L}{2} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1).$$

Из этого уравнения можно найти скорость муфты

$$V_0 = \sqrt{\frac{FL(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) - m_1gL(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_1)}{m_0 + \frac{m_1}{4 \sin^2 \alpha_1}}} \approx 2,8 \frac{M}{c}.$$

Задача 3. Электростатический генератор.

1. Т.к. толщиной стержня можно пренебречь, то площадь пластин конденсатора равна:

$$S = \frac{\pi R^2}{4} \quad (1).$$

Тогда искомые ёмкости выражаются следующим образом:

$$C_1 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{d} \cdot \frac{\pi R^2}{4} \quad (2),$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0}{d} \cdot \frac{\pi R^2}{4} \quad (3).$$

2. Т.к. конденсатор заряжается очень быстро, то

$$q_1 = C_1 U_1 \quad (4).$$

3. Следует заметить, что при соприкосновении с конденсатором большой ёмкости, между пластинами больше нет диэлектрика, поэтому ёмкость, рассматриваемого конденсатора равна C_2 . При параллельном соединении конденсаторов, заряды распределяются таким образом, что разность потенциалов между их обкладками будет одна и та же. Пусть после соприкосновения на конденсаторе остался заряд q'_1 , а на конденсаторе большой ёмкости заряд Q_1 . Тогда:

$$\frac{q'_1}{C_2} = \frac{Q_1}{C_B} \quad (5),$$

Из закона сохранения электрического заряда следует, что:

$$q_1' + Q_1 = q_1 \quad (6).$$

Решая уравнения (5) и (6), получим:

$$Q_1 = q_1 \frac{C_B}{C_B + C_2} \quad (7).$$

Тогда напряжение на высоковольтном конденсаторе:

$$U_B = \frac{Q_1}{C_B} = \frac{q_1}{C_B + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_B + C_2} \quad (8).$$

4. Преобразуем выражение (7) к виду:

$$Q_1 = q_1 \cdot \frac{1}{1 + \frac{C_2}{C_B}} \approx q_1 \left(1 - \frac{C_2}{C_B} \right) \quad (9).$$

Видим, что при $C_B \gg C_2$ $Q_1 = q_1$.

5. При соприкосновении с источником напряжения разность потенциалов между пластинами очень быстро становится равной U_1 и остаётся постоянной до тех пор, пока пластины соединены с источником, т.е. до момента $T/4$. Затем ёмкость конденсатора начинает линейно уменьшаться, заряд не изменяется, т.е. напряжение возрастает. Напряжение обратно пропорционально ёмкости. Поэтому напряжение будет возрастать по гиперболе до значения:

$$U_2 = U_1 \frac{C_1}{C_2} = U_1 \varepsilon \quad (10).$$

После соприкосновения с конденсатором напряжение практически мгновенно опускается до значения $U_3 = U_B$. Затем разность потенциалов не изменяется вплоть до следующего соприкосновения с источником напряжения.

График зависимости разности потенциалов между пластинами от времени представлен на рисунке 1.

Немного другая ситуация с зарядом. При соприкосновении с источником напряжения, на пластинах практически сразу появляется заряд

$$q_0 = C_2 U_1 \quad (11).$$

Затем, т.к. ёмкость линейно увеличивается, заряд линейно возрастает до значения

$$q_1 = C_1 U_1 = q_0 \varepsilon \quad (12).$$

После отсоединения от источника, в течение следующей четверти периода заряд остаётся постоянным, а затем, после соединения с высоковольтным конденсатором резко уменьшается до значения q_1' (см. пункт 3.) Для определения q_1' воспользуемся результатом пункта 3. Подставляя значение (7) в уравнение (6), получим:

$$q_1' = q_1 \left(1 - \frac{C_B}{C_B + C_2} \right) = q_1 \frac{C_2}{C_B + C_2} \quad (13).$$

График зависимости величины заряда на одной из пластин от времени представлен на рисунке 2.

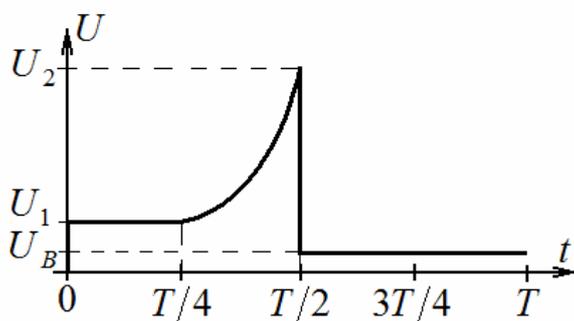


Рис.1

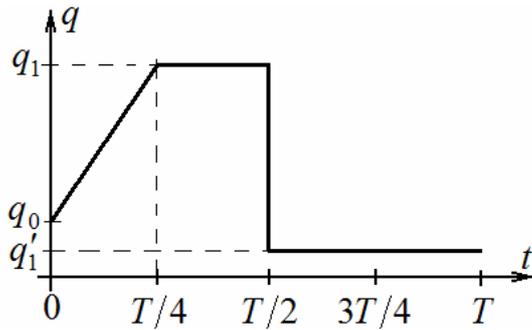


Рис.2

6. Чтобы построить график зависимости мощности двигателя от времени, полезно проследить, как изменяется энергия накопленная в конденсаторе. Сразу после соприкосновения с источником, энергия достигает значения

$$E_0 = \frac{C_2 U_1^2}{2} \quad (14).$$

Эта энергия поступает из источника постоянного напряжения и двигатель в этом процессе не участвует. Затем ёмкость конденсатора начинает линейно возрастать. В конце первой четверти периода, энергия станет равной:

$$E_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \varepsilon E_0 \quad (15).$$

Затем, при неизменном заряде, емкость будет уменьшаться. Энергия конденсатора будет возрастать по гиперболическому закону до значения

$$E_2 = \frac{q_1^2}{2C_2} = \varepsilon^2 E_0 \quad (16).$$

График зависимости энергии от времени приведён на рисунке 3.

7. Т.к. в первой четверти периода энергия возрастает линейно, то мощность, развиваемая двигателем постоянна и равна:

$$P_{1/4} = \frac{E_1 - E_0}{T/4} \quad (17).$$

Во второй четверти энергия возрастает нелинейно. Мощность также нелинейно будет возрастать до некоторого значения P_{\max} , величина которой определяется в следующем пункте.

График зависимости мощности от времени приведён на рисунке 4.

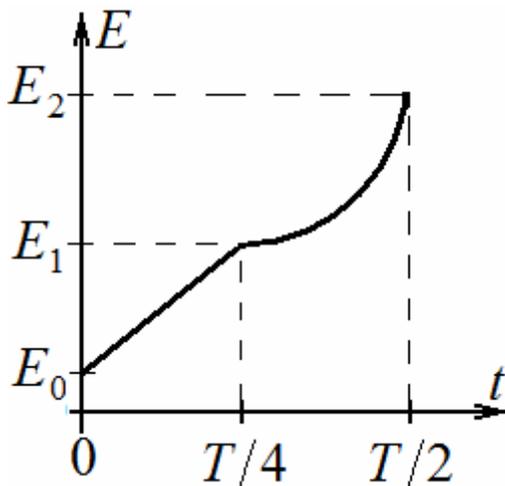


Рис.3

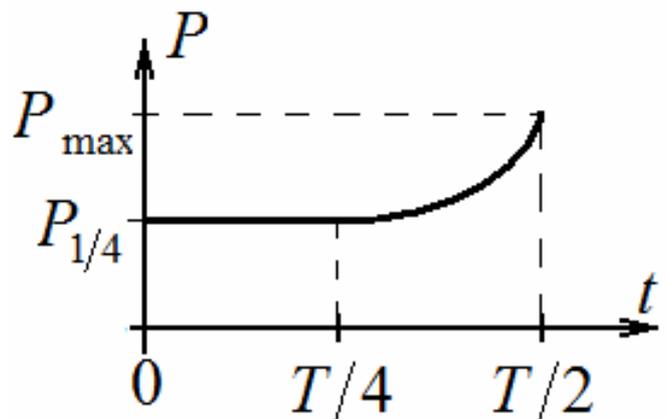


Рис.4

8. Для простоты рассуждений, в этом пункте время начнём отсчитывать с момента, когда конденсатор полностью заполнен диэлектриком, т.е. рассмотрим исключительно вторую четверть полупериода (от $T/4$ до $T/2$). Емкость за это время линейно

уменьшается от значения C_1 до C_2 , т.е. зависимость ёмкости от времени можно представить в виде:

$$C = C_1 - \xi \cdot t \quad (18).$$

Значение постоянной ξ определим позже.

Тогда энергия, накопленная в конденсаторе, выразится следующим образом:

$$E = \frac{q_1^2}{2C} = \frac{q_1^2}{2(C_1 - \xi \cdot t)} \quad (19).$$

Величина заряда q_1 определена уравнением (4) и остаётся постоянной на рассматриваемом временном промежутке.

Мощность равна первой производной энергии (19) по времени:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{q_1^2}{2} \cdot \frac{\xi}{(C_1 - \xi \cdot t)^2} \quad (20).$$

Видим, что мощность постепенно возрастает и максимальное значение принимает в конце рассматриваемого нами промежутка времени ($t = T/4$).

Для определения ξ используем тот факт, что при $t = T/4$, ёмкость становится равной C_2 :

$$C_2 = C_1 - \xi \cdot T/4 \Rightarrow \xi = \frac{4}{T}(C_1 - C_2) \quad (21).$$

Подставляя в уравнение (20) значение ξ и $t = T/4$, получим значение максимальной мощности:

$$P_{\max} = \frac{q_1^2}{2} \cdot \frac{\frac{4}{T}(C_1 - C_2)}{\left(C_1 - \frac{4}{T}(C_1 - C_2) \cdot \frac{T}{4}\right)^2} = \frac{2q_1^2}{T} \frac{C_1 - C_2}{C_2^2} \quad (22).$$

Для определения отношения $P_{\max}/P_{1/4}$, подставим в уравнение для $P_{1/4}$ выражения

$E_0 = \frac{C_2 U_1^2}{2}$ и $E_1 = \varepsilon E_0$, полученные в пункте 6, а в (21) значение заряда $q_1 = C_1 U_1$.

Вспомним также про то, что $C_1 = \varepsilon C_2$. Тогда для искомого отношения получим:

$$\frac{P_{\max}}{P_{1/4}} = \varepsilon^2 \quad (23).$$

9. После первой половины периода, разность потенциалов между пластинами всегда будет равна $U_2 = U_1 \varepsilon$ (формула 10). Поэтому очевидно, что конденсатор C_B можно зарядить до напряжения

$$U_{\max 1} = U_1 \varepsilon \quad (24).$$

10. Легко заметить, что в такой системе при синхронном вращении пластины первого элемента перестают касаться пластин второго элемента в тот момент, когда между последними находится диэлектрик. Т.е. пластины второго элемента в этот момент образуют конденсатор, ёмкость которого в ε раз больше ёмкости конденсатора, образованного пластинами первого элемента. Поэтому, как и в случае с конденсатором большой ёмкости, заряды будут переноситься на пластины второго элемента.

Подробное рассмотрение циклов - непростая задача. Однако для определения $U_{\max N}$ достаточно заметить, что пластины первого конденсатора являются «своеобразным» источником напряжения, аналогичного рассмотренному ранее. Только напряжение на его клеммах в ε раз больше ($U_1 \varepsilon$).

Проводя аналогичные рассуждения для остальных элементов, заключаем, что конденсатор C_B , соединённый с последним элементом, возможно зарядить до напряжения

$$U_{\max N} = \varepsilon^N U_1 \quad (25).$$

11 класс.

Задача 1 . «Системы единиц»

Указанный в условии задачи факт ($1с = 3,00 \cdot 10^8 м$) следует из равенства единицы скорости света:

$$3,00 \cdot 10^8 \frac{м}{с} = 1 \quad (1).$$

Проводя аналогичные рассуждения с постоянной Планка, можно получить выражение для килограмма и, соответственно, для всех остальных производных единиц.

1.1 Выразим Джоуль через основные единицы СИ (килограмм, метр и секунду):

$$Дж = \frac{кг \cdot м^2}{с^2} \quad (2).$$

Тогда постоянная Планка равна:

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \frac{кг \cdot м^2}{с} \quad (3).$$

Подставим значение одной секунды, выраженной через метры и приравняем \hbar к единице.

$$1,05 \cdot 10^{-34} \frac{кг \cdot м^2}{3,00 \cdot 10^8 м} = 1 \quad (4).$$

Решая уравнение (4) относительно килограмма, получим:

$$1кг = 2,86 \cdot 10^{42} м^{-1} \quad (5).$$

1.2 Подставляя выражения для секунды и килограмма в уравнение (2), получим:

$$1Дж = \frac{2,86 \cdot 10^{42} м^{-1} \cdot м^2}{(3,00 \cdot 10^8 м)^2} = 3,17 \cdot 10^{25} м^{-1} \quad (6).$$

1.3 Теперь необходимо двигаться в обратном направлении. Знаем, что

$$1Дж = \frac{1}{1,60 \cdot 10^{-19}} эВ = 6,25 \cdot 10^{18} эВ \quad (7).$$

Выражение для одного метра легко получается из выражений (6) и (7):

$$3,17 \cdot 10^{25} м^{-1} = 6,25 \cdot 10^{18} эВ \Rightarrow 1м = 5,07 \cdot 10^6 эВ^{-1} \quad (8).$$

1.4 Т.к. $1с = 3,00 \cdot 10^8 м$, то, используя (8), получим:

$$1с = 1,52 \cdot 10^{15} эВ^{-1} \quad (9).$$

1.5 Используя (5), получим:

$$1кг = 5,64 \cdot 10^{35} эВ \quad (10).$$

1.6 Запишем второй закон Ньютона:

$$\frac{m_e v^2}{a_0} = F \quad (11).$$

Отсюда сразу же находим кинетическую энергию электрона:

$$E_K = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{F a_0}{2} = 13,5 эВ \quad (12).$$

2.1 Т.к. $1зр = 6,37 \cdot 10^6 м$, то

$$1m = \frac{1}{6,37 \cdot 10^6} zp = 1,57 \cdot 10^{-7} zp \quad (13).$$

2.2 Из равенства первой космической единицы, найдём выражение секунды через метры, а затем и через земные радиусы:

$$1c = 7,91 \cdot 10^3 m = 1,24 \cdot 10^{-3} zp \quad (14).$$

2.3 Из равенства единице гравитационной постоянной, получим:

$$1kz = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{c^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} m^3}{(7,91 \cdot 10^3 m)^2} = 1,07 \cdot 10^{-18} m = 1,67 \cdot 10^{-25} zp \quad (15).$$

Интересно заметить, что в такой системе масса Земли равна земному радиусу, что следует из выражения для первой космической скорости:

$$v_{1K} = \sqrt{G \frac{M}{R}} \quad (16).$$

2.4 Первая космическая скорость вблизи поверхности Луны в такой системе (в формуле (16) $G = 1$):

$$v_{Л} = \sqrt{\frac{M_{Л}}{R_{Л}}} = 0,212 \quad (17).$$

Скорость в этой системе - величина безразмерная.

Ускорение свободного падения, вычисляется по формуле ($G = 1$):

$$g_{Л} = \frac{M_{Л}}{R_{Л}^2} = 0,165 zp^{-1} \quad (18).$$

В то время как на поверхности Земли ускорение свободного падения равно одному обратному земному радиусу, т.е. в 6 раз больше.

Задача 2. «Копёр»

1. Запишем законы сохранения импульса и энергии.

$$\begin{cases} mv_0 = -mv_1 + P \\ \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + E_1 \end{cases} \quad (1),$$

где P и E_1 – импульс и энергия сваи после удара.

Импульс и энергия связаны соотношением:

$$P = \sqrt{2ME_1} \quad (2).$$

Подставляя в систему (1), приведённые в условии выражения: $E_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{mv_0^2}{2}$ и

$v_1 = \xi \cdot v_0$, а также используя соотношение (2), получим:

$$\begin{cases} 1 = -\xi + \sqrt{\frac{M}{m}} \sqrt{\varepsilon_1} \\ 1 = \xi^2 + \varepsilon_1 \end{cases} \quad (3).$$

Решая систему (3), получим:

$$\xi = \frac{M - m}{M + m} \quad (4),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{4mM}{(M+m)^2} \quad (5).$$

2. Т.к. трение велико, то можно считать, что сила трения – величина постоянная и равна:

$$F_{TP} = kx_0 \quad (6),$$

Для определения Δx_0 приравняем модуль работы сил трения к энергии E_1 , полученной сваем после удара.

$$E_1 = F_{TP} \Delta x_0 \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{mv_0^2}{2} = kx_0 \Delta x_0 \quad (7),$$

$$\Delta x_0 = \frac{\varepsilon_1}{kx_0} \cdot \frac{mv_0^2}{2} \quad (8).$$

3. Т.к. молот после удара отлетает с такой же скоростью, то из закона сохранения импульса

$$mv_0 = -mv_0 + P \quad (9)$$

сразу же получаем:

$$P = 2mv_0 \quad (10).$$

Используя соотношение (2), находим:

$$E_2 = \frac{P^2}{2M} = \frac{4m^2 v_0^2}{2M} = 4 \frac{m}{M} \frac{mv_0^2}{2} \quad (11).$$

Поэтому

$$\varepsilon_2 = 4 \frac{m}{M} \quad (12).$$

4. Подача топлива регулируется таким образом, что после удара молот обладает такой же энергией. Свая при этом опускается на некоторую глубину Δx_i . Т.е., когда молот снова опустится, его кинетическая энергия станет больше на величину

$$\Delta E = mg \Delta x_{i-1} \quad (13),$$

и станет равной

$$\frac{mv_0'^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mg \Delta x_{i-1} \quad (14).$$

Используя результат второго пункта (8), получим:

$$\Delta x_i = \frac{\varepsilon_1}{kx_i} \cdot \frac{mv_0'^2}{2} = \frac{\varepsilon_1}{kx_i} \left(\frac{mv_0^2}{2} + mg \Delta x_{i-1} \right) \quad (15).$$

Кинетическая энергия $\frac{mv_0^2}{2}$ может быть выражена через глубину погружения после предыдущего удара (опять используем формулу (8)):

$$\Delta x_{i-1} = \frac{\varepsilon_1}{kx_{i-1}} \cdot \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = \Delta x_{i-1} \frac{kx_{i-1}}{\varepsilon_1} \quad (16).$$

Тогда выражение (15) запишется в следующем виде:

$$\Delta x_i = \frac{\varepsilon_1}{kx_i} \left(\Delta x_{i-1} \frac{kx_{i-1}}{\varepsilon_1} + mg \Delta x_{i-1} \right) = \Delta x_{i-1} \left(\frac{x_{i-1}}{x_i} + \frac{mg \varepsilon_1}{kx_i} \right) \quad (17).$$

Т.к. $\Delta x \ll x$, то с большой точностью

$$\frac{x_{i-1}}{x_i} \approx 1 \quad (18).$$

Тогда искомая постоянная:

$$\lambda = \frac{mg\varepsilon_1}{k} \quad (19).$$

5. Будем использовать соотношение, приведённое в четвёртом пункте. После первого удара свая погрузится на глубину

$$\Delta x_1 = \Delta x_0 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right) \quad (20).$$

После второго:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1 + \Delta x_1} \right) = \Delta x_0 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{x_1 + \Delta x_1} \right) \quad (21).$$

Т.к. с одной стороны $\Delta x_i \ll x_i$, а с другой мы проводим лишь оценку, то величиной Δx_1 в знаменателе можно пренебречь. Тогда

$$\Delta x_2 = \Delta x_0 \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right)^2 \quad (21).$$

Воспользуемся формулой приближённого вычисления $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

$$\Delta x_2 \approx \Delta x_0 \left(1 + 2 \frac{\lambda}{x_1} \right) \quad (22).$$

Проделаем аналогичные рассуждения, для погружения после третьего удара:

$$\begin{aligned} \Delta x_3 &= \Delta x_2 \left(1 + \frac{\lambda}{x_2 + \Delta x_2} \right) = \Delta x_0 \left(1 + 2 \frac{\lambda}{x_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2} \right) \approx \\ &\approx \Delta x_0 \left(1 + 2 \frac{\lambda}{x_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{x_1} \right) \approx \Delta x_0 \left(1 + 3 \frac{\lambda}{x_1} \right) \end{aligned} \quad (23).$$

Таким образом, для оценки можно принять, что

$$\Delta x_i \approx \Delta x_0 \left(1 + i \cdot \frac{\lambda}{x_1} \right) \quad (24).$$

Используя формулу для суммы арифметической прогрессии, получим приближённое выражение для величины погружения после десяти ударов:

$$h \approx \Delta x_0 \left(10 + 55 \frac{\lambda}{x_1} \right) \quad (25).$$

Безусловно данная оценка является завышенной.

6. Используем приведенный в первом пункте факт – $v_1 = \xi \cdot v_0$.

После последнего удара с горючим, до первого удара без него пройдет время

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} \quad (26).$$

Промежуток времени между первым и вторым ударом:

$$t_2 = \frac{2v_1}{g} = \frac{2v_0}{g} \cdot \xi \quad (27).$$

Между вторым и третьим:

$$t_3 = \frac{2v_2}{g} = \frac{2v_0}{g} \cdot \xi^2 \quad (28).$$

Таким образом, промежутки времени образуют убывающую геометрическую прогрессию ($\xi < 1$).

Удары прекратятся через время

$$T = \frac{2\nu_0/g}{1-\xi} \quad (29).$$

Задача 3. Интерференция.

1. Складывая колебания, получим

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t - \varphi_1) + E_0 \cos(\omega t - \varphi_2) = \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Таким образом, результирующая амплитуда равна

$$E_{0,рез.} = 2E_0 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right), \quad (1)$$

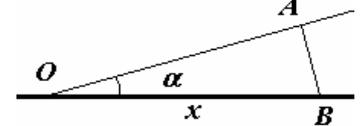
соответственно, интенсивность равна

$$\begin{aligned} I &= \left\langle \left(2E_0 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \right)^2 \right\rangle = 2E_0^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = \\ &= 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}, \quad (2)$$

где I_0 - интенсивность света, создаваемая одной волной.

2. Выберем за начало отсчета точку O , фазу колебаний в которой примем за нуль. Тогда в точке B с координатой x фаза колебаний будет равна (набег на участке AB , OA - фронт волны)

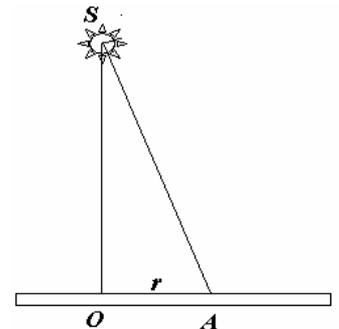
$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \alpha. \quad (3)$$



От второй координаты фаза не зависит.

3. В точке A , находящейся на расстоянии r от начала отсчета O , фаза колебания равна

$$\varphi(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + r^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + x^2 + y^2}. \quad (4)$$



4. Используя полученные выражения (2) и (3), запишем выражение для интенсивности света

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} x (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)\right) \quad (5)$$

Таким образом, интерференционная картина представляет собой систему равноотстоящих прямых полос. Максимумы интенсивности будут в тех точках, где разность фаз равна $2\pi m$, ($m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$), или

$$\frac{\pi}{\lambda} x_m (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = \pi m \Rightarrow x_m = \frac{m\lambda}{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}. \quad (6)$$

В случае малых углов ширина интерференционной полосы равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{|\alpha_1 - \alpha_2|}. \quad (7)$$

5. Считая фазу колебаний плоской волны равной φ_0 и используя выражения (2) и (4), получим распределение интенсивности на экране

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} - \frac{\varphi_0}{2}\right). \quad (8)$$

Интерференционная картина – система не равноотстоящих колец.

При оговоренных условиях, разность фаз колебаний может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_0 &= \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} - \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} L \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{L^2}} - \varphi_0 \approx \\ &\approx \frac{2\pi}{\lambda} L \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2L^2}\right) - \varphi_0 = \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{L} \end{aligned}$$

Минимумы интенсивности будут находиться в тех точках, где $\varphi_1 - \varphi_0 = \pi \left(m + \frac{1}{2}\right)$, или

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{L} = \frac{\pi}{\lambda} \frac{r_m^2}{L} = \pi \left(m + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow r_m = \sqrt{\lambda L \left(m + \frac{1}{2}\right)}. \quad (9)$$

Получаем систему колец Ньютона.

6. Очередной раз используем соотношения (2) и (4) – с учетом сдвига вдоль оси OX , получаем

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \left(\sqrt{L^2 + x^2 + y^2} - \sqrt{L^2 + (x-d)^2 + y^2}\right)\right).$$

В указанном приближении

$$\begin{aligned} \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} - \sqrt{L^2 + (x-d)^2 + y^2} &= L \left(\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{L^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x-d)^2 + y^2}{L^2}} \right) \approx \\ &\approx \frac{x^2 + y^2}{2L} - \frac{(x-d)^2 + y^2}{2L} \approx \frac{xd}{L} \end{aligned}$$

Соответственно, распределение интенсивности

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{xd}{L}\right) \quad (10)$$

есть ряд равностоящих полос (схема Юнга) с максимумами в точках с координатами:

$$\frac{\pi}{\lambda} \frac{x_m d}{L} = m\pi \Rightarrow x_m = m \frac{\lambda L}{d}. \quad (11)$$

Ширина полос

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}. \quad (12)$$