



*Республиканская физическая
олимпиада (III этап)
2006 год
Теоретический тур*

9 класс.

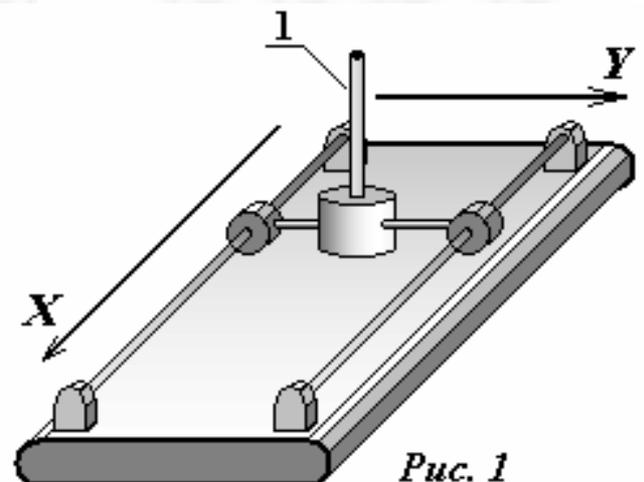
Задача 1. «Графопостроитель»

Задача 2. «Металлы тоже кипят!»

Задача 3. «Электродвигатель»

Задача 4. «Подземная река»

*Решения
и
комментарии*



Задача 1. «Графопостроитель»

При выполнении данного задания требуется тщательность и аккуратность. Решение задачи достаточно очевидно, поэтому приведем требуемые рисунки без комментариев.

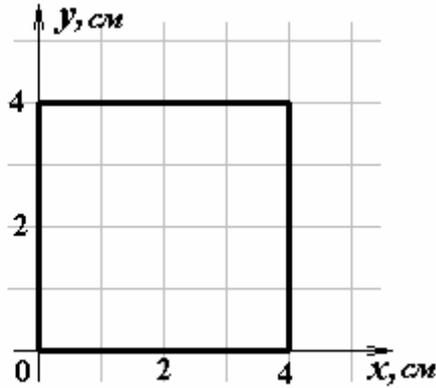


Рис. 1

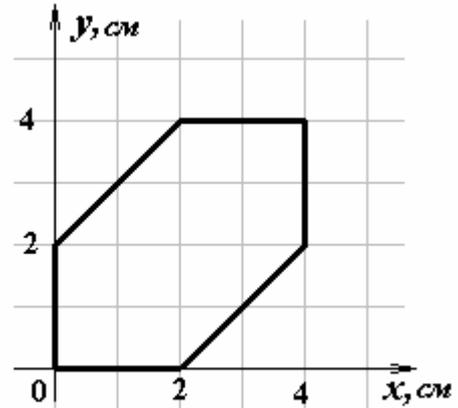


Рис.2

1.1. При заданном законе изменения скоростей результатом построения является квадрат $4\text{ см} \times 4\text{ см}$ - Рис. 1.

1.2. Указанный сбой искажает рисунок следующим образом Рис. 2.

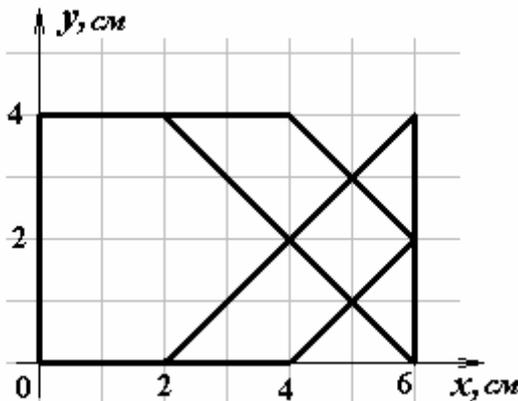


Рис. 3

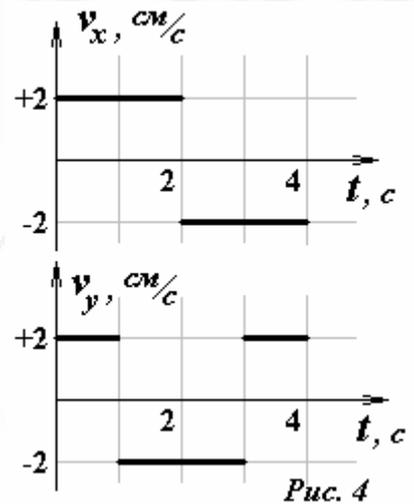


Рис. 4

1.3. Изменение периода делает «квадрат» неузнаваемым - Рис. 3.

1.4. Этот повернутый квадрат может быть нарисован различными способами, один из которых показан на рис. 4

Задача 2. «Металлы тоже кипят!»

1.1 Для того, чтобы жидкость испарялась, ей необходимо сообщать теплоту – эта энергия затрачивается на преодоления сил межмолекулярного притяжения молекул в жидком состоянии. Чем сильнее связь между молекулами, тем большую энергию необходимо сообщить молекуле. Отдельная молекула преодолевает притяжение других молекул благодаря своей кинетической энергии (которая пропорциональна температуре). Поэтому чем сильнее связь между молекулами, тем выше должна быть теплота испарения и температура кипения. Следовательно, с ростом температуры должна возрасти и теплота испарения.

Металл	Символ	Атомная масса A	Температура кипения, $t, ^\circ\text{C}$	Удельная теплота испарения $L, \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$	Молярная теплота испарения, $L_\mu, \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$
Алюминий	Al	27,0	2056	10,8	291,4
Вольфрам	W	183,9	5910	4,96	912,0
Железо	Fe	55,85	3200	6,09	340,0
Золото	Au	197,2	2966	?	
Калий	K	39,1	760	2,05	80,2
Магний	Mg	24,3	1107	5,26	127,8
Медь	Cu	63,54	2600	4,8	305,0
Олово	Sn	118,7	2270	2,28	270,6
Платина	Pt	195,1	4530	2,41	470,2
Ртуть	Hg	200,6	356	0,29	58,2
Свинец	Pb	207,2	1725	0,86	178,2
Серебро	Ag	107,9	2163	2,36	254,6
Цинк	Zn	65,4	913	1,76	115,1

1.2 Если нанести на диаграмму значения температуры кипения и удельной теплоты испарения, то никакой зависимости не просматривается (Рис. 1)

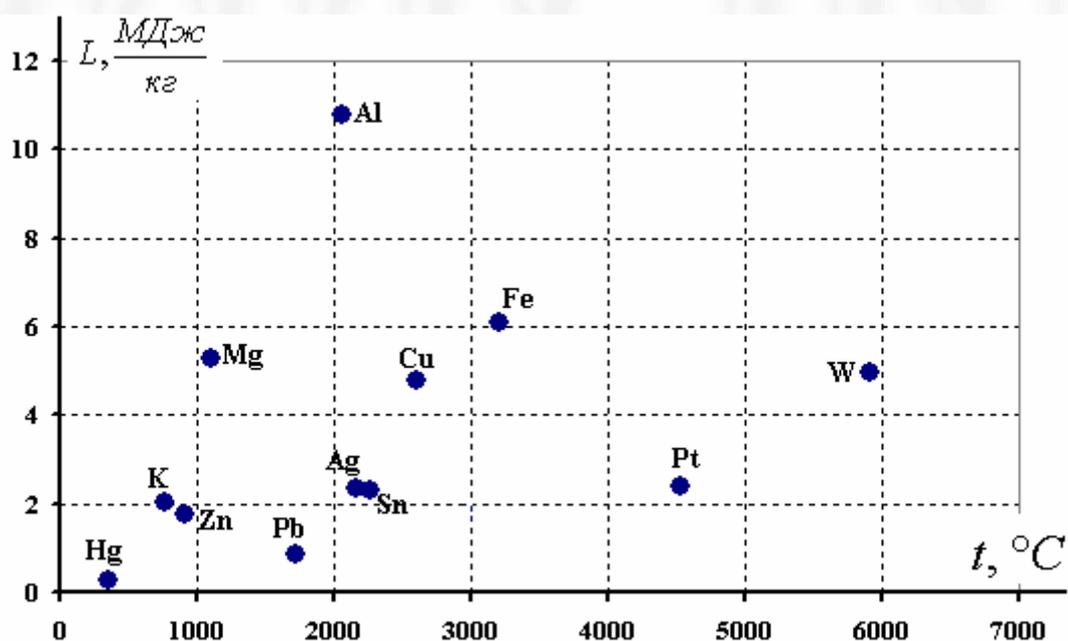


Рис. 1

Однако если рассматривать теплоту испарения, приходящуюся на одну молекулу (или что равносильно на 1 моль – молярная теплота испарения $L_\mu = LM$, данные расчетов представлены в таблице), то наблюдается практически линейная зависимость (Рис. 2)..

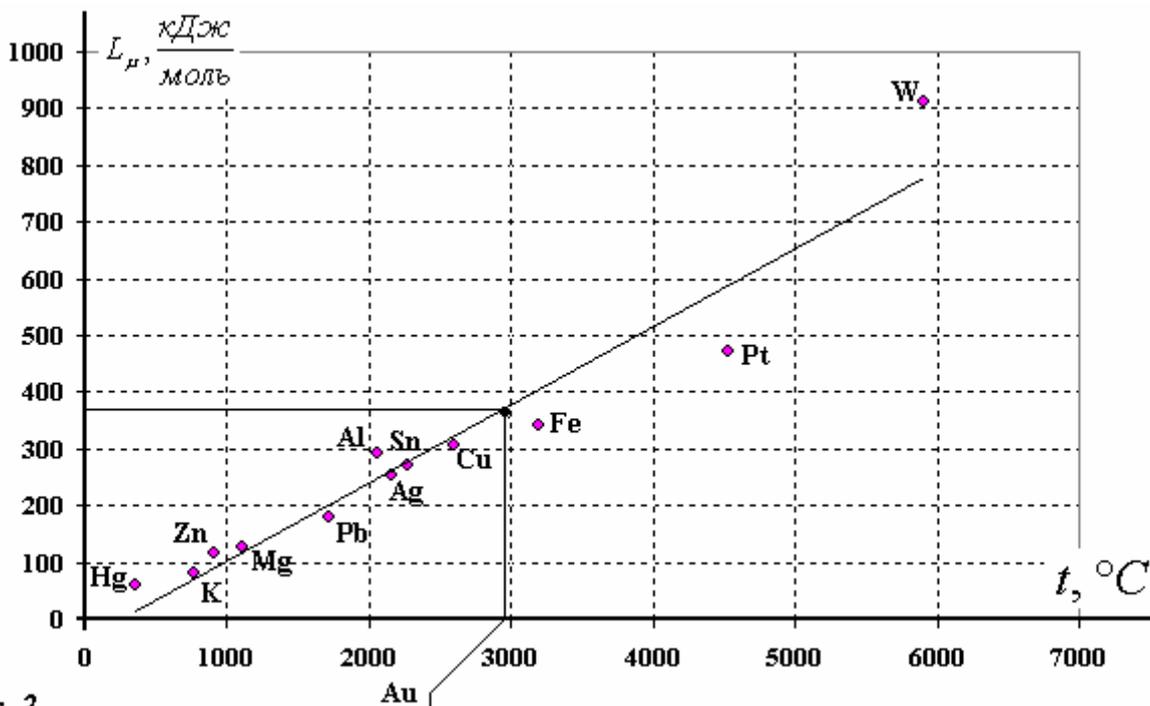


Рис. 2

График этой примерной зависимости может быть описан простой формулой

$$L_\mu = Ct_{\text{кип.}}, \quad (1)$$

где $C \approx 0,14 \frac{\text{кДж}}{\text{град}}$.

Данная зависимость может быть аппроксимирована и более точными формулами.

1.3 По графику можно приблизительно оценить молярную теплоту испарения золота

$$L_\mu \approx 380 \frac{\text{кДж}}{\text{моль}}$$

Тогда оценка удельной теплоты испарения $L = \frac{L_\mu}{M} \approx 1,9 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.

Заметим, что экспериментальное значение этой величины равно $L = 1,74 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.

2.1 График зависимости удельной теплоты испарения от температуры показан на рис. 3.

2.2 С ростом температуры незначительно возрастает расстояние между молекулами, в следствие чего уменьшается энергия их взаимодействия и соответственно удельная теплота испарения. Построенную зависимость приближенно можно описать линейной функцией

$$L = L_0 - at, \quad (2)$$

$$L_0 \approx 2,5 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}, \quad a \approx 0,003 \frac{\text{МДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$$

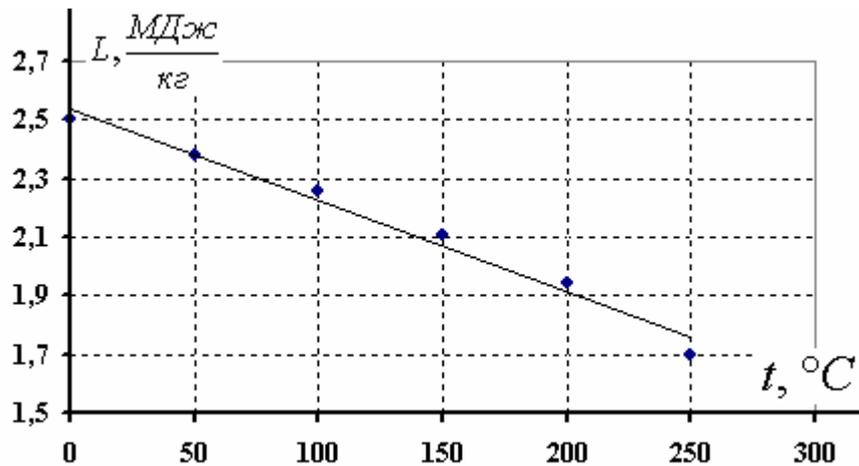


Рис. 3

Задача 3. «Электродвигатель»

3.1 Первое уравнение требуемой системы приведено в условии задачи

$$I = km. \quad (1)$$

Второе уравнение является уравнением закона сохранения энергии (записанное для мощностей)

$$IU_0 = I^2(R + R_0) + mgv. \quad (2)$$

В этой системе две неизвестных величины, поэтому обе могут быть найдены.

3.2 Выражая значение силы тока из уравнения (1) и подставляя его в уравнение (2), получим

$$kmU_0 = k^2m^2(R + R_0) + mgv, \quad (3)$$

Откуда находим зависимость скорости подъема груза от параметров системы

$$v = \frac{kU_0 - k^2m(R + R_0)}{g}. \quad (4)$$

3.3 Максимальная масса груза определяется из формулы (4), в которой следует устремить скорость подъема к нулю, сопротивление реостата также должно быть минимальным (то есть нуль):

$$m_{\max} = \frac{U_0}{kR_0}. \quad (5)$$

3.4 В данном случае КПД есть отношение мощности, затрачиваемой на подъем груза к мощности источника:

$$\eta = \frac{mgv}{IU_0} = \frac{gv}{kU_0}. \quad (6)$$

Подставляя выражение для скорости подъема из формулы (4), получим зависимость КПД от массы груза

$$\eta = 1 - \frac{km(R - R_0)}{U_0}. \quad (7)$$

Задача 4 «Подземная река»

Обозначим проекции искомой силы давления \vec{F} жидкости на горизонтальную ось – F_x , на вертикальную – F_y (рис. 2). Тогда из соответствующего прямоугольного треугольника сил имеем

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}. \quad (1)$$

Сила горизонтального давления F_x на половинку BC купола равна по модулю (и противоположна по направлению) силе давления на вертикальное сечение OB системы. Это следует из условия равновесия каждой из половинок купола. Атмосферное давление можно не учитывать, т.к. оно оказывает действие с обеих сторон купола.

Поскольку гидростатическое давление с глубиной возрастает линейно, а элементарные площадки имеют одинаковую длину L , то среднее давление для этого сечения (см. рис. 2)

$$p_{cp} = \frac{\rho g h}{2} = \frac{\rho g R}{2}.$$

Учитывая, что площадь всего прямоугольного сечения $S_{BO} = LR$, окончательно получим

$$F_x = \frac{\rho g R}{2} \cdot LR = \frac{\rho g LR^2}{2}. \quad (2)$$

Для нахождения F_y воспользуемся гидростатическим парадоксом. Сила вертикального давления на дно (сечение OC) с одной стороны может быть найдена по определению как произведение постоянного давления $p = \rho g R$ на площадь дна S_{OC}

$$F_{OC} = p \cdot S_{OC} = \rho g R \cdot LR = \rho g LR^2, \quad (3)$$

а с другой — как сумма силы тяжести воды на рис. 2 и F_y . Действительно, по III закону Ньютона, бетонный купол «прижимает» воду ко дну тоже с силой F_y . Таким образом,

$$\rho g LR^2 = F_y + \rho g \frac{\pi R^2}{4} L \quad (4)$$

Из (4) находим

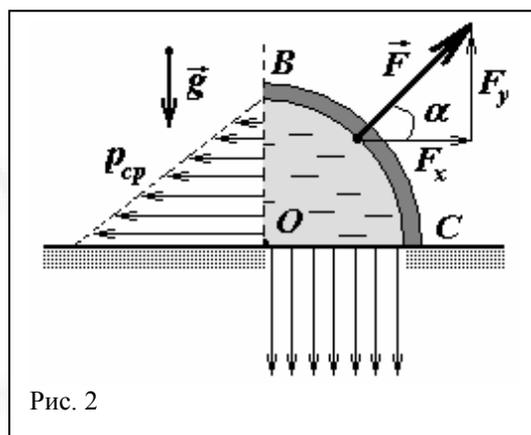
$$F_y = \frac{4 - \pi}{4} \rho g LR^2 \quad (5)$$

Окончательно, с учетом (1), (2) и (5) получаем

$$F = \frac{\rho g LR^2}{4} \sqrt{4 + (4 - \pi)^2} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ Н} = 0,21 \text{ МН} \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - \pi}{2} = 0,43 \Rightarrow \alpha = 23^\circ. \quad (7)$$

Как видим из (6), сила давления воды достаточно велика — крепления половинок русла должны быть надежными! Кроме того, из (7) следует, что значение угла α на рис. 1 преувеличено примерно в 2 раза, т.е. вода значительно больше «толкает» половинку, чем «приподнимает».



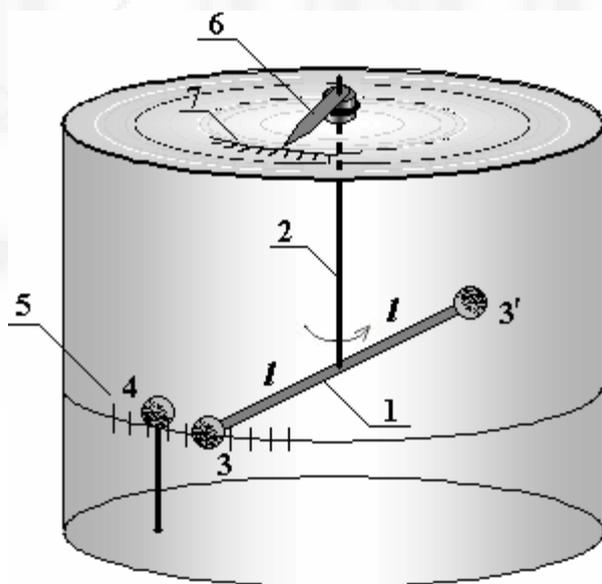


*Республиканская физическая
олимпиада (III этап)
2006 год
Теоретический тур*

10 класс.

Крутильные весы Кулона

*Решение
и
комментарии*



Часть 1. Установка.

1.1 Конечно же, для нормальной работы установки следует заряжать ближний к внешнему заряду шарик коромысла 3, поскольку обратное противоречит условию и здравому смыслу.

1.2 Не нарушится, т.к. масса электронов ничтожно мала по сравнению с массами реальных объектов. Даже при «огромном» заряде $q = 1 \text{ Кл}$ суммарная масса электронов составит $m = 5,7 \cdot 10^{-12} \text{ кг}$, что значительно меньше массы любой пылинки, летающей в воздухе.

Часть 2. Модуль кручения.

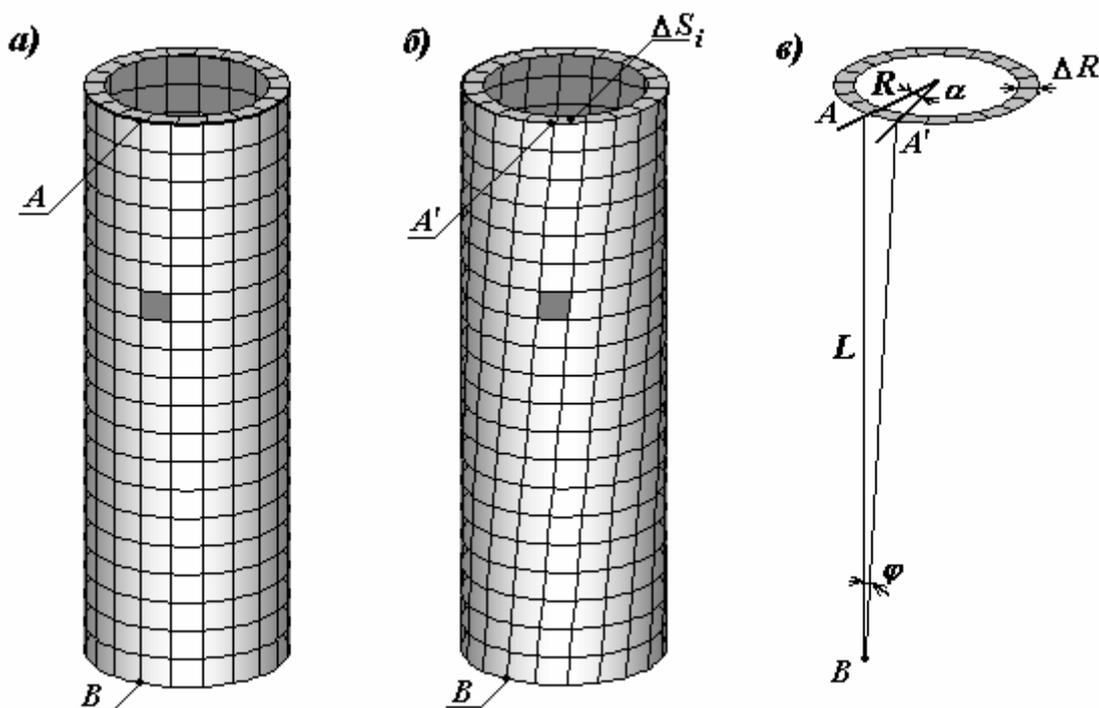


Рис. 3

2.1 Покажем, что деформация кручения сводится к деформации сдвига. Для этого мысленно разобьем тонкостенный цилиндр (т.е. проволоку) на тонкие слои перпендикулярные оси цилиндра, а каждый из этих слоев на малые слегка изогнутые параллелепипеды (Рис. 3а). При закручивании проволоки каждый из этих выделенных элементов разбиения наклонится на малый угол φ , то есть испытает деформацию сдвига. Для закручивания проволоки к ней необходимо приложить некоторый момент силы M , который в состоянии равновесия будет уравниваться равным по модулю моментом силы упругости. Тангенциальная сила упругости, возникающая при деформации выделенного элемента по закону Гука равна

$$\Delta F_i = G\varphi\Delta S_i, \quad (1)$$

где ΔS_i - площадь «верхней» грани выделенного элемента. Момент этой силы, относительно оси цилиндра равен

$$\Delta M_i = \Delta F_i R = G\varphi\Delta S_i R. \quad (2)$$

Так как для всех элементов выбранного кольца углы сдвига одинаковы, то вычисление суммарного момента сил упругости сводится к суммированию площадей «верхних граней»:

$$M = \sum_i \Delta M_i = \sum_i G \varphi \Delta S_i R = G \varphi R \sum_i \Delta S_i = G \varphi R \cdot 2\pi R \Delta R = 2\pi R^2 \Delta R G \cdot \varphi .$$

Здесь $\sum_i \Delta S_i = 2\pi R \Delta R$ - площадь верхней грани выделенного колечка.

Теперь необходимо выразить угол сдвига φ через угол закручивания проволоки α . Пусть в результате кручения (см. Рис. 3в) некоторая точка A на торце проволоки сместилась в положение A' , тогда, считая все углы малыми, длину дуги AA' можно выразить в двух формах $\alpha R = L \varphi$, откуда следует, что

$$\varphi = \frac{R}{L} \alpha ,$$

поэтому суммарный момент сил упругости (который, очевидно, постоянен для любого поперечного сечения проволоки) равен.

$$M = F \cdot R = \frac{2\pi R^3 \Delta R}{L} G \cdot \alpha .$$

Сравнивая с формулой закона Гука, находим, что модуль кручения равен

$$k = \frac{2\pi R^3 \Delta R}{L} G . \quad (3)$$

2.2 Расчет по формуле (3) для данных из условия дает

$$k = 0,13 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$$

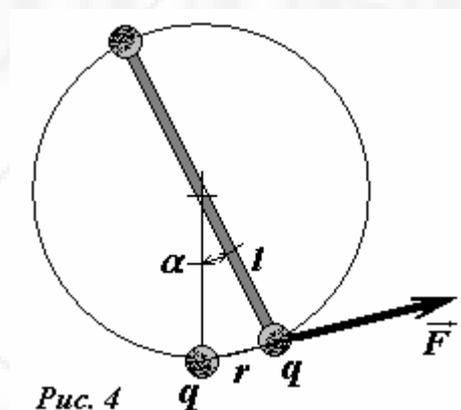
Часть 3. «Малые углы»

3.1 Пусть коромысло крутильных весов повернулось на малый угол α (рис.4). Тогда расстояние между шариками r можно выразить как длину соответствующей дуги $r = l \alpha$. Вследствие малости угла можно считать, что плечо силы Кулона практически равно расстоянию l . При равновесии момент силы отталкивания зарядов (силы Кулона) будет уравновешен возвращающим моментом, возникшим вследствие закручивания серебряной проволоочки, поэтому

$$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \cdot l = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{q^2}{(l\alpha)^2} \cdot l = k \cdot \alpha . \quad (3)$$

Из (3) найдем зависимость угла закручивания нити при небольшом отклонении

$$\alpha(q) = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 l k}} . \quad (4)$$



3.2 Для построения графика подставим численные значения постоянных величин

$$\alpha(q) = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 lk}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(10^{-9})^2 q^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,10 \cdot 0,13}} \approx 8,84 \cdot 10^{-3} q^{2/3},$$

здесь заряд измеряется в нанокюлонах. График этой зависимости показан на рис.5.

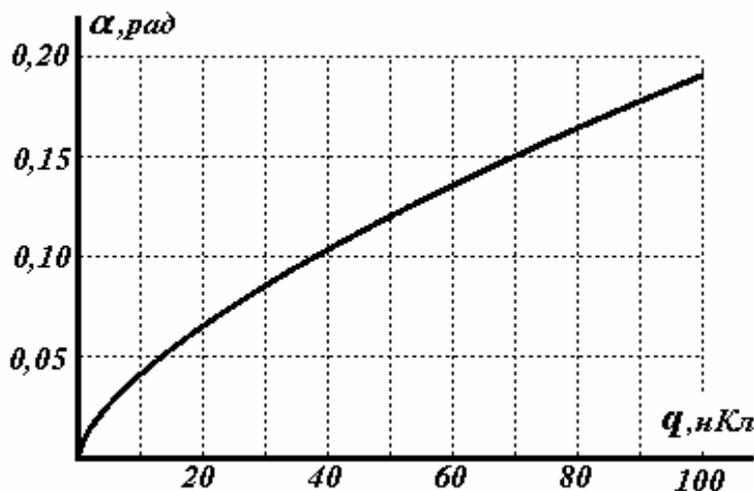


Рис. 5

3.3 Выражая из формулы (4) заряд, получим

$$q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 lk\alpha^3} \quad (5)$$

Подставляя в (5) значение (предварительно не забыв перевести его в радианы!) $\alpha = 10^\circ = 0,175$ рад найдем величину заряда q_1

$$q_1 = 8,8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл} = 88 \text{ нКл}$$

3.4 Для нахождения максимального заряда при малых отклонениях подставим в формулу (5) значение предельного угла $\alpha = 20^\circ$ и выразим отсюда величину заряда q_2

$$q_2 = \sqrt{4\pi\epsilon_0 lk\alpha^3} = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ Кл} = 0,25 \text{ мкКл} \quad (6)$$

Таким образом, при зарядах на шариках $q \leq q_2 = 0,25 \text{ мкКл}$ крутильные весы работают в режиме «малых углов».

Часть 4. «Большие углы».

4.1 При больших углах отклонения следует учесть, что расстояние между взаимодействующими шариками есть длина хорды, а не дуги (рис.6), т.е.

$$r = 2l \sin(\alpha/2).$$

Соответственно плечо силы Кулона в этом случае следует рассчитать как

$$d = l \cos(\alpha/2).$$

Таким образом, правило моментов для этого случая запишется в виде

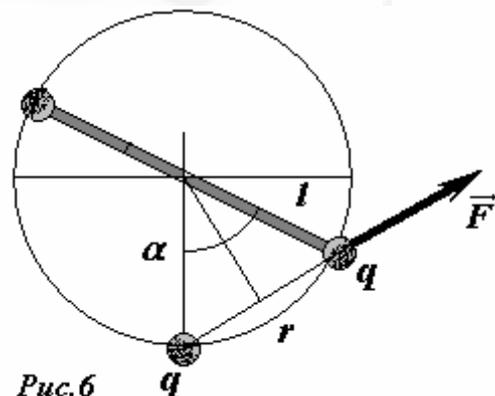


Рис.6

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{(2l\sin(\alpha/2))^2} \cdot l\cos(\alpha/2) = k \cdot \alpha. \quad (7)$$

Выражение (7) удобно преобразовать к следующему виду

$$\alpha = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{kl} \cdot \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}. \quad (8)$$

Это уравнение может быть представлено и в других эквивалентных формах.

4.2 Выражая из (8) величину заряда q , получим

$$q_2 = 4\sin(\alpha/2) \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 k l \alpha}{\cos(\alpha/2)}}. \quad (9)$$

Если точное значение заряда \bar{q}_2 определяется формулой (9), а приближенное \tilde{q}_2 - формулой (6), то относительная погрешность последней равна

$$\varepsilon = \frac{\tilde{q}_2 - \bar{q}_2}{\bar{q}_2} = \frac{\tilde{q}_2}{\bar{q}_2} - 1 = \frac{\alpha\sqrt{\cos(\alpha/2)}}{2\sin(\alpha/2)} - 1.$$

При угле $\alpha = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ рад}$ расчет по этой формуле приводит к значению $\varepsilon \approx 2,6 \cdot 10^{-3}$

Данный факт позволяет сделать вывод, что границы приближения «малых углов» смело можно увеличить.

4.3 Уравнение (8) относительно угла закручивания нити α является трансцендентным, т.е. невозможно представить зависимость $\alpha(q)$ в явном аналитическом виде. Однако не составляет особого труда рассчитать на калькуляторе несколько значений обратной функции $q(\alpha)$, что позволяет построить примерно требуемый график, который показан на рис. 7, где значения $q(\alpha)$ подсчитаны по формуле (9) с шагом 10° .

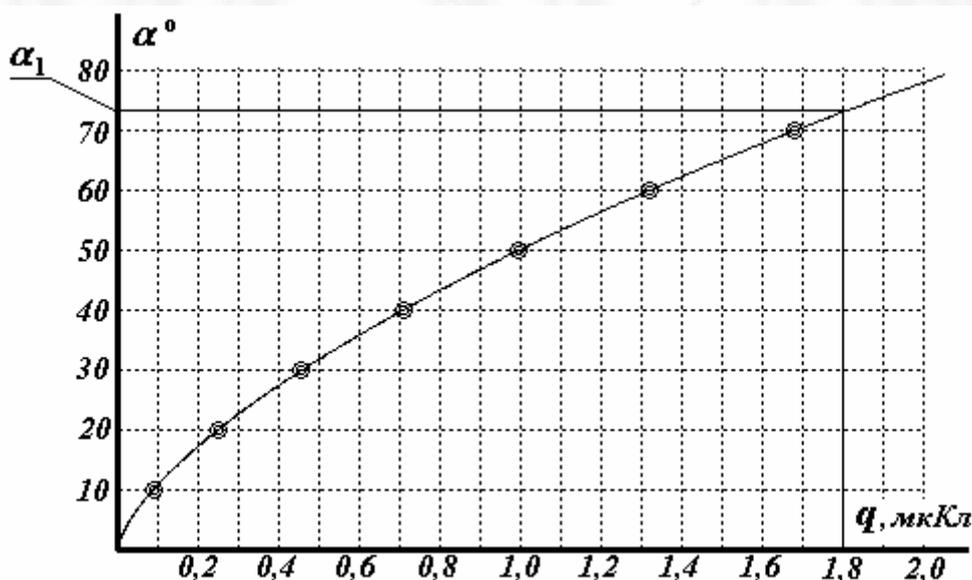


Рис. 7

По данному графику находим, что при заряде $q = 1,8 \text{ мкКл}$ угол отклонения коромысла приблизительно равен $\alpha \approx 73^\circ$.

На рис.8 представлены графики двух функций $q(\alpha)$, рассчитанные по приближенной формуле (6) и по точной формуле (9), как видно различия между ними начинают проявляться только при углах отклонения $\alpha \geq 60^\circ$.

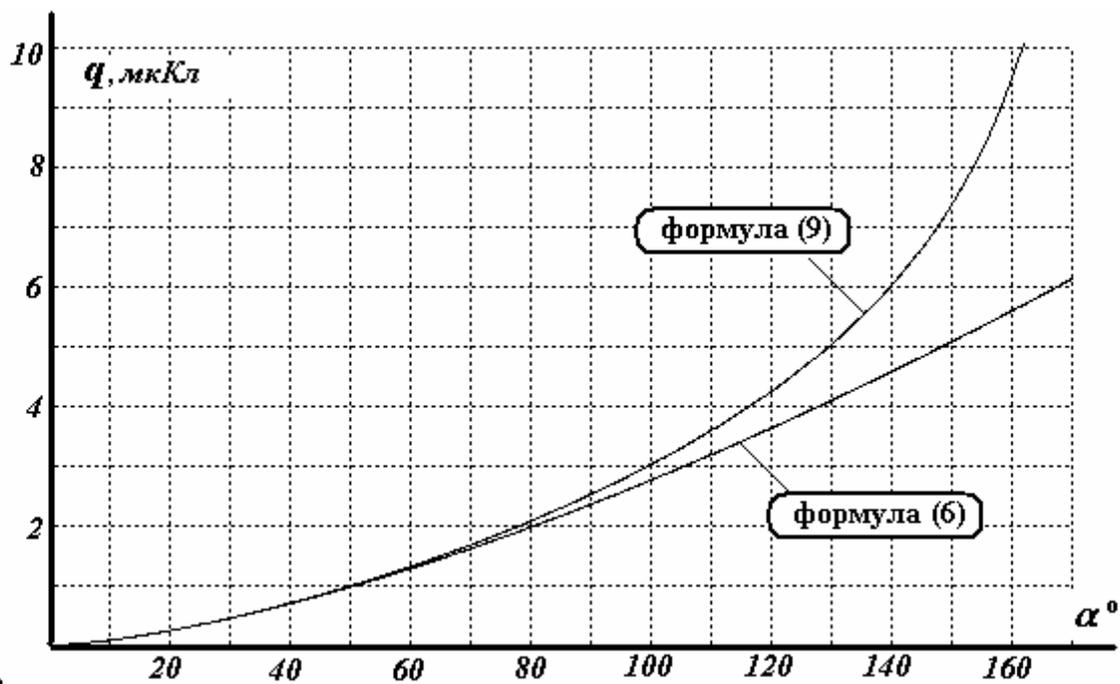


Рис. 8

Часть 5. Измерение зарядов.

5.1 Момент сил электрического взаимодействия пропорционален произведению зарядов шариков и сложным образом зависит от углового расстояния между ними

$$M_{эл.} = q_0 q_X f(\alpha_0). \quad (10)$$

Так как в данном эксперименте путем доворота коромысло возвращается в исходное положение, то явный вид зависимости этого момента от угла $f(\alpha_0)$ не существенен.

Момент сил упругости нити пропорционален углу закручивания нити,

$$M = -k(\alpha_0 \pm \Delta\alpha), \quad (11)$$

в этой формуле следует брать знак «минус», при довороте в направлении первоначального коромысла; знак «плюс» при довороте в противоположном направлении. С помощью этих выражений получаем, что отношение зарядов легко определяется с помощью пропорции

$$\frac{q_X}{q_0} = \frac{\alpha_0 \pm \Delta\alpha}{\alpha_0}. \quad (12)$$

Так при довороте в сторону направления поворота коромысла

$$\frac{q_X}{q_0} = \frac{\alpha_0 - \Delta\alpha}{\alpha_0} \approx 0,5,$$

следовательно, в этом случае заряд уменьшился в два раза.

При довороте в противоположном направлении

$$\frac{q_X}{q_0} = \frac{\alpha_0 + \Delta\alpha}{\alpha_0} \approx 1,5,$$

следовательно, в этом случае заряд увеличился в полтора раза.

Часть 6. Вязкость.

6.1 Поворот верхнего рычага-стрелки смещает положение равновесия коромысла, теперь положению равновесия (когда проволока не закручена) соответствует угол поворота коромысла, равный углу поворота стрелки, то есть 90° . Для точного описания вращения коромысла следует пользоваться уравнением динамики вращательного движения. Однако, так как масло вязкое, то можно пользоваться «квазистатическим» приближением, то есть считать, что в любой момент времени сумма моментов сил, действующих на коромысло (в данном случае это моменты сил упругости и вязкого трения) равна нулю, что приводит к уравнению

$$k(\Delta\alpha_0 - \alpha) = \beta\omega = \beta \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что угловая скорость вращения пропорциональна углу отклонения коромысла от положения равновесия

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{k}{\beta}(\Delta\alpha_0 - \alpha). \quad (14)$$

Таким образом, для проверки применимости сделанных предположений (момент сил вязкого трения пропорционален угловой скорости, квазистационарный характер движения коромысла) следует убедиться, что мгновенная угловая скорость вращения коромысла пропорциональна углу его отклонения от положения равновесия.

По приведенным в Таблице 1 данным можно приближенно вычислить значения средней угловой скорости вращения коромысла на каждом интервале изменения угла поворота

$$\omega_{i+0,5} \approx \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{t_{i+1} - t_i}, \quad (15)$$

которую следует приписать середине углового интервала $\alpha_{i+0,5} = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2}$.

Расчеты этой экспериментальной зависимости угловой скорости от угла поворота приведены в Таблице 2. На Рис. 9 построен график зависимости угловой скорости от отклонения коромысла от положения равновесия $(\Delta\alpha_0 - \alpha)$.

Таблица 2.

α°	5	15	25	35	45	55	65	75
$\omega, \text{град} \cdot \text{с}^{-1}$	8,33	7,69	6,67	5,26	4,55	3,57	2,38	1,45

Полученная пропорциональная зависимость подтверждает применимость сделанных предположений. Из уравнения (14) следует, что коэффициент пропорциональности между угловой скоростью и углом отклонения равен $\frac{k}{\beta}$, численное значение этого же коэффициента, найденное из графика, приблизительно равно

$$\frac{k}{\beta} \approx 0,10 \text{ с}^{-1}. \text{ Следовательно, требуемое значение параметра } \beta \approx \frac{k}{0,10 \text{ с}^{-1}} = 1,3 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}.$$

6.2 Из уравнения (13) следует, что характерное время установления равновесия, определенное с помощью Подсказки 2, равно

$$T_0 = \frac{\beta}{k} \approx 10 \text{ с}. \quad (18)$$

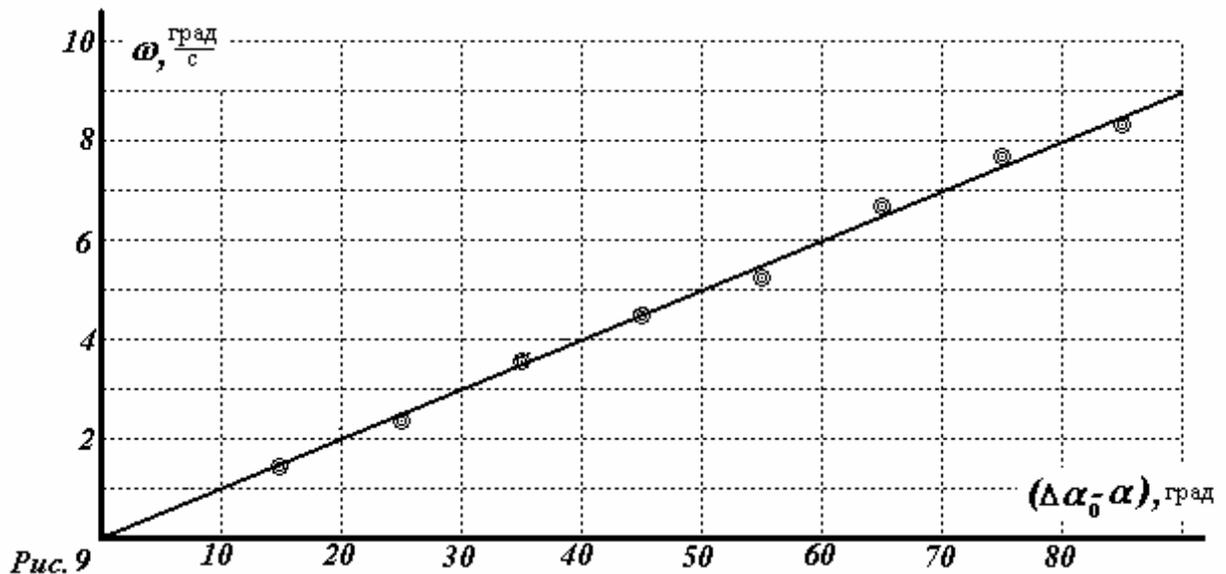


Рис. 9
 Проиллюстрируем более подробно методику экспериментальной проверки применимости уравнения (13).

На Рис. 10 показан график «прохождения дистанции» коромыслом, то есть времена поворота от начального положения до указанного значения угла поворота, построенный по данным Таблицы 1.

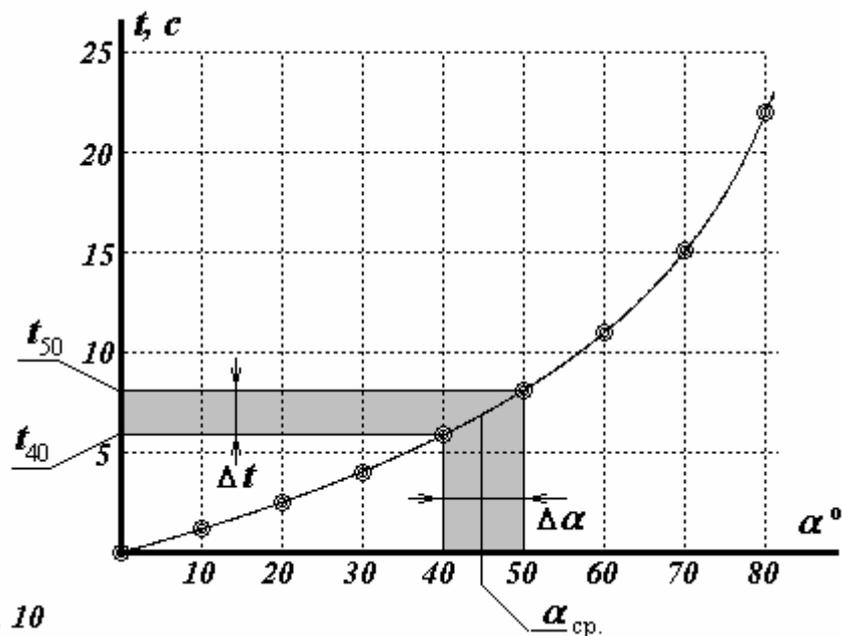


Рис. 10

Так, например, участок от 40° до 50° коромысло прошло за время $\Delta t = t_{50} - t_{40} = 8,1 - 5,9 \approx 2,2 \text{ с}$. Следовательно, на этом участке средняя угловая скорость

примерно равна $\omega_{\text{ср.}} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{10^\circ}{2,2} \approx 4,55 \frac{\text{град}}{\text{с}}$. С наименьшей погрешностью можно

считать, что с этой скоростью коромысло прошло среднюю точку интервала $\alpha_{\text{ср}} = 45^\circ$.

Аналогичные расчеты проделаны для всех интервалов углов поворота, а их результаты приведены в Таблице 2: в первой строке середины интервалов, в нижней – соответствующие угловые скорости. При построении графика по оси абсцисс отложен угол, до положения равновесия, то есть $(\Delta \alpha_0 - \alpha) = (90^\circ - \alpha)$, который определяет момент сил упругости. При таком построении углы, приведенные в таблице и на графике, идут в обратном порядке.

Часть 7. Движение в масле.

7.1 При помещении заряженных шариков в масло сила взаимодействия между ними уменьшается в ε раз, во столько же раз уменьшается и момент силы, действующей на коромысло. Поэтому условие равновесия, описываемое уравнением (3), приобретет вид

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q_0^2}{(l\alpha)^2} \cdot l = k \cdot \alpha. \quad (19)$$

Поэтому угол равновесия в масле станет равным

$$\bar{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l k}} = \frac{\alpha_0}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \approx 12^\circ. \quad (20)$$

Таким образом, угол поворота уменьшится в $\sqrt[3]{\varepsilon} \approx 1,7$ раз.

7.2 Запишем уравнение движения коромысла в квазистационарном приближении

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l} \frac{q^2}{\alpha^2} - k\alpha - \beta\omega = 0. \quad (21)$$

Для упрощения (т.е. экономии места) разделим уравнение на модуль кручения проволоки и используем введенные ранее обозначения:

$$\frac{\beta}{k} = T_0 \quad - \text{характерное время установления равновесия в масле;}$$

$$\frac{q_0^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon l k} = \bar{\alpha}^3, \text{ где } \bar{\alpha} \text{ - угол равновесия коромысла при заряде шариков равных } q_0,$$

определяемый по формуле (12);

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad - \text{угловая скорость вращения коромысла.}$$

С учетом этих обозначений уравнение (21) записывается в виде

$$T_0 \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\bar{\alpha}^3}{q_0^2} \frac{q^2}{\alpha^2} - \alpha. \quad (22)$$

Для описания начального этапа движения коромысла, когда можно пренебречь моментом сил упругости и при неизменных зарядах шариков $q = q_0$ уравнение (22) упрощается

$$T_0\omega = \frac{\bar{\alpha}^3}{\alpha^2}. \quad (23)$$

Для его решения воспользуемся *Подсказкой 3*, то есть попытаемся найти зависимость угла поворота от времени в виде

$$\alpha(t) = Ct^\gamma, \quad (24)$$

тогда $\omega(t) = C\gamma t^{\gamma-1}$. Подставляя эти выражения в уравнение (23) получим

$$T_0 C \gamma t^{\gamma-1} = \frac{\bar{\alpha}^3}{C^2} t^{-2\gamma}. \quad (25)$$

Чтобы это выражение было справедливо в любой момент времени, необходимо, чтобы показатели степеней переменной t совпадали. Это условие позволяет определить показатель степени в функции (24):

$$\gamma - 1 = -2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}. \quad (26)$$

Теперь из равенства (25) легко определить постоянную $C = \sqrt[3]{3 \frac{\bar{\alpha}^3}{T_0}}$.

Окончательно, закон движения коромысла (24) в рамках оговоренных приближений имеет «очаровательный» вид

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} \cdot \sqrt[3]{3 \frac{t}{T_0}}. \quad (27)$$

7.3 Окружим один из шариков замкнутой поверхностью Ω (Рис. 11). Сила электрического тока пересекающего через эту поверхность, равна скорости уменьшения заряда внутри поверхности. Эта сила тока равна потоку вектора плотности тока через поверхность $I = \Phi_{\vec{j}}$. Так как по закону Ома плотность тока пропорциональна напряженности электрического поля $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$, то потоки этих векторов связаны аналогичным

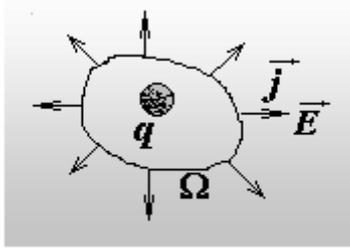


Рис.11

соотношением $\Phi_{\vec{j}} = \frac{1}{\rho} \Phi_{\vec{E}}$. Поток вектора напряженности

электрического поля определяется теоремой Гаусса $\Phi_{\vec{E}} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}$. Таким образом, величина заряда внутри рассматриваемой области подчиняется уравнению

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -I = -\Phi_{\vec{j}} = -\frac{1}{\rho} \Phi_{\vec{E}} = -\frac{q}{\rho \epsilon \epsilon_0}. \quad (28)$$

Из которого непосредственно следует, что характерное время стекания зарядов с шарика равно

$$T_1 = \rho \epsilon \epsilon_0 \approx 2,2 \text{ с}. \quad (29)$$

Заметим, что данная оценка может быть получена и иными способами, например, рассматривая явные выражения для напряженности поля вокруг уединенного шарика.

7.4 В данном случае в процессе движения коромысла происходит утечка зарядов с обоих шариков, поэтому момент сил, действующих на коромысло, изменяется, не только из-за изменения его угла поворота, но и из-за изменения зарядов взаимодействующих шариков. Поэтому угловая скорость вращения коромысла, определяемая уравнением (22) явно зависит как от времени, так и от угла поворота. Решать точно такие уравнения достаточно сложно. Однако, в данном случае нам не требуется находить закон движения коромысла – нам требуется найти только максимальный угол отклонения! Очевидно, что в момент максимального отклонения коромысла t_m его угловая скорость вращения равна нулю, следовательно, в этот момент справедливо соотношение

$$\frac{\bar{\alpha}^3}{q_0^2} \frac{q(t_m)^2}{\alpha_{\max}^2} - \alpha_{\max} = 0, \quad \text{или} \quad \left(\frac{q(t_m)}{q_0} \right)^2 = \left(\frac{\alpha_{\max}(t_m)}{\bar{\alpha}} \right)^3. \quad (30)$$

Чтобы точно решить это уравнение (то есть найти момент остановки коромысла t_m) необходимо знать явный вид зависимостей угла поворота и зарядов шариков от времени (то есть опять же решить уравнение (22)). Для оценки времени движения до остановки можно воспользоваться традиционной методикой, описанной в *Подсказке 2*.

Для этого в уравнение (30) следует подставить временные зависимости, соответствующие начальному этапу движения! Такая зависимость для угла поворота получена и задается

функцией (27). Из уравнения (28) следует, что начальный этап разрядки описывается линейным уравнением

$$q(t) = q_0 \left(1 - \frac{t}{\rho \varepsilon \varepsilon_0} \right) = q_0 \left(1 - \frac{t}{T_1} \right). \quad (31)$$

В том же линейном приближении квадрат заряда описывается выражением

$$q^2 = q_0^2 \left(1 - \frac{t}{\rho \varepsilon \varepsilon_0} \right)^2 \approx q_0^2 \left(1 - 2 \frac{t}{T_1} \right). \quad (32)$$

Подстановка этих функций в уравнение (30) приводит к простому линейному уравнению

$$1 - 2 \frac{t_m}{T_1} = 3 \frac{t_m}{T_0}, \quad (33)$$

из которого следует, что остановка произойдет в момент времени

$$t_m = \frac{T_0 T_1}{2T_0 + 3T_1}. \quad (35)$$

Максимальный угол поворота будет достигнут в этот момент времени, его находим с помощью функции (7)

$$\alpha_{\max} = \bar{\alpha} \cdot \sqrt[3]{3 \frac{t_m}{T_0}} = \bar{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\frac{3T_1}{2T_0 + 3T_1}} = \bar{\alpha} \left(1 + \frac{2T_0}{3T_1} \right)^{-1/3} \approx 0,63\bar{\alpha} \approx 7,5^\circ. \quad (36)$$

Дополнение, «не вошедшее в основное собрание сочинений»

Для обоснования предложенной методики оценки максимального угла приведем точное решение данной задачи.

Начнем со строго решения уравнения (22)

$$T_0 \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{\bar{\alpha}^3}{q_0^2} \frac{q^2}{\alpha^2} - \alpha. \quad (д1)$$

Введем безразмерные параметры $x = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}$, $\tau = \frac{t}{T_0}$, а также подставим явное выражение

для заряда шариков $q = q_0 \exp(-\frac{t}{T_1})$. В этих переменных уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\exp(-b\tau)}{x^2} - x, \quad (д2)$$

где обозначено $b = \frac{2T_0}{T_1}$.

Замена $x(\tau) = z(\tau) \cdot \exp(-\tau)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{d\tau} \exp(-\tau) - z \exp(-\tau) = \frac{\exp(-b\tau)}{z^2 \exp(-2\tau)} - z \exp(-\tau) \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\exp(-(b-3)\tau)}{z^2}$$

которое легко интегрируется (с учетом начальных условий при $\tau = 0$ $z = 0$):

$$\int_0^z z^2 dz = \int_0^\tau \exp(-(b-3)\tau) d\tau$$

$$\frac{z^3}{3} = \frac{1 - \exp(-(b-3)\tau)}{(b-3)}$$

$$z(\tau) = \sqrt[3]{3 \frac{1 - \exp(-(b-3)\tau)}{(b-3)}}$$

Теперь находим

$$x(\tau) = z(\tau) \cdot \exp(-\tau) = \sqrt[3]{3 \frac{\exp(-3\tau) - \exp(-b\tau)}{(b-3)}}. \quad (д3)$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} \sqrt[3]{\frac{3T_1}{2T_0 - 3T_1} \left(\exp\left(-3\frac{t}{T_0}\right) - \exp\left(-2\frac{t}{T_1}\right) \right)}. \quad (д3а)$$

При малых τ закон изменения угла имеет вид

$$x(\tau) = \sqrt[3]{3 \frac{\exp(-3\tau) - \exp(-b\tau)}{(b-3)}} \approx \sqrt[3]{3\tau}, \quad (д4)$$

или

$$\alpha = \bar{\alpha} \sqrt[3]{3 \frac{t}{T_0}}, \quad (д4а)$$

что совпадает с (27).

На Рис.Д1 показан график зависимости Угла поворота коромысла от времени, рассчитанный по формуле (д3а): быстрое отклонение к максимальному значению и последующее медленное возвращение к исходному положению.

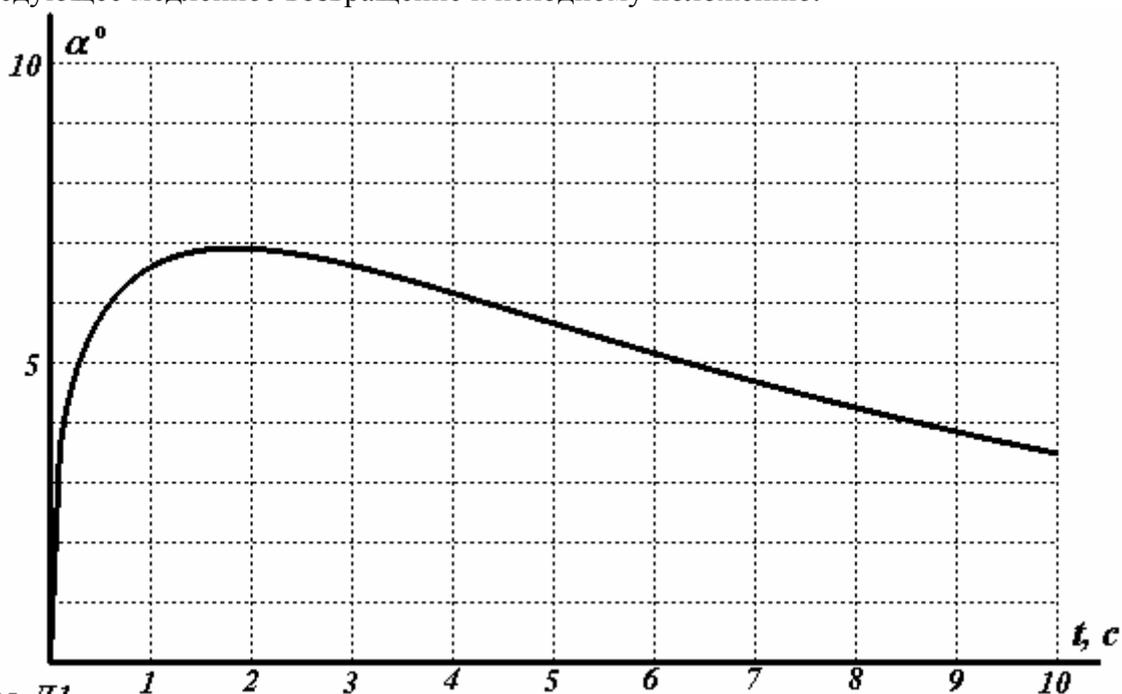


Рис. Д1

На рис. Д2 показан участок этой же функции на меньшем временном интервале, здесь же для сравнения приведен для сравнения (тонкая линия) график приближенного решения, рассчитанный по формуле (27).

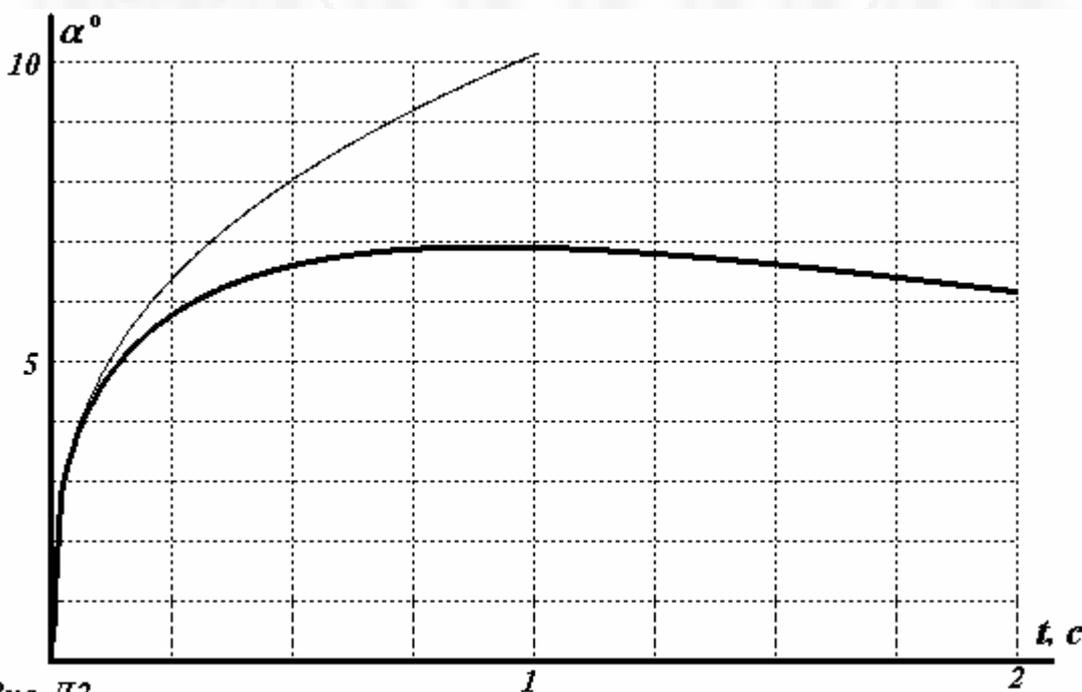


Рис. Д2

Проиллюстрируем графически решение уравнения (30) – условия равенства моментов сил упругости и электрического взаимодействия в момент остановки коромысла. На Рис. Д3 построены графики функций, фигурирующих в этом уравнении: толстые линии соответствуют точному решению, тонкие – использованному в «официальном» решении приближению.

Видно, что значение момента времени t_m определяется со значительной погрешностью, однако требуемое значение максимального угла отклонения рассчитывается достаточно корректно: имеет место своеобразная компенсация погрешностей аппроксимации функций. Кроме того, вблизи экстремума любая функция изменяется медленно, поэтому погрешность аргумента слабо влияет на погрешность определения максимума функции.

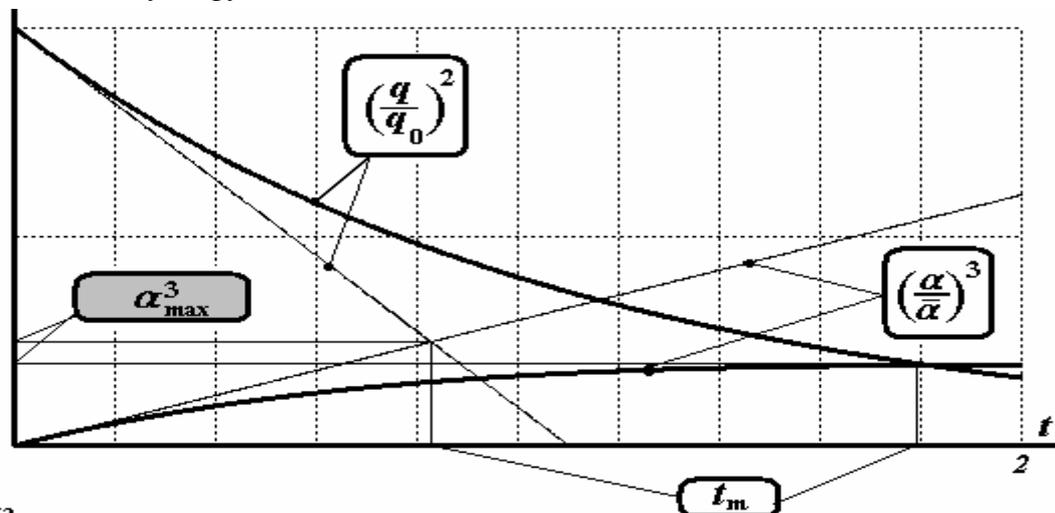


Рис. Д3

В заключение укажем точное значение максимального отклонения коромысла, найденный традиционным методом максимум функции (д3а):

$$\alpha_{\max} = \bar{\alpha} \left(\frac{2}{3} \eta \right)^{-\frac{2\eta}{3(2\eta-3)}}, \quad (д5)$$

где обозначено $\eta = \frac{T_0}{T_1}$ - отношение времени установления равновесия ко времени разрядки. Ранее было получено приближенное значение этой же функции (36), которая выражается через отношение времен в виде

$$\alpha_{\max} = \bar{\alpha} \left(1 + \frac{2}{3} \eta \right)^{-\frac{1}{3}}. \quad (д5а)$$

Графики этих функций показаны на Рис. Д4 (толстая линия – точное решение, тонкая – приближенное): погрешность решения невелика и вполне допустима для данной олимпиадной задачи.

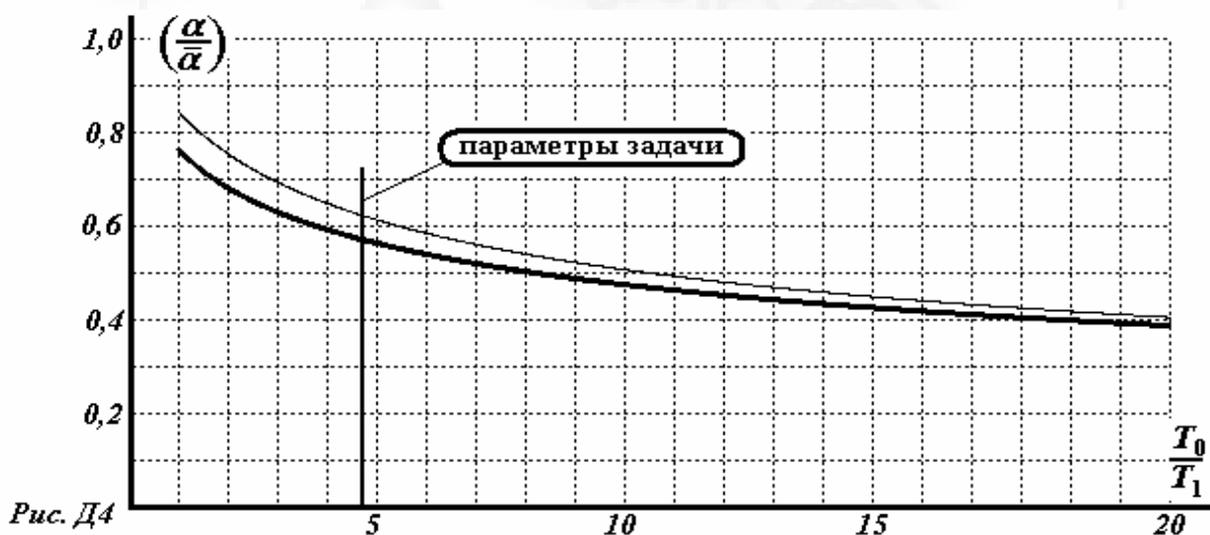


Рис. Д4



*Республиканская физическая
олимпиада (III этап)
2006 год
Теоретический тур*

11 класс.

Сверхпроводящая резина

*Решение
и комментарии*

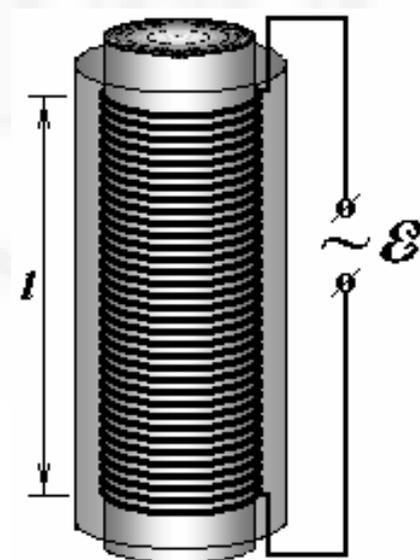


Рис. 6

Решение.

Часть 1. Плотность.

1. Площадь поверхности отрезка трубки равна $S = 2\pi r_0 l_0$. По определению

$$\rho = \frac{m}{S} = \frac{m}{2\pi r_0 l_0} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{2\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 0,119 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}. \quad (1)$$

Часть 2. Упругость, прочность и деформации.

2.1 В данном эксперименте силы упругости направлены вдоль оси трубки, поэтому линейное напряжение сил упругости, возникающей в трубке равно

$$f = \frac{mg}{2\pi r_0}, \quad (2)$$

относительное удлинение материала трубки есть

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3)$$

По этим формулам необходимо рассчитать соответствующие значения по данным **Таблицы 1** условия задачи. Результаты расчетов приведены в таблице 1, на основании которой построен график требуемой зависимости (Рис. 1). На этом же графике нанесена точка разрыва.

Кривая на этом графике проведена «на глаз».

Таблица 1. Зависимость относительного удлинения от линейного напряжения.

$f, \frac{H}{M}$	78,1	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2	78,1	85,9
ε	0,048	0,100	0,148	0,202	0,247	0,285	0,322	0,355	0,368	0,385	0,392

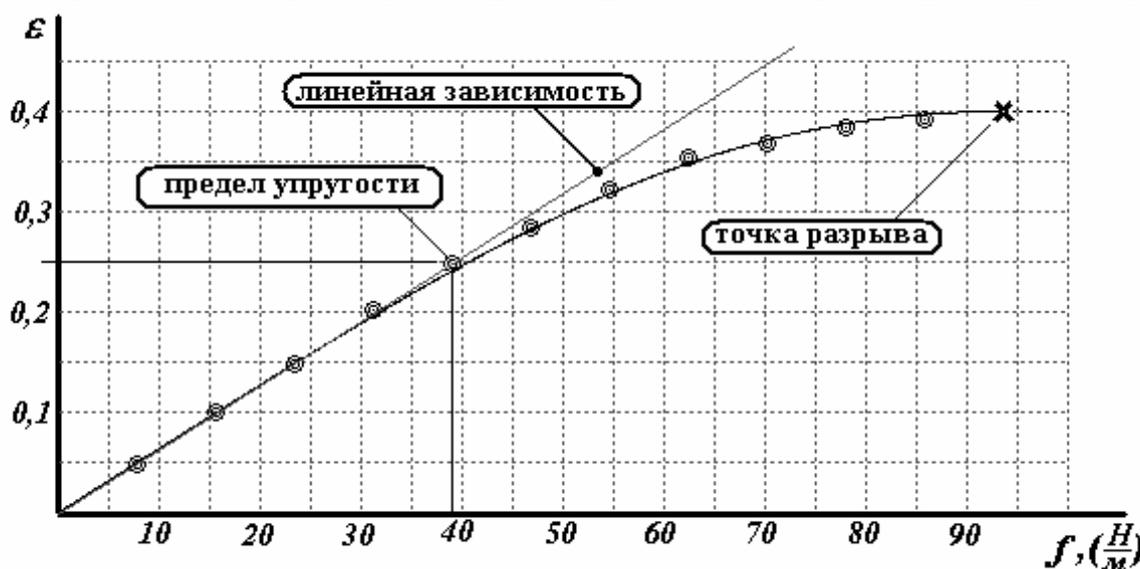


Рис. 1

2.2 По графику видно, что первые точки с хорошей точностью лежат на прямой, что подтверждает справедливость закона Гука в этом диапазоне.

Через эти точки и начало координат проведем прямую и определим коэффициент ее наклона $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f}$. Этот коэффициент можно определить:

- по одной точке (только какую выбрать?);
- по нескольким начальным точкам (по 3-5), с последующим усреднением;
- по графику линейной зависимости;
- по методу наименьших квадратов (МНК) по первым 5 точкам (этот метод наиболее предпочтительный).

Расчет по МНК приводит к результату $\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f} \approx 6,405 \cdot 10^{-3} \frac{М}{Н}$. Следовательно, значение

модуля растяжения равно

$$\gamma = \left(\frac{\Delta \varepsilon}{\Delta f} \right)^{-1} \approx 1,56 \cdot 10^2 \frac{Н}{М} \approx 1,6 \cdot 10^2 \frac{Н}{М} \quad (4)$$

Не смотря на то, что в условии приведены данные с тремя значащими цифрами, имеющийся разброс экспериментальных данных не позволяет получить значение параметра γ с точностью большей двух значащих цифр.

С помощью графика определяем, что первый пять точек лежат близко к линейной зависимости (шестая и последующие точки закономерно отклоняются от нее), поэтому можно оценить границу применимости закона Гука как

$$\varepsilon < 0,25 \quad (5)$$

Часть 3. Давление.

При наличии избыточного давления газа внутри трубка последняя растягивается, увеличивается ее радиус и, следовательно, длина ее окружности. Сила давления газа $\vec{F}_д$ (Рис. 2), действующая на поверхность, направлена по нормали к поверхности, а возникающие силы упругости $\vec{F}_{упр.}$ направлены по касательной к поверхности трубки перпендикулярно ее оси (а не вдоль оси, как в предыдущей части задачи). Относительное удлинение периметра трубки $l = 2\pi r$ в этом случае равно относительному увеличению ее радиуса:

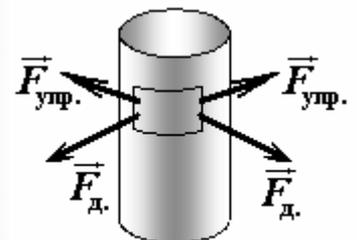


Рис. 2

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta r}{r_0} \quad (6)$$

3.1 Мысленно выделим на деформированной трубке небольшое кольцо, высотой Δz (Рис. 3), а на нем малую площадку ΔS , видимую из центра под малым углом α . Площадь этой площадки равна $\Delta S = r\alpha\Delta z$. Так как площадка находится в равновесии, то сумма сил, действующих на нее, равна нулю. Сила давления газа направлена перпендикулярно выделенной площадке и равна $F_д = \Delta P \Delta S = r\alpha\Delta z \Delta P$. Силы упругости, действующие на боковые стороны выделенной площадки, направлены по касательной к боковой поверхности и равны по модулю $F_{упр.} = f\Delta z$, где f - линейное напряжение стенок.

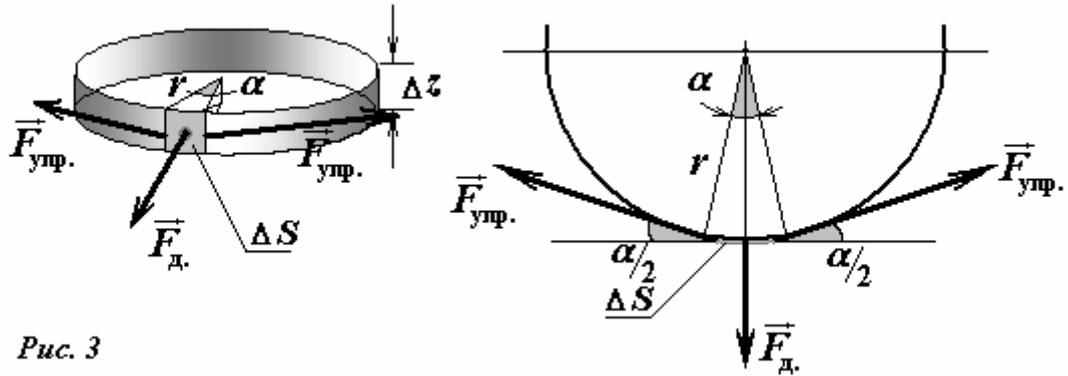


Рис. 3

Запишем условие равновесия выделенной площадки в проекции на нормаль

$$F_{\text{д}} = 2F_{\text{упр.}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Подставим выражения для сил давления и упругости и считая угол α малым (при этом $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$) в это уравнение

$$r\alpha\Delta z\Delta P = 2f\Delta z \frac{\alpha}{2},$$

и после сокращения получаем требуемое уравнение (которое является основой дальнейшего решения):

$$r\Delta P = f \quad (7)$$

Возможны и другие варианты вывода этого уравнения. Например, можно рассмотреть условия равновесия половины кольца (Рис. 4). Тогда сумма сил давления $\Delta P\Delta z \cdot 2r$ уравновешивается двумя силами упругости $F_{\text{упр.}} = f\Delta z$, что также приводит к уравнению (7).

Заметим, что в данном случае можно говорить о давлении сил упругости. Для этого следует выделить на боковой поверхности цилиндра небольшую площадку, найти векторную сумму тангенциальных сил упругости, (которая направлена перпендикулярно к поверхности) и разделить ее на площадь выделенной площадки. Как следует из приведенного решения это давление в данном случае равно $P_{\text{упр.}} = \frac{f}{r}$.

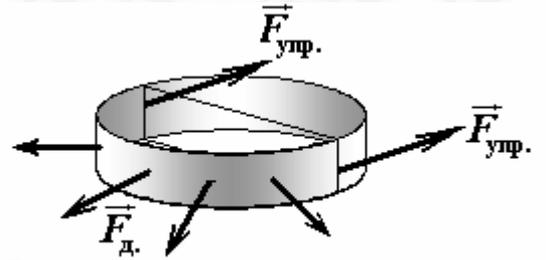


Рис. 4

3.2 Из данных Части 2. определяем, что максимальное относительное удлинение пленки равно

$$\varepsilon_{\text{max}} = \frac{\Delta l_{\text{max}}}{l_0} = \frac{8,00}{20,0} = 0,400, \quad (8)$$

а максимальное линейное напряжение

$$f_{\text{max}} = \frac{m_{\text{max}}g}{2\pi r_0} = \frac{600 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}{2\pi \cdot 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 93,7 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (9)$$

Подставляя эти данные в уравнение (7), получим значение максимального давления, которое может выдержать трубка

$$\Delta P_{\text{max}} = \frac{f_{\text{max}}}{r_{\text{max}}} = \frac{m_{\text{max}}g}{2\pi r_0^2(1 + \varepsilon_{\text{max}})} \approx 6,69 \cdot 10^3 \text{ Па} \quad (10)$$

3.3 Для построения требуемой зависимости следует воспользоваться уравнением (7), в котором линейное напряжение является известной функцией от относительной деформации. Представим также радиус деформированной трубки через ее относительную деформацию $r = r_0(1 + \varepsilon)$. В результате получим уравнение

$$f(\varepsilon) = \Delta P r_0(1 + \varepsilon). \quad (11)$$

В этом уравнении функция $f(\varepsilon)$ задана в виде таблицы 1, или графика (Рис.1), аналитический вид этой зависимости неизвестен. Поэтому уравнение (11) не может быть решено относительно ε аналитически. Если нельзя найти зависимость $\varepsilon(\Delta P)$, то следует попытаться рассчитать обратную зависимость $\Delta P(\varepsilon)$, что можно сделать элементарно из уравнения (11)

$$\Delta P = \frac{f(\varepsilon)}{r_0(1 + \varepsilon)}. \quad (12)$$

с помощью данных таблицы 1. Используя эти данные, следует рассчитать радиус трубки $r = r_0(1 + \varepsilon)$ и по формуле (12) соответствующее давление. Результаты расчетов представлены в Таблице 2, по которым построен график (Рис. 5)

Таблица 2. Зависимость радиуса трубки от избыточного давления внутри нее.

$f, \frac{H}{м}$	78,1	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8	54,6	62,4	70,2	78,1	85,9
ε	0,048	0,100	0,148	0,202	0,247	0,285	0,322	0,355	0,368	0,385	0,392
$\Delta P, кПа$	0,74	1,412	2,04	2,59	3,13	3,64	4,13	4,61	5,13	5,63	6,16
$r, см$	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,29	1,32	1,36	1,37	1,39	1,39

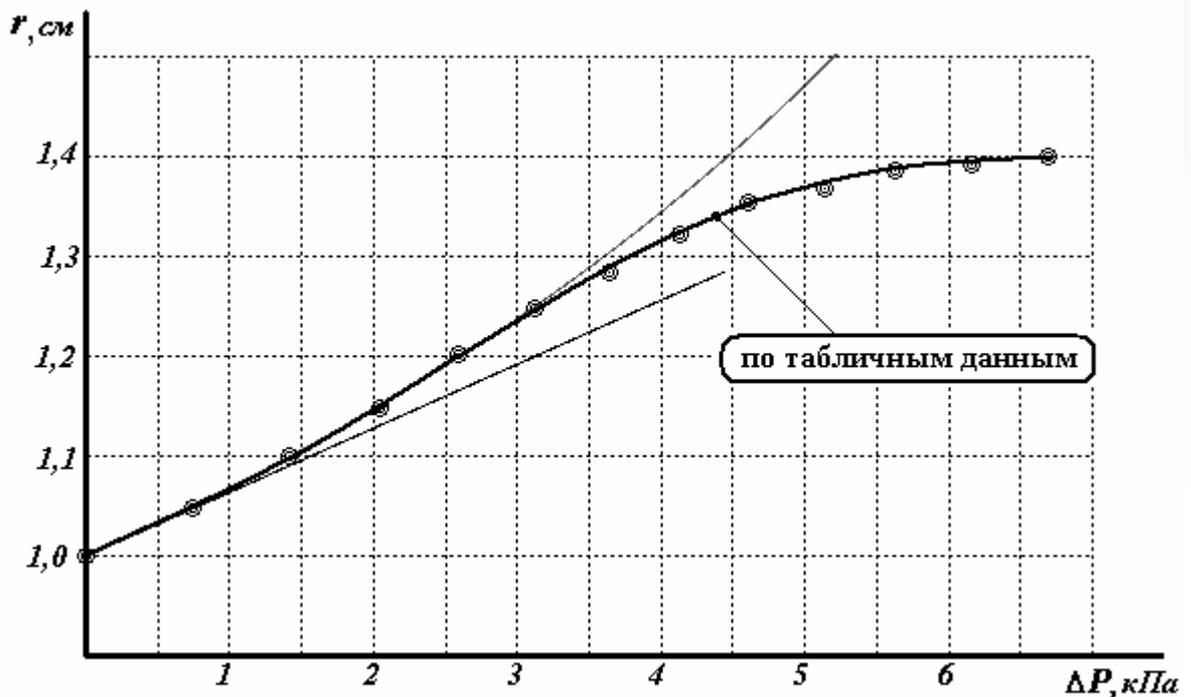
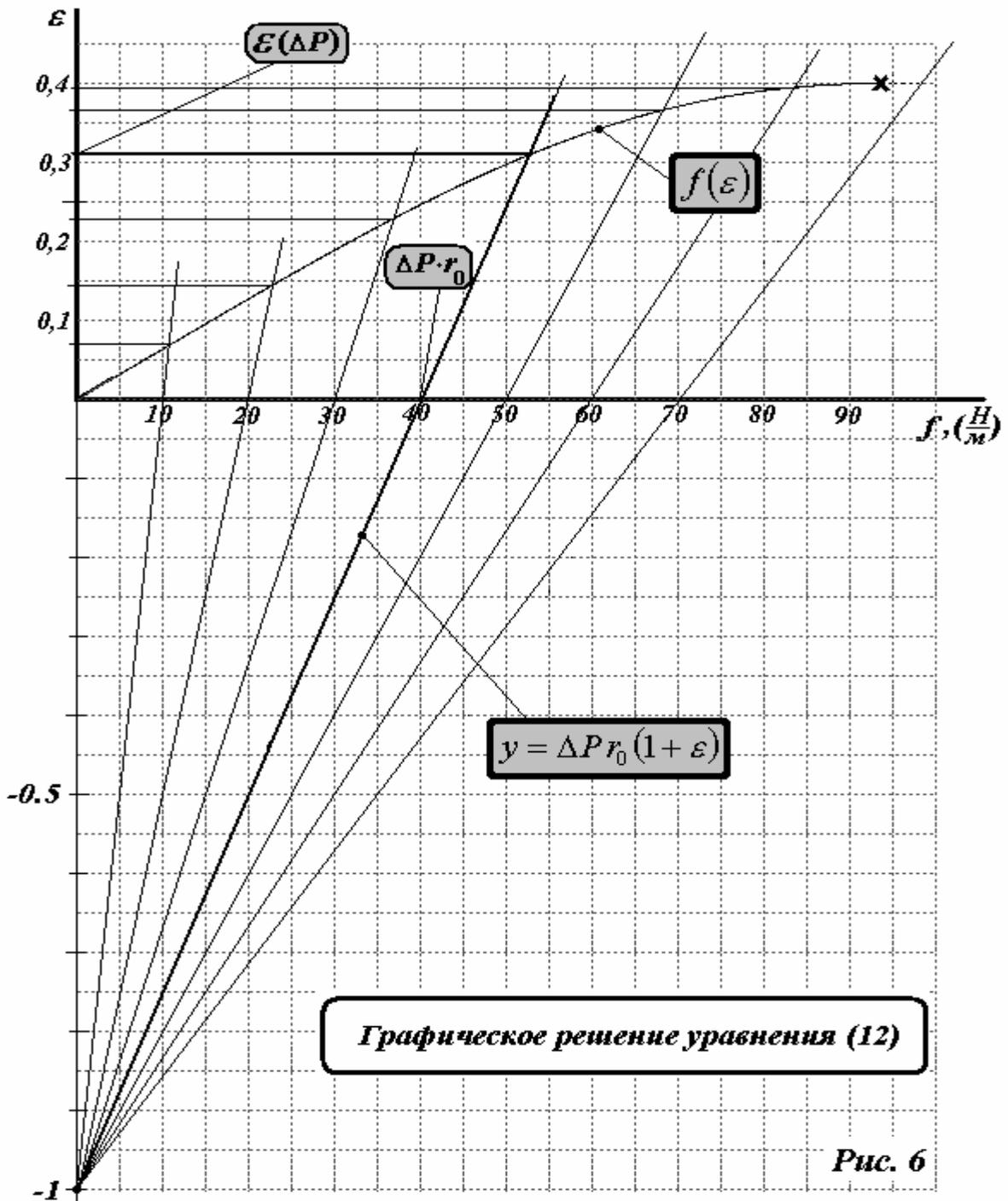


Рис. 5

Уравнение (12) также может быть решено графическим методом. Для этого представим его в виде

$$f(\varepsilon) = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon). \quad (12a)$$

График функции $f(\varepsilon)$ построен ранее, теперь на нем следует провести семейство прямых, описываемых функциями $y = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon)$. Ордината точки пересечения прямой $y = \Delta P r_0 (1 + \varepsilon)$ с графиком функции $f(\varepsilon)$ даст решение уравнения (12a) при заданном значении ΔP . Построение указанных прямых очень просто: все они пересекают вертикальную ось при $\varepsilon = -1$, а горизонтальную при $f = r_0 \Delta P$. Указанное построение приведено на Рис. 6. Естественно, что полученное таким способом решение совпадает с построенным ранее.



3.4.1 В приближении закона Гука, в уравнение (7) необходимо подставить явное выражение для линейного напряжения $f = \gamma\varepsilon = \gamma \frac{r - r_0}{r_0}$:

$$\gamma \frac{r - r_0}{r_0} = \Delta P \cdot r.$$

Из этого уравнения определяем требуемую зависимость

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{\gamma} \Delta P} \quad (13)$$

График этой функции показан на Рис. 5.

3.4.2 Ранее мы установили, что закон Гука справедлив при относительных деформациях меньших $\varepsilon < 0,25$. Эта деформация возникает при избыточном давлении $\Delta P \approx 3 \cdot 10^4 \text{ Па}$, следовательно, приближением закона Гука и следующей из него формулой (13) можно пользоваться при

$$\Delta P \leq 3 \cdot 10^3 \text{ Па} \quad (14)$$

Из графика функции (13) на рис. 5, также следует, что это приближение достаточно точно описывает экспериментальные данные при $r \leq 1,25$, то есть при той же относительной деформации.

3.4.3 Значение радиуса трубки, рассчитанное по формуле (13), стремится к бесконечности, если знаменатель устремляется к нулю, что достигается при максимально возможном давлении, равном

$$(\Delta P)_{\max} = \frac{\gamma}{r_0} \approx \frac{1,56 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 1,6 \cdot 10^4 \text{ Па} \quad (15)$$

Заметим, что это значение больше, рассчитанного ранее по табличным данным. Кроме того, в этом решении причина существования максимального давления иная – при возрастании радиуса трубки возрастающие силы упругости не в состоянии удержать быстрее возрастающие силы давления газа.

3.5.1 Считая избыточное давление малым, используем приближенную формулу для упрощения функции (13)

$$r = \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{\gamma} \Delta P} \approx r_0 \left(1 + \frac{r_0}{\gamma} \Delta P + \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right)^2 \right).$$

Из этого выражения получим формулу для определения изменения радиуса трубки

$$\Delta r = r_0 \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P + \left(\frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right)^2 \right) = \frac{r_0^2}{\gamma} \Delta P \left(1 + \frac{r_0}{\gamma} \Delta P \right). \quad (15)$$

Пренебрегая вторым слагаемым, получаем линейную зависимость между изменением радиуса и избыточным давлением

$$\Delta r = \frac{r_0^2}{\gamma} \Delta P \quad (16)$$

3.5.2 Значение коэффициента пропорциональности в этой формуле равно

$$C = \frac{r_0^2}{\gamma} \approx \frac{(1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м})^2}{1,56 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}} \approx 6,4 \cdot 10^{-7} \text{ м} \cdot \text{Па}^{-1} \quad (17)$$

График линейной функции (16) с найденным коэффициентом также показан на рис. 5.

3.5.3 Второе слагаемое в формуле (15), которое было опущено, может служить оценкой погрешности формулы (16). Таким образом, относительная погрешность η линейного приближения равна

$$\eta = \frac{r_0}{\gamma} \Delta P.$$

Следовательно, погрешность формулы (16) не будет превышать установленный предел при

$$\Delta P \leq \eta \frac{\gamma}{r_0} = 0,05 \frac{1,6 \cdot 10^2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{1,0 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 8 \cdot 10^2 \text{ Па} \quad (18)$$

Часть 4. Электрические свойства пленки.

4.1 Используя приведенную формулу для сопротивления и закон Ома

$$U_0 = I_0 R = I_0 \frac{l_0}{\lambda 2\pi r_0},$$

получим значение удельного сопротивления пленки

$$\lambda = \frac{I_0 l_0}{2\pi r_0 U_0} = \frac{2,00 \text{ А} \cdot 0,200 \text{ м}}{2\pi \cdot 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ В}} \approx 2,55 \cdot 10^3 \text{ Ом}^{-1} \quad (19)$$

4.2 Пусть поверхностная плотность зарядов на обкладках конденсатора равна σ . Тогда напряженность электрического поля в конденсаторе равна $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, причем напряженность

поля, создаваемого только одной обкладкой, в два раза меньше $E' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Следовательно,

сила, действующая на единицу площади обкладки (т.е. давление электрического поля) равна

$$P_{эл.} = \sigma E' = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (20)$$

и совпадает с объемной плотностью энергии поля.

4.2.1 Для дальнейшего решения задачи можно воспользоваться уравнением (7), в котором роль избыточного давления будет играть сила давления электрического поля.

Заметим, что электрические силы, действуя снаружи от трубки, но стремятся ее растянуть, как избыточное давление газа внутри нее, поэтому указанная замена допустима.

Далее, обратим внимание, что максимально возможная деформация трубки (ограниченная внешним металлическим цилиндром) составляет 10%, поэтому для вычисления линейного механического напряжения стенок трубки можно пользоваться законом Гука.

Так как конденсатор подключен к источнику, то напряжение на обкладках остается постоянным при изменении расстояния между трубками. Выразим напряженность электрического поля внутри конденсатора через напряжение источника

$$E = \frac{U_0}{R - r} = \frac{U_0}{R - (r_0 + \Delta r)} = \frac{U_0}{h - \Delta r}, \quad (21)$$

(здесь R - внутренний радиус металлической трубки). Таким образом, давление поля выражается формулой

$$P_{эл.} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - \Delta r} \right)^2. \quad (22)$$

Наконец, запишем уравнение, связывающее увеличение радиуса трубки с приложенным напряжением (которое будет являться основой дальнейшего решения):

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - \Delta r} \right)^2 = \gamma \frac{\Delta r}{r_0} \frac{1}{r_0 + \Delta r}. \quad (22)$$

В этом уравнении слева стоит давление электрического поля, справа – уравновешивающее его давление сил упругости. Уравнение (22) можно привести к алгебраическому уравнению третьей степени, поэтому сначала необходимо проанализировать его решение, а затем провести возможные упрощения (основанные на разумных и обоснованных приближениях). Для этого выразим увеличение радиуса трубки через относительную деформацию $\Delta r = r_0 x$ и подставим в уравнение (22)

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h - r_0 x} \right)^2 = \gamma \frac{r_0 x}{r_0} \frac{1}{r_0 + r_0 x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{h} x\right)^2} = \frac{x}{1 + x}$$

Обозначим безразмерные величины, рассчитаем их численные значения (все величины представлены в системе СИ)

$$A_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (1,0 \cdot 10^3)^2 (1,0 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^2} \frac{1}{1,56 \cdot 10^2} \approx 2,84 \cdot 10^{-4},$$

$$\beta = \frac{r_0}{h} \approx 10,$$

и получим «безразмерное» уравнение

$$\frac{A_0}{(1 - \beta x)^2} = \frac{x}{1 + x}. \quad (23)$$

В этом уравнении A_0 является малой величиной, поэтому и его решение x также мало, поэтому попытаемся пренебречь малыми величинами x и βx в знаменателях этого уравнения. Тогда решение этого уравнения

$$x \approx A_0 = \frac{\varepsilon_0 U_0^2}{2h^2} \frac{r_0}{\gamma} \approx 2,84 \cdot 10^{-4} \quad (24)$$

Малость полученного значения полностью оправдывает сделанное приближение.

К этому же решению можно подойти другими способами. Так, сразу рассчитав давление электрического поля при отсутствии деформации,

$$P_{эл.} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (1,0 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot (1,0 \cdot 10^{-3})^2} \approx 4,4 \text{ Па},$$

видим, что оно крайне мало (ранее были тысячи паскалей), поэтому и деформация будет малой.

Следовательно, при расчете электрического взаимодействия и сил упругости им можно пренебречь и записать уравнение (22) в виде

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 = \gamma \frac{\Delta r}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0}, \quad (22a)$$

из которого сразу следует (24).

4.2.2 Причиной возможного выхода конденсатора из строя может служить короткое замыкание, которой произойдет, если растягивающаяся трубка прикоснется к внешнему цилиндру, то есть когда относительная деформация станет равной $x = \frac{h}{r_0} \approx 0,10$.

Непосредственная подстановка этого значения в уравнение (23) невозможно, так при этом знаменатель обращается в нуль. Для анализа поведения полимерной трубки при увеличении напряжения построим примерные графики зависимостей электрического и упругого давлений от относительной деформации в интересующем диапазоне $0 \leq x \leq \frac{1}{\beta} = 0,10$. Это проще сделать для «безразмерных» функций (Рис. 7):

$$P_{\text{эл.}} = \frac{A}{(1 - \beta x)^2}; \quad P_{\text{упр.}} = \frac{x}{1 + x}. \quad (25)$$

Введенный здесь параметр $A = \frac{\varepsilon_0 U^2 r_0}{2h^2 \gamma}$ зависит от приложенного к конденсатору напряжения U .

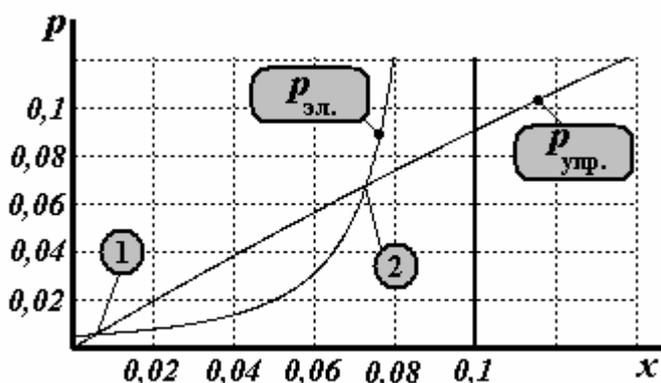


Рис. 7

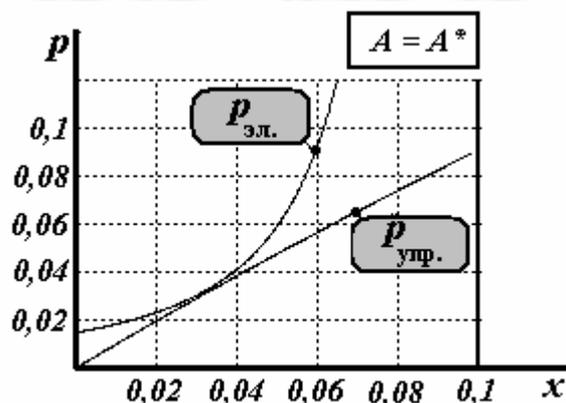


Рис. 8

При малых значениях параметра A в интересующем нас интервале $0 < x < 0,1$ эти графики имеют две точки пересечения, следовательно, уравнение (23) имеет два корня! Легко показать, что первый (найденный нами) соответствует устойчивому положению трубки, второй – неустойчивому. Ясно, что при увеличении напряжения от нуля будет реализовываться именно первое, устойчивое положение равновесия (так оно ближе к нулю). С ростом напряжения источника (и соответствующего возрастания параметра A) кривая зависимости электрического давления будет приподниматься и, наконец, при некотором критическом значении A^* эти кривые будут иметь единственную общую точку, точку касания. Именно при этом условии конденсатор потеряет устойчивость. Критическое значение A^* может быть найдено различными способами. Рассмотрим самый простой (по нашему мнению) из них. Заметим, что в рассматриваемом диапазоне кривую упругого давления с высокой точностью можно заменить на прямую

$$P_{\text{упр.}} = \frac{x}{1 + x} \approx x.$$

С учетом этого, перепишем уравнение (23) в виде

$$A = x(1 - \beta x)^2. \quad (26)$$

Понятно, что это равносильное (23) уравнение не будет иметь корней, если значение параметра A превышает максимум функции $y = x(1 - \beta x)^2$. Производная этой функции

$$y' = (1 - \beta x)^2 - 2\beta x(1 - \beta x) = (1 - \beta x)(1 - 3\beta x)$$

обращается в нуль при $\beta x^* = \frac{1}{3}$, (значению $\beta x^* = 1$ соответствует точка разрыва функции). Таким образом, максимальное значение этой функции и критическое значение параметра найдем, подставив это значение в формулу (26)

$$A^* = \frac{1}{3\beta} \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4h}{27r_0}.$$

Используя выражение для введенного параметра, получаем $\frac{\epsilon_0 U^2 r_0}{2h^2 \gamma} = \frac{4h}{27r_0}$,

откуда следует, что критическое напряжение равно

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{8h^3 \gamma}{27r_0^2 \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{8(1,0 \cdot 10^{-3})^3 \cdot 1,56 \cdot 10^2}{27(1,0 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} \approx 7,2 \cdot 10^3 \text{ В} \quad (26)$$

Обратите внимание, при напряжении в 1 кВ деформация трубки фактически пренебрежимо мала, а при напряжении 7 кВ – в конденсатор происходит короткое замыкание. Надо признать – не очень надежное устройство изобретено.

Для окончательного подтверждения точности полученного решения построим график функции (26) Рис.8 – сплошная линия. Пунктиром построена точная функция $A = (1 - \beta x)^2 \frac{x}{1 + x}$ (без сделанного приближения об упругом давлении).

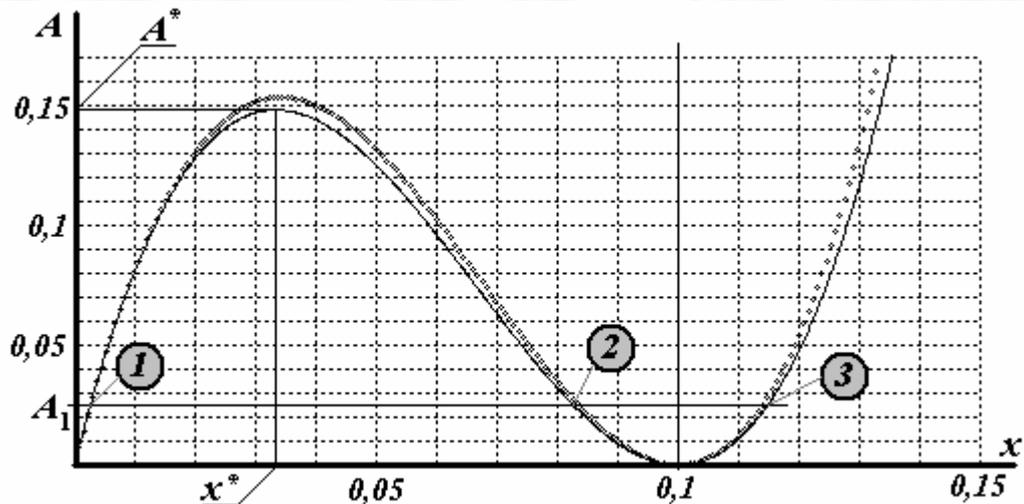


Рис. 9

Видно, что эти функции различаются незначительно. Так, в районе найденного максимума различия в этих функциях оценим из разложения

$$A = (1 - \beta x)^2 \frac{x}{1 + x} \approx x(1 - \beta x)^2 \cdot (1 - x),$$

из которого следует, что относительная ошибка нашего приближения составляет величину

$$\frac{\delta A^*}{A^*} \approx x = \frac{4}{27\beta} \approx 0,015 \text{ (всего полтора процента), что приводит к ошибке в определении}$$

максимально напряжения (с учетом $U \sim \sqrt{A^*}$) в два раза меньшей, то есть порядка 0,8%. Такая точность не обеспечивается точностью исходных данных, поэтому является излишней. Обратите внимание, что при малых x график этой функции линеен, что подтверждает допустимость сделанных приближений при определении деформации по формуле (24).

Отметим, что с помощью графика на Рис.8 можно решать и исходное уравнение (23). Его корням соответствуют точки пересечения графика этой функции с горизонтальной прямой (для наглядности значение параметра A завышено по сравнению с решением в предыдущем разделе задачи). Кроме того, видно, что это уравнение имеет целых три корня, как и положено уравнению третьей степени! Причины появления этого корня установите самостоятельно, нас же он не интересует, так как всегда выходит за пределы интересующего нас интервала.

Часть 5. Магнитное воздействие.

5.1 При протекании переменного электрического тока по обмотке соленоида, внутри него возникает переменное магнитное поле, которое индуцирует ЭДС как в обмотке соленоида (самоиндукция), так и в проводящей полимерной оболочке. Индуцированный в оболочке электрический ток – круговой и протекает по ее поверхности перпендикулярно оси (Рис. 10). Этот ток будет оказывать аналогичное обратное влияние на ток в обмотке. Так как внутри системы имеется сердечник с большой магнитной проницаемостью, то магнитным потоком в узком пространстве между обмоткой и оболочкой можно пренебречь.

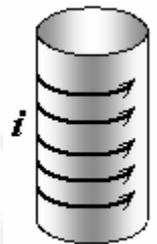


Рис. 10

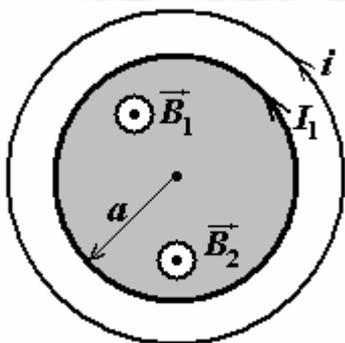


Рис. 11

Индукция магнитного поля в сердечнике B_1 , создаваемого током в обмотке I_1 , рассчитывается по известной формуле

$$B_1 = \mu\mu_0 n I_1. \quad (27)$$

Заметим, что произведение $nI = i$ представляет собой поверхностную плотность тока в обмотке, поэтому эта же формула справедлива и для расчета индукции поля, создаваемого током в оболочке

$$B_2 = \mu\mu_0 i. \quad (28)$$

Положительным направлением токов будем считать направление «против часовой стрелки» (Рис. 11), тогда положительное направление вектора индукции определяется по правилу буравчика.

На рисунке указаны положительные направления токов и векторов индукции, хотя реально направления токов в обмотке и оболочке противоположны, их «правильные» направления автоматически появятся при правильной записи уравнений, описывающих эти токи.

Магнитный поток через поперечное сечение рассматриваемой системы запишем в виде

$$\Phi = \pi a^2 (B_1 + B_2) = \pi a^2 \mu\mu_0 (n I_1 + i). \quad (29)$$

Преобразуем это выражение, для чего заметим, что величина

$$\pi a^2 \mu\mu_0 n N = L \quad (30)$$

(где $N = n l$ - число витков обмотки) является индуктивностью соленоида (в отсутствии оболочки), так как она может быть представлена в виде $L = \frac{N \Phi_1}{I_1}$, Φ_1 - поток через один виток магнитного поля, создаваемого током I_1 в обмотке. Электрический ток в полимерной оболочке равномерно распределен по ее поверхности. Поэтому можно

записать выражение для суммарного тока $I_2 = il$, текущего по оболочке. Второе слагаемое в этом случае имеет вид

$$\pi a^2 \mu \mu_0 i = \pi a^2 \mu \mu_0 \frac{I_2}{l} = \pi a^2 \mu \mu_0 \frac{nN}{nNl} I_2 = \frac{L}{N^2} I_2 \quad (31)$$

Окончательно, магнитный поток записывается в виде

$$\Phi = \frac{L}{N} I_1 + \frac{L}{N^2} I_2. \quad (32)$$

Возникающая при изменении магнитного потока ЭДС индукции одинакова в одном витке обмотки и оболочке и равна

$$E_{ind} = -\Phi' \quad (33)$$

Так как активным сопротивлением контура, состоящим из источника и обмоткой соленоида можно пренебречь, то для него сумма ЭДС источника и индукции во всех витках соленоидов равна нулю, поэтому

$$E_{ист.} - N\Phi' = 0. \quad (34)$$

Запишем уравнение суммарного тока $I_2 = il$, текущего по оболочке. Общее сопротивление оболочки при указанном протекании тока равно (по сравнению с предыдущим продольным протеканием, «длина» и «ширина» поменялись местами):

$$R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r_0}{l}. \quad (35)$$

Предположим пока, что сопротивление кольца не зависит от его деформации.

Для суммарного тока справедлив закон Ома для полной цепи $I_2 R = E_{ind}$, или

$$I_2 R = -\Phi' \quad (36)$$

Уравнения (34) и (36) образуют систему, описывающую изменения токов в обмотке и оболочке. Подставив в нее выражение для потока, получим эту систему в явном виде

$$\begin{cases} E_{ист.} - L \left(I_1 + \frac{1}{N} I_2 \right)' = 0 \\ I_2 R = -\frac{L}{N} \left(I_1 + \frac{1}{N} I_2 \right)' \end{cases} \quad (37)$$

1. Без введения обозначений для индуктивности и сопротивления оболочки эта же система будет выглядеть более громоздко.

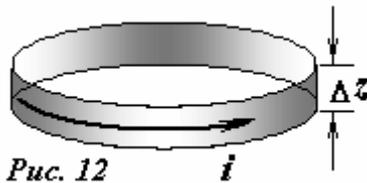


Рис. 12

Выделим тонкое кольцо толщиной Δz (Рис. 12). Сила тока, протекающая по этому кольцу равна $\delta I_2 = i \Delta z$, а его сопротивление равно $R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r_0}{\Delta z}$. Закон Ома для выделенного кольца имеет вид

$$E_{ind} = \delta I_2 R = \frac{2\pi r_0}{\lambda} i.$$

Таким образом, получаем систему, описывающих изменения токов:

$$\begin{cases} E_{ист.} - N\pi a^2 \mu \mu_0 (nI_1 + i)' = 0 \\ \frac{2\pi r_0}{\lambda} i = -\pi a^2 \mu \mu_0 (nI_1 + i)' \end{cases}.$$

2. Фактически рассматриваемое устройство является трансформатором: первичная обмотка содержит N витков и пренебрежимо малое сопротивление, ее индуктивность равна L ; вторичная обмотка состоит из одного витка, сопротивление вторичной цепи есть

сопротивление оболочки и равно R , ее индуктивность $L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{\mu\mu_0 \frac{I_2}{l} \pi a^2}{I_2} = \frac{\mu\mu_0 \pi a^2}{l}$

связана с индуктивностью обмотки соотношением $L_2 = \frac{\mu\mu_0 \pi a^2}{l} = \frac{\mu\mu_0 \pi a^2}{l} \cdot \frac{nN}{nN} = \frac{L}{N^2}$.

Наконец коэффициент взаимной индукции $L_{12} = L_{21} = \frac{L}{N}$. Полученная система уравнений есть система уравнений, описывающих трансформатор.

5.2 Решим систему уравнений (37). Запишем зависимость ЭДС источника от времени в виде $E_{ист.} = -U_0 \cos \omega t$. Выражая производную из второго уравнения и подставляя ее в первое, получим

$$I_2 RN = -U_0 \cos \omega t.$$

Таким образом, сила тока в обмотке описывается функцией

$$I_2 = -\frac{U_0}{RN} \cos \omega t. \quad (38)$$

Из первого уравнения систему выразим

$$LI_1' = U_0 \cos \omega t - \frac{L}{N} I_2'.$$

Представим силу тока в обмотке как

$$I_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

и его подставим в уравнение вместе с выражением (38) для тока в оболочке:

$$-AL\omega \sin \omega t + BL\omega \cos \omega t = U_0 \cos \omega t - \frac{L}{N} \frac{U_0}{NR} \omega \sin \omega t.$$

Из условия равенства коэффициентов при тригонометрических функций находим:

$$A = \frac{U_0}{N^2 R}, \quad B = \frac{U_0}{L\omega}.$$

Окончательно зависимость силы тока в обмотке от времени имеет вид

$$I_2 = \frac{U_0}{N^2 R} \cos \omega t + \frac{U_0}{L\omega} \sin \omega t. \quad (39)$$

Амплитудное значение силы этого тока равно

$$I_{20} = \sqrt{A^2 + B^2} = U_0 \sqrt{\frac{1}{(N^2 R)^2} + \frac{1}{(L\omega)^2}}. \quad (40)$$

Проведем численные расчеты параметров изучаемого устройства:

сопротивление оболочки: $R = \frac{1}{\lambda} \frac{2\pi r_0}{l} = \frac{2\pi \cdot 1,0 \cdot 10^{-2}}{2,55 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} \approx 1,23 \cdot 10^{-4} \text{ Ом};$

число витков обмотки: $N = nl = 200;$

индуктивность оболочки:

$$L = \pi a^2 \mu\mu_0 nN = \pi (0,90 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot 200 \approx 63,9 \cdot 10^{-3} \text{ Гн};$$

круговая частота тока: $\omega = 2\pi\nu \approx 314 \text{ с}^{-1}.$

Теперь вычислим характеристики токов:

- амплитудное значение силы тока в оболочке

$$I_{20} = \frac{U_0}{RN} = \frac{36}{1,23 \cdot 10^{-4} \cdot 200} \approx 1,46 \cdot 10^3 \text{ А}.$$

- требуемое значение амплитуды поверхностной плотности тока в оболочке

$$i_0 = \frac{I_{20}}{l} = \frac{U_0}{RNl} \approx 7,3 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{м}^{-1} \quad (41)$$

- амплитудное значение силы тока в соленоиде

$$I_{20} = U_0 \sqrt{\frac{1}{(N^2 R)^2} + \frac{1}{(L\omega)^2}} = 36 \sqrt{\frac{1}{(200^2 \cdot 1,23 \cdot 10^{-4})^2} + \frac{1}{(63,9 \cdot 10^{-3} \cdot 314)^2}} \approx 7,5 \text{ A} \quad (42)$$

Высокие значения полученных значений токов являются следствием малого сопротивления оболочки, которая, как было отмечено выше, является вторичным контуром трансформатора.

5.3 Полученные зависимости токов от времени позволяют легко найти энергетические характеристики рассматриваемых процессов. Средняя мощность¹ теплоты, выделяющейся в оболочке, рассчитывается по закону Джоуля-Ленца (с усреднением по времени, которое обозначается угловыми скобками)

$$P_{\text{менл.}} = \langle I_2^2 R \rangle = \left\langle \left(\frac{U_0}{RN} \cos \omega t \right)^2 R \right\rangle = \frac{U_0^2}{RN^2} \langle \cos^2 \omega t \rangle$$

Так как $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, то окончательный результат:

$$P_{\text{менл.}} = \frac{U_0^2}{2RN^2} \approx 1,3 \cdot 10^2 \text{ Вт} \quad (43)$$

Мощность, потребляемая от источника, также легко рассчитывается

$$P_{\text{учт.}} = \langle E_{\text{учт.}} I_1 \rangle = \left\langle U_0 \cos \omega t \left(\frac{U_0}{N^2 R} \cos \omega t + \frac{U_0}{L\omega} \sin \omega t \right) \right\rangle = \frac{U_0^2}{N^2 R}, \quad (44)$$

и, конечно, совпадает с мощностью теплоты, выделяющейся в оболочке. При выводе формулы (44) учтено, что $\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle = 0$.

5.4. Электрический ток поверхностной плотности i , протекающий по оболочке, взаимодействует с магнитным полем, в результате чего появляются силы, растягивающие оболочку. При расчете этой силы необходимо учесть, что на оболочку действует только магнитное поле, создаваемое током в самой оболочке в пространстве между обмоткой и оболочкой (где нет сердечника), поэтому величина индукции этого поля равна $B_0 = \mu_0 i$. Расчет давления магнитного поля полностью аналогичен расчету давления электрического поля. Чтобы найти давление магнитного поля на поверхность оболочки, выделим на ее поверхности малую площадку (Рис. 13) со сторонами Δz (перпендикулярную направлению тока) и Δl (по направлению тока). Сила тока, пересекающая площадку, равна $\delta I = i \Delta z$. Сила Ампера, действующая на эту площадку, равна

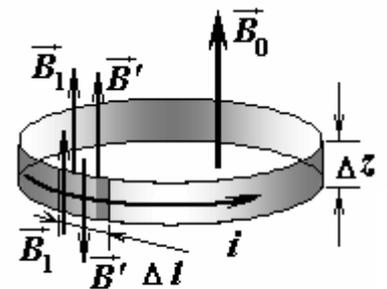


Рис. 13

¹ В этом разделе P - означает мощность, а не давление! Во-первых, это традиционное обозначение, во-вторых, здесь не рассматривается давление, в-третьих, уже других букв не хватает.

$$\Delta F = \delta I B_1 \Delta l = i B_1 \delta l \Delta z = i B_1 \Delta S, \quad (45)$$

(где ΔS - площадь выделенной площадки) и направлена перпендикулярно ей. Далее необходимо учесть, что в этой формуле B_1 - индукция поля, создаваемого всеми токами, кроме токов самой площадки. В непосредственной близости от площадки с внутренней стороны суммарное поле индукции $B_0 = \mu_0 i$ является суммой полей создаваемой токами на площадке \vec{B}' и интересующего нас поля всех остальных токов \vec{B}_1 , поэтому $B_1 + B' = B_0$. С наружной стороны площадки векторы \vec{B}' и \vec{B}_1 противоположны и суммарное поле в этой области отсутствует, поэтому здесь $B_1 - B' = 0$. Таким образом, как и в электростатике, поле, действующее на площадку, в два раза меньше суммарного поля $B_1 = \frac{1}{2} B_0$. Теперь с помощью формулы (45) и полученного результата, определяем

давление магнитного поля

$$P_{\text{маг.}} = \frac{F}{\Delta S} = i B_1 = \frac{1}{2} i B_0 = \frac{\mu_0 i^2}{2}. \quad (46)$$

Таким образом, давление магнитного поля на оболочку пропорционально квадрату поверхностной плотности тока. Отметим, что при переменной силе (как в данном случае) строгий расчет смещения требует решения динамических уравнений, то уравнений второго закона Ньютона $ma = F$ (где F - сумма сил действующих на тело). Если же масса тела пренебрежимо мала, то динамическое уравнение переходит в уравнение статического равновесия. Таким образом, в данном случае для расчета деформации можно пользоваться полученными ранее, формулами для статического случая.

Используя рассчитанное ранее значение амплитуды поверхностной плотности тока, рассчитаем максимальное давление поля на оболочку

$$P_{\text{max}} = \frac{\mu_0 i_0^2}{2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (7,3 \cdot 10^3)^2}{2} \approx 33 \text{ Па}. \quad (47)$$

Это давление мало настолько, что для расчета увеличения радиуса можно пользоваться линейным приближением, то есть по формуле (16) из которой следует, что максимальное увеличение радиуса трубки в данном случае равно

$$\Delta r_{\text{max}} = \frac{r_0^2}{\gamma} P_{\text{max}} = \frac{(1,0 \cdot 10^{-2})^2}{1,56 \cdot 10^2} \cdot 33,5 \approx 2,1 \cdot 10^{-5} \text{ м} \quad (48)$$

5.5 Причина возникновения звука в описанной ситуации понятна: под действием переменной силы со стороны переменного магнитного поля оболочка начинает вибрировать и издавать звук. Очевидно, что громкость звука будет максимальна при максимальной амплитуде колебаний оболочки. В проведенном выше расчете давления отсутствует зависимость максимального давления от частоты тока (см. формулы (46) и (41)). Однако оболочка обладает массой (и упругостью), поэтому она способна совершать свободные колебания с некоторой собственной частотой. Поэтому сейчас мы должны рассмотреть движение оболочки как вынужденные колебания. Хорошо известно, что максимальная амплитуда колебаний достигается в условиях резонанса, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебаний системы. Таким образом, сейчас нам необходимо найти собственную частоту колебаний системы. Очередной раз выделим на поверхности трубки малую площадку площадью ΔS (Рис. 14), масса которой равна $\Delta m = \rho \Delta S$. При

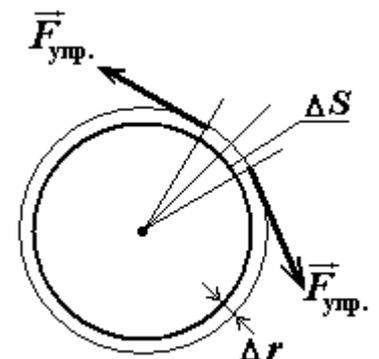


Рис. 14

смещении этой площадки на величину $\Delta r(t)$ (которая сейчас рассматривается как функция времени) на нее будет действовать возвращающая сила упругости. Величину этой силы мы можем выразить из приближенной формулы (16): эта формула получена из условия равенства сила давления и силу упругости, поэтому в этой формуле $\Delta P = \frac{\gamma}{r_0^2} \Delta r$ равно давлению сил упругости. Таким образом, возвращающая сила может быть записана в виде

$$F = \Delta S \Delta P = \Delta S \frac{\gamma}{r_0^2} \Delta r. \quad (49)$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление

$$\rho \Delta S a = -\Delta S \frac{\gamma}{r_0^2} \Delta r, \quad (50)$$

где a - ускорение площадки, которое, очевидно, равно второй производной от увеличения радиуса $a = (\Delta r)''$. Теперь уравнение (50) приобретает знакомый вид

$$(\Delta r)'' = -\frac{\gamma}{r_0^2 \rho} \Delta r, \quad (51)$$

уравнения гармонических колебаний с частотой

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{r_0^2 \rho}}.$$

Наконец, вспомним, что давление, действующее на поверхность трубки пропорционально квадрату силы тока, следовательно, частота изменения давления в два раза больше частоты тока. Итак, резонанс (и его следствия – максимальная амплитуда и максимальная громкость) наступит, когда частота тока будет в два раза меньше частоты собственных колебаний трубки, то есть при

$$\nu = \frac{\nu_0}{2} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\gamma}{r_0^2 \rho}} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{1,56 \cdot 10^2}{(1,0 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0,119}} \approx 2,9 \cdot 10^2 \text{ Гц} \quad (52)$$

Часть 6. Сверхпроводимость.

Качественно обсудим, какие физические процессы будут происходить в данном эксперименте. При подключении катушки к источнику в оболочке будут индуцироваться электрические токи, но, так как пластик обладает электрическим сопротивлением, эти токи быстро затухнут. При охлаждении трубки и переходе ее в сверхпроводящее состояние в постоянном магнитном поле токи в ней не появятся. При извлечении соленоида с током из трубки магнитный поток поля соленоида через поперечное сечение трубки будет уменьшаться, что приведет к возникновению незатухающего тока по поверхности трубки. Эти токи создадут магнитное поле, которое, взаимодействуя с током, приведет к расширению трубки. Таким образом, нам необходимо найти поверхностную плотность токов, индуцированных в сверхпроводящей трубке после полного извлечения соленоида.

Рассмотрим проводящий контур, находящийся в магнитном поле (Рис.15). При изменении магнитного потока внешнего поля в контуре возник электрический ток, магнитное поле которого будет препятствовать изменению потока внешнего поля. Для тока в контуре можно записать уравнение закона Ома для полной цепи

$$IR = -\Phi'_0 - \Phi'_1, \quad (53)$$

где Φ_0 - магнитный поток внешнего поля; $(-\Phi'_0)$ - (производная от этого потока, взятая с обратным знаком) ЭДС индукции, возникающая при изменении потока внешнего поля, аналогично, $(-\Phi'_1)$ - ЭДС самоиндукции, возникающая при изменении поля, созданного током в контуре. Если контур сверхпроводящий, то из уравнения (53) следует

$$0 = -\Phi'_0 - \Phi'_1 = -(\Phi_0 + \Phi_1)',$$

то есть **суммарный магнитный поток через сверхпроводящий контур остается неизменным²**.

Воспользуемся этим утверждением для решения поставленной задачи. Когда соленоид с протекающим током I_0 находится внутри трубки, магнитный поток через любое поперечное сечение равен

$$\Phi_0 = \mu\mu_0 n I_0 \pi a^2, \quad (54)$$

после извлечения соленоида этот же магнитный поток создается поверхностным током

$$\Phi_0 = \Phi_1 = \mu_0 i \pi r^2, \quad (55)$$

здесь i - поверхностная плотность индуцированного тока по поверхности трубки, r - радиус деформированной трубки. Действительно, магнитный поток должен сохраняться в любом случае: и при изменении внешнего поля и при изменении площади контура, то есть при увеличении радиуса контура сила тока в нем будет уменьшаться!

Из условия постоянства магнитного потока получаем уравнение, связывающее силу тока в соленоиде и силу индуцированного тока по поверхности трубки

$$\mu n I_0 a^2 = i r^2. \quad (56)$$

В этом уравнении две неизвестных величины – плотность тока и радиус трубки. Дополним его уравнением связывающим магнитное давление

$$P_{\text{mag.}} = \frac{\mu_0 i^2}{2} \quad (57)$$

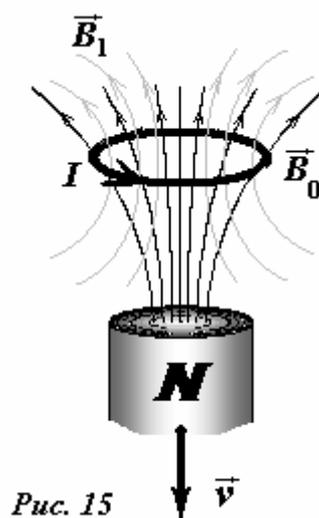


Рис. 15

² Это утверждение не является абсолютно строгим, но выполняется с высокой точностью.

с радиусом деформированной трубки в состоянии равновесия (7) $rP_{\text{маг.}} = f$. Из уравнения

(56) выразим $i = \frac{\mu n I_0 a^2}{r^2}$, получим выражения для давления

$$P_{\text{маг.}} = \frac{\mu_0 i^2}{2} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\mu n I_0 a^2}{r^2} \right)^2 = \frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2 r^4}$$

и подставим его в уравнение (7)

$$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2 r^3} = f \quad (58)$$

6.1 Чтобы определить требуемое значение тока в это выражение следует подставить предельные значения радиуса r_{max} и механического напряжения f_{max} и определить предельное значение тока в соленоиде

$$\begin{aligned} I_{0\text{max}} &= \frac{1}{\mu n a^2} \sqrt{\frac{2 f_{\text{max}} r_{\text{max}}^3}{\mu_0}} = \\ &= \frac{1}{1,0 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot (0,90 \cdot 10^{-2})^2} \sqrt{\frac{2 \cdot 93,7 \cdot (1,4 \cdot 10^{-2})^3}{4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 0,25 \text{ A} \end{aligned} \quad (59)$$

6.2 Данное в условии значения силы тока меньше максимально возможного, поэтому в этом случае трубка не разорвется, но это значение сравнимо с предельным. Найдем решение уравнения (58), используя для механического напряжения закон Гука. Обоснованность его применения проверим после получения решения. В этом приближении уравнение (58) имеет вид

$$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2 r^3} = \gamma \frac{r - r_0}{r_0},$$

и является уравнением четвертой степени, поэтому его следует решать численно. Выразим радиус трубки через его относительное удлинение $r = r_0(1 + \varepsilon)$. Подстановка этого выражения в уравнение дает

$$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2\gamma} \frac{1}{r_0^3 (1 + \varepsilon)^3} = \varepsilon.$$

Численное значение постоянного безразмерного множителя этого уравнения равно

$\frac{\mu_0 (\mu n a^2)^2 I_0^2}{2\gamma r_0^3} \approx 0,26$. Таким образом, получаем уравнение «в числах»

$$\varepsilon = \frac{0,26}{(1 + \varepsilon)^3} \quad (60)$$

Его можно решить любым численным методом (даже подбором). Единственный положительный корень этого уравнения $\varepsilon^* \approx 0,16$. С удовольствием отмечаем, что в этом диапазоне приближение закона Гука допустимо. Окончательно, находим радиус деформированной трубки

$$r_1 = r_0(1 + \varepsilon^*) \approx 1,2 \text{ см} \quad (61)$$