

### III этап, 2005г. Решения задач.

#### 9 класс.

##### 1. «Лебедка»

Обозначим время подъема одной бочки по наклонной плоскости  $t_0$ . Тогда лебедка совершит за это время работу  $A = \eta P_0 t_0$ , равную изменения потенциальной энергии бочки  $\Delta U = mgh$ , т.е.

$$\eta P_0 t_0 = mgh. \quad (1)$$

При перемещении бочки на расстояние  $L$ , лебедка должна намотать на вал трос длиной  $2L$ , поэтому

$$2\pi r n t_0 = 2L. \quad (2)$$

Из этих уравнений находим

$$t_0 = \frac{mgh}{\eta P_0}, \quad (3)$$

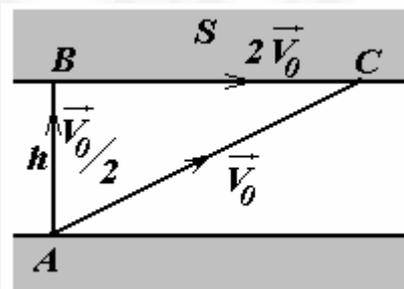
$$n = \frac{\eta P_0 L}{\pi r m g h}. \quad (4)$$

##### 2 «Триатлон»

Обозначим скорость «байдарочника»  $v_0$ . Тогда скорость «пловца» равна  $\frac{v_0}{2}$ , а скорость бегуна  $2v_0$ .

Отношения времен движения спортсменов находится достаточно просто

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{\sqrt{h^2 + S^2}}{v_0}}{\frac{2h}{v_0} + \frac{S}{2v_0}} = \frac{2\sqrt{h^2 + S^2}}{4h + S}. \quad (1)$$



При  $h = S$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2\sqrt{h^2 + S^2}}{4h + S} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0,566, \quad (2)$$

то есть «байдарочник» побеждает.

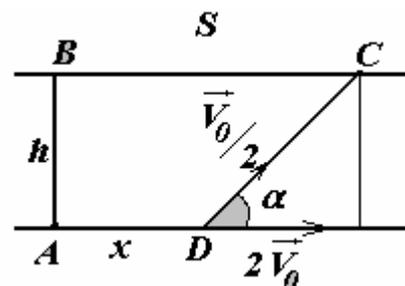
Спортсмены придут к финишу одновременно при выполнении условия

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{2\sqrt{h^2 + S^2}}{4h + S} = 1. \quad (3)$$

Решая это уравнение, находим

$$S = \frac{4h + \sqrt{16h^2 + 36h^2}}{3} = h \frac{4 + 2\sqrt{13}}{3} \approx 374 \text{ м}. \quad (4)$$

Чтобы время движения второго спортсмена было минимально, он может выбрать другой «маршрут»: пусть он сначала бежит по берегу по отрезку  $AD$ , а затем вплавь по отрезку  $DB$ . Чтобы «выбрать оптимальную точку  $D$ », воспользуемся следующими рассуждениями: при движении по берегу, скорость его приближения к точке финиша равна



$$v_c = 2v_0 \cos \alpha. \quad (5)$$

Очевидно, что имеет смысл бежать по берегу до тех пока, эта скорость больше, чем скорость приближения в плавы. Таким образом, спортсмен должен начать плыть в точке, где направление на точку финиша, определяется соотношением

$$v_c = 2v_0 \cos \alpha = \frac{v_0}{2}. \quad (6)$$

Из него следует

$$\cos \alpha = \frac{1}{4}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{15}.$$

Тогда  $x = |AD| = S - \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 574 \text{ м}$ .

Полное время движения по оптимальному маршруту

$$t_2 = \frac{x}{2v_0} + \frac{\sqrt{h^2 + (S-x)^2}}{\frac{v_0}{2}}, \quad (7)$$

А отношение времен движения

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{h^2 + S^2}}{\frac{x}{2} + 2\sqrt{h^2 + (S-x)^2}} = \frac{2\sqrt{37}}{6 + \sqrt{15}} \approx 1,23. \quad (8)$$

### 3. «Термометр»

3.1 Смысл параметров, входящих в приведенные формулы следующий:

$l_0, V_0$  - длина и объем тела при  $t = 0^\circ \text{C}$ ,  $\alpha = \frac{\Delta l}{l_0} \frac{1}{t}$  - относительное удлинение при

изменении температуры на 1 градус, аналогично  $\beta = \frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{t}$  - относительное изменение

объема при изменении температуры на 1 градус.

3.2 Изменение объема тела может быть выражено через изменение его линейных размеров

$$V = l_{10}(1 + \alpha t)l_{20}(1 + \alpha t)l_{30}(1 + \alpha t) \approx l_{10}l_{20}l_{30}(1 + 3\alpha t),$$

В этом выражении мы пренебрегли малыми слагаемыми второго и третьего порядка.

Сравнивая с формулой для изменения объема  $V = V_0(1 + \beta t)$ , получаем связь между параметрами

$$\beta = 3\alpha. \quad (1)$$

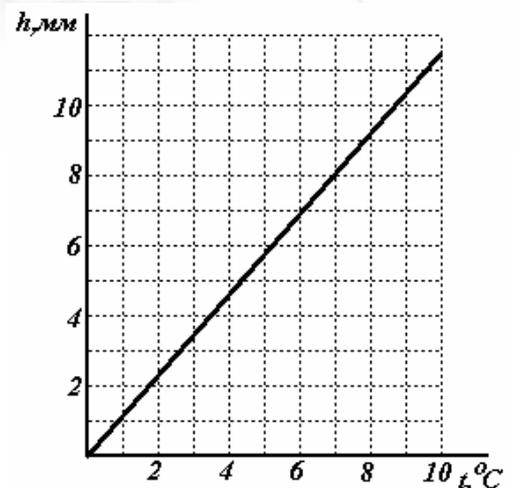
3.3 Для «градуировки» столбика термометра достаточно записать соотношение для изменения объема ртути

$$V_0 + \frac{\pi d_0^2}{4} h = V_0(1 + \beta t). \quad (2)$$

Откуда следует

$$h = \frac{4V_0\beta}{\pi d_0^2} t \approx 1,15t, \quad (3)$$

графиком этой функции является прямая, проходящая через начало координат.



3.4 При учете изменения размеров стекла соотношение для изменения объема ртути имеет вид

$$V_0(1+3\alpha t) + \frac{\pi d_0^2(1+2\alpha t)}{4} h_1 = V_0(1+\beta t). \quad (4)$$

Из этого уравнения определяем высоту подъема

$$h_1 = \frac{4V_0}{\pi d_0^2} \frac{\beta - 3\alpha}{1+2\alpha t} t \approx \frac{4V_0\beta}{\pi d_0^2} t \left(1 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 2\alpha t\right). \quad (5)$$

Этому значению высоты подъема, по градуировочной зависимости (3) будет «приписана» температура

$$t_{изм.} = \frac{\pi d_0^2}{4V_0\beta} h_1 = t \left(1 - 3\frac{\alpha}{\beta} - 2\alpha t\right).$$

Следовательно, относительная погрешность измерения температуры равна

$$\varepsilon = \frac{t_{изм.} - t}{t} = -3\frac{\alpha}{\beta} - 2\alpha t \approx -5,0 \cdot 10^{-2}.$$

#### 4. «Поможем Техасу»

4.1 Из уравнения теплового баланса следует, что за единицу времени джоулева теплота

$\frac{U^2}{R} = \frac{U^2 hb}{\rho a}$ , выделившаяся при прохождении тока, пойдет на плавление  $m = q\gamma$  килограммов снега, т.е.

$$\frac{U^2 hb}{\rho a} = q\gamma\lambda, \quad (1)$$

откуда следует

$$q = \frac{U^2 hb}{\rho a \gamma \lambda} \approx 2,3 \cdot 10^{-2} \frac{M^3}{c}. \quad (2)$$

4.2 Если за время  $\Delta t$  уровень воды поднялся на  $\Delta h$ , то за это время расплавилось  $\Delta m = \Delta h a b \gamma$  льда, на что было затрачено количество теплоты, равное

$\Delta Q = \frac{U^2}{R} \Delta t = \frac{U^2 b h}{\rho a} \Delta t$ . Уравнение теплового баланса в этом случае будет иметь вид

$$\frac{U^2 b h}{\rho a} \Delta t = \Delta h a b \gamma \lambda, \quad (3)$$

из которого следует, что скорость изменения уровня воды в яме пропорциональна высоте этого уровня

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{U^2}{\rho a^2 \gamma \lambda} h \approx 0,18 h, \quad (4)$$

где  $t$  в минутах, коэффициент пропорциональности имеет размерность  $[мин^{-1}]$

Используя приведенные в условии график можно показать, выполнение этой зависимости, для чего достаточно рассмотреть малые промежутки времени (например,  $\Delta t = 1 мин$ ).

Так как изменение высоты пропорционально самой высоте, то за одинаковые промежутки времени высота изменяется в одно и тоже число раз. По графику видно, что за время  $t \approx 4 мин$  высота увеличилась в два раза, следовательно, она увеличится в 4 раза за время в два раза большее, то есть за 8 минут.

## Решения задач (10 класс)

### Задача 1. «Транспортер»

1.1 После контакта детали с направляющей на деталь в горизонтальной плоскости будут действовать две силы трения:  $\vec{F}_{mp1}$  (со стороны ленты транспортера) и  $\vec{F}_{mp2}$  (со стороны направляющей), а также сила реакции  $\vec{N}$  со стороны направляющей.

Будем считать, что движение деталей носит поступательный характер, т.е. они не вращаются при трении о направляющую.

Для снятия (соскальзывания) детали с транспортера необходимо, чтобы проекция силы трения  $F_{mp1} = \mu_1 mg$  на направляющую была больше силы трения  $F_{mp2} = \mu_2 N$  о направляющую (рис. 1):

$$\mu_1 mg \sin \alpha > \mu_2 N.$$

С учетом того, что сила реакции

$$N = \mu_1 mg \cos \alpha,$$

получаем

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \mu_2$$

Соответственно, для минимального угла  $\alpha_{min}$  выбираем случай равенства

$$\operatorname{tg} \alpha_{min} = \mu_2. \quad (1)$$

Обратите внимание, что (1) не зависит от значения коэффициента трения  $\mu_1$ , главное — чтобы он был отличен от нуля, иначе детали не смогут двигаться по транспортеру.

1.2 Таким образом, при выполнении условия  $\alpha > \alpha_{min}$  детали будут скользить вдоль направляющей. Заметим, что по мере роста скорости  $\vec{u}$  движения деталей вдоль направляющей вектор  $\vec{w}$  скорости их проскальзывания относительно транспортера будет поворачиваться, «прижимаясь» к нормали  $AD$ . Вследствие этого будет поворачиваться и вектор силы трения  $\vec{F}_{mp1}$  из начального положения «вдоль транспортера» до установившегося положения, при котором он будет составлять некоторый угол  $\beta$  с нормалью  $AD$  к направляющей (рис.2). Следовательно, в установившемся режиме

$$F_{mp1} \sin \beta = \mu_2 N = \mu_2 F_{mp1} \cos \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \mu_2. \quad (2)$$

С другой стороны из треугольника скоростей  $ABC$  (см. рис. 2) по теореме синусов имеем

$$\frac{u}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{V}{\sin \xi}, \quad (3)$$

где  $\xi = \frac{\pi}{2} + \beta$ .

Выделяя из (3)  $\operatorname{tg} \beta$  с учетом (2) получаем

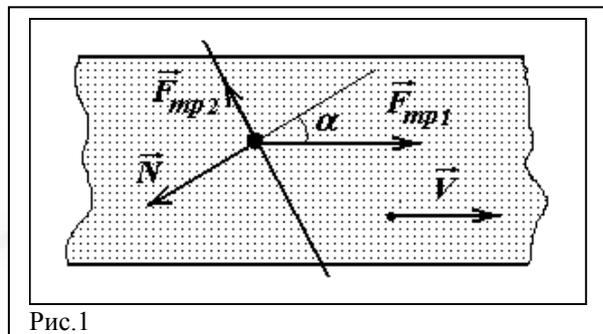


Рис.1

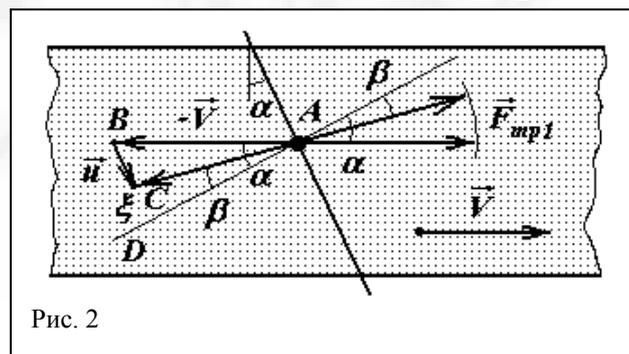


Рис. 2

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V \sin \alpha - u}{V \cos \alpha} = \mu_2.$$

Окончательно для установившейся скорости  $u$  поступательного движения деталей вдоль направляющей получаем

$$u = V(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha). \quad (4)$$

Как видим из (4) выражение имеет смысл только при выполнении условия

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \mu_2,$$

в противном случае после упора в направляющую детали будут покоиться, т.е.  $u = 0$ .

## Задача 2. «Кипение»

**2.1** Рассмотрим пузырек пара радиуса  $r$  (рис. 3), образовавшийся внутри кипящей жидкости. Пузырек увеличивает свой радиус вследствие испарения жидкости внутрь его.

Согласно условию за время  $\Delta t$  с поверхности жидкости  $S$  (поверхности пузырька) испарится объем воды  $\Delta V$ :

$$\Delta V = NDS\Delta t, \quad (1)$$

где  $D$  — «эффективный диаметр» молекулы воды. Соответственно, объем пузырька также должен увеличиться на  $\Delta V$ . С другой стороны  $\Delta V$  можно представить как объем тонкой сферы радиусом  $r$  и толщиной  $\Delta r$  (см. рис.3):

$$\Delta V = S\Delta r = 4\pi r^2 \Delta r. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим приращение радиуса пузырька пара  $\Delta r$  за время  $\Delta t$

$$\Delta r = ND\Delta t = \{\beta = ND\} = \beta \Delta t. \quad (3)$$

Как следует из (3), приращение радиуса  $\Delta r$  пузырька пара за время  $\Delta t$  не зависит от его радиуса  $r$ , т.е. радиус пузырька равномерно увеличивается со временем

$$r = \beta \cdot t. \quad (4)$$

**2.2** Поскольку плотность пара гораздо меньше плотности воды, то силой тяжести пузырька пара по сравнению с действующей на него силой Архимеда можно пренебречь.

Скорость пузырька  $v$  будет расти до тех пор, пока сила Архимеда не уравновесится силой сопротивления со стороны воды (см. рис.3)

$$F_A = F_C,$$

$$\rho_0 g \frac{4}{3} \pi r^3 = C_x \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \pi r^2,$$

$$v^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{g}{C_x} r = \{(4)\} = \frac{8}{3} \cdot \frac{g}{C_x} \cdot \beta t = \left\{ \gamma = \frac{8}{3} \cdot \frac{g}{C_x} \cdot \beta \right\} = \gamma \cdot t.$$

Подобные приближения, при которых считается, что в каждый момент времени система находится в равновесном (стационарном) состоянии, называются *квазистационарными* (или как модно говорить сегодня «как бы» стационарными). Соответственно в нашем случае

$$v(t) = \sqrt{\gamma t}. \quad (5)$$

График зависимости (5) представлен на рисунке.

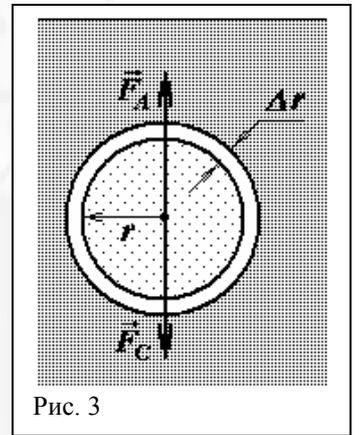
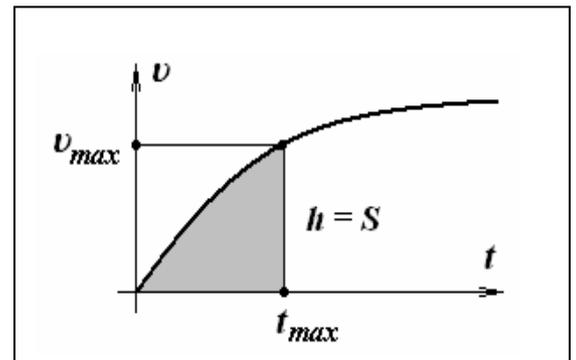


Рис. 3



**2.3** Для нахождения радиуса пузырька  $r_{max}$  у поверхности воды необходимо знать время его всплытия  $t_{max}$ . Заметим, что при точном решении на рис.4 при  $t = t_{max}$  площадь под графиком  $S$  (или площадь криволинейной трапеции) должна быть равна глубине сосуда  $h$

$$S(t_{max}) = h.$$

Для оценки этой величины мы поступим достаточно «прямолинейно». При всплытии максимальная скорость пузырька  $v_{max}$  достигается у поверхности

$$v_{max} = \sqrt{\gamma t_{max}}. \quad (6)$$

Заменим кривую на графике зависимости (5) прямой, т.е. будем считать движение пузырька равноускоренным, тогда его средняя скорость

$$\langle v \rangle = \frac{0 + v_{max}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma t_{max}}.$$

Тогда

$$h = \langle v \rangle t_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\gamma t_{max}} \cdot t_{max} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (t_{max})^{\frac{3}{2}}. \quad (7)$$

С помощью (7) получаем оценку для времени всплытия  $t_{max}$

$$t_{max} = \left( \frac{2h}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (8)$$

Соответственно с учетом (4) и (8) находим  $r_{max}$

$$r_{max} = \beta \cdot t_{max} = \beta \left( \frac{2h}{\sqrt{\gamma}} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{C_x D^2 N^2 h^2}{g}}. \quad (9)$$

Для расчета примем, что диаметр молекулы воды по порядку величины равен диаметру атома водорода  $D = 1A = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ , тогда из (9) получаем:

$$r_{max} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,1 \text{ мм}.$$

### Задача 3. «Диэлектрик или проводник?»

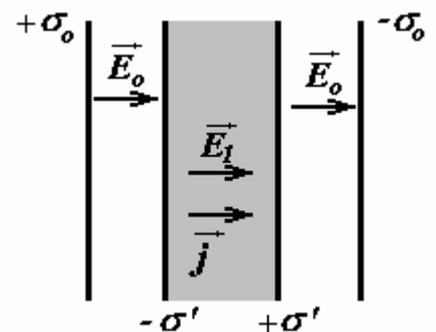
Рассмотрим физическую картину происходящих явлений. Сразу после замыкания цепи на пластинке возникают поляризационные заряды (пластинка на малых временах ведет себя как диэлектрик), затем в пластике в результате протекания тока происходит перераспределение заряда, пока поле внутри пластинки не исчезнет (пластинка становится проводником).

Обозначим поверхностную плотность заряда на обкладках конденсатора  $\sigma_0$ , а на поверхности пластинки  $\sigma'$  (знаки зарядов указаны на рисунке). Так как напряжение между обкладками поддерживается постоянным, то выполняется соотношение

$$U_0 = E_0 \frac{h}{2} + E_1 \frac{h}{2}, \quad (1)$$

где  $E_0$ ,  $E_1$  напряженности электрических полей между обкладками и пластинкой и внутри пластинки, соответственно. Напряженности полей связаны с поверхностными плотностями зарядов соотношениями

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}; \quad E_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (2)$$



После замыкания цепи практически мгновенно на пластинке возникнут поляризационные заряды, такие, что напряженность поля внутри пластики будет в  $\varepsilon$  раз меньше напряженности поля вне ее  $E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon}$ , поэтому из соотношения (1) получим

$$U_0 = E_0 \frac{h}{2} + \frac{E_0}{\varepsilon} \frac{h}{2} \Rightarrow E_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{2U_0}{h}. \quad (3)$$

Это поле создается зарядами на обкладках

$$Q_0 = \sigma_0 S = \varepsilon_0 E_0 S = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{2U_0 \varepsilon_0 S}{h} \approx 7,9 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}. \quad (4)$$

Под действием поля внутри пластинки начнет течь электрический ток, который будет изменять заряды, как на поверхности пластинки, так и на обкладках конденсатора. Ток прекратится, когда напряженность поля внутри пластинки станет равной нулю. После завершения этого процесса перераспределения напряженности полей станут равными

$$E_1 = 0; \quad E_0 = \frac{2U_0}{h},$$

а заряд на обкладках

$$Q_{01} = \sigma_0 S = \varepsilon_0 E_0 S = \frac{2U_0 \varepsilon_0 S}{h} \approx 11 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}. \quad (5)$$

Таким образом, заряд конденсатора будет изменяться от  $Q_0 \approx 7,9 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$  до  $Q_{01} \approx 11 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ .

Для описания динамики изменения этого заряда из соотношение (1) –(2) выразим

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{U_0 \varepsilon_0}{h} + \frac{\sigma'}{2} \\ Q_0 &= \frac{U_0 \varepsilon_0 S}{h} + \frac{Q'}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

где  $Q'$  - заряд на поверхности пластинки. Изменение этого заряда обусловлено электрическим током внутри пластинки, сила которого определяется законом Ома

$$\frac{\Delta Q'}{\Delta t} = I = \frac{E_1 \frac{h}{2}}{R} = \frac{E_1 \frac{h}{2}}{\rho \frac{h}{2}} S = \frac{E_1}{\rho} S = \frac{Q_0 - Q'}{\varepsilon_0 \rho}. \quad (7)$$

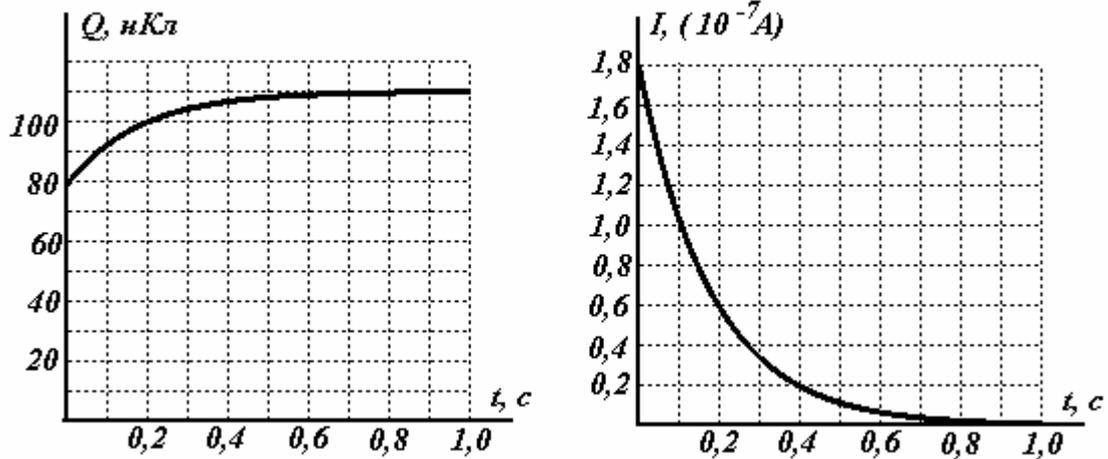
Избавляясь в этом уравнении от  $Q'$  с помощью соотношений (6) получим уравнение, описывающее изменение заряда конденсатора

$$I_0 = \frac{\Delta Q_0}{\Delta t} = -\frac{1}{2\varepsilon_0 \rho} \left( Q_0 - \frac{2U_0 \varepsilon_0 S}{h} \right) = -\frac{1}{2\varepsilon_0 \rho} (Q_0 - Q_{01}). \quad (8)$$

Из этого уравнения следует, что характерное время изменения заряда (следовательно, и существования тока) равно

$$\tau = 2\rho \varepsilon_0 \approx 0,18 \text{ с}. \quad (9)$$

Начальное значение силы тока  $I_0 = -\frac{1}{2\varepsilon_0 \rho} (Q_0 - Q_{01}) \approx 1,8 \cdot 10^{-7} \text{ А}$ , который затем убывает до нуля.



Для определения количества теплоты, выделившейся в пластинке, можно воспользоваться энергетическим соотношением:

- после замыкания цепи конденсатор обладал энергией  $W_0 = \frac{C_0 U_0^2}{2} = \frac{1}{2} Q_0 U_0$ , где

$$C_0 = \left( \left( \frac{2\varepsilon_0 S}{h} \right)^{-1} + \left( \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{h} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \frac{2\varepsilon_0 S}{h} - \text{начальная емкость конденсатора};$$

- за время протекания тока источник совершил работу  $A = (Q_{01} - Q_0) U_0$ ;

- после перераспределения конденсатор обладает энергией  $W_1 = \frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{1}{2} Q_{01} U_0$ , где

$$C = \frac{2\varepsilon_0 S}{h} - \text{емкость конденсатора, после прекращения тока.}$$

Таким образом, энергетический баланс представляется уравнением

$$W_0 + A = W_1 + \tilde{Q}, \quad (10)$$

здесь  $\tilde{Q}$  - количество выделившейся теплоты. Из этого уравнения находим

$$\tilde{Q} = A + W_0 - W_1 = (Q_{10} - Q_0) U_0 - \frac{1}{2} (Q_{10} - Q_0) U_0 = \frac{1}{2} (Q_{10} - Q_0) U_0 = 7,8 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$$

#### Задача 4. «Плоская Земля»

**4.1** С точки зрения математики закон всемирного тяготения Ньютона и закон Кулона (основной закон электростатики) являются схожими, если считать массу  $m$  своеобразным «гравитационным зарядом» или наоборот, представить электрический заряд  $q$  «электрической массой»

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \Leftrightarrow |\vec{F}| = k \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

В продолжение этой аналогии можем сказать, что ускорение свободного падения  $\vec{g}$  в теории гравитации является «силовым аналогом» вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$

$$\vec{F} = m \vec{g} \Leftrightarrow \vec{F} = q \vec{E}.$$

Таким образом, можем составить небольшую табличку «гравитационно-электрических» аналогий.

№	Гравитация	Электростатика
1.	$m$	$q$
2.	$\vec{g}$	$\vec{E}$
3.	$G$	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
4.	$\frac{1}{4\pi G}$	$\epsilon_0$

Напряженность электрического поля  $E$  пластины толщиной  $h$ , заряженной с постоянной объемной плотностью  $\rho$ :

$$E = \frac{\rho h}{2\epsilon_0}.$$

Следовательно, методом аналогий находим, что ускорение свободного падения на северном полюсе (вдали от краев пластины)

$$g = \frac{\rho h}{2} 4\pi G = 2\pi G \rho h. \quad (1)$$

С помощью (1) находим искомую толщину Земного диска

$$h = \frac{g}{2\pi G \rho} = 4,3 \cdot 10^6 \text{ м} = 4,3 \cdot 10^3 \text{ км}. \quad (2)$$

**4.2** При движении камешка внутри шахты на него будет действовать переменная сила тяжести  $F(x)$ , график зависимости которой от расстояния  $x$  до «нулевого сечения» планеты (на глубине  $\frac{h}{2}$ ) представлен на рис. 5.

Работа силы тяжести  $A$  равна заштрихованной площади под графиком  $S$  (площади прямоугольного треугольника)

$$A = \frac{1}{2} mg \frac{h}{2},$$

где  $h$  дается выражением (2). Скорость камешка будет максимальной именно в нулевом сечении, поскольку при дальнейшем движении гравитационные силы начнут его притормаживать.

Согласно теореме о кинетической энергии в этом случае получаем

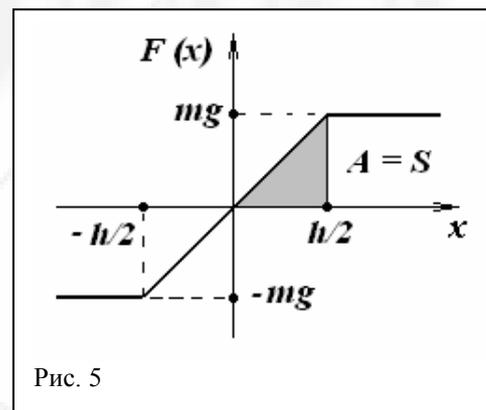
$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = A = mg \frac{h}{4}, \quad (3)$$

где  $m$  — масса камешка. Из (3) находим

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi G \rho}} = 4,6 \cdot 10^3 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 4,6 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \quad (4)$$

Как видим из (4) даже плоская Земля разгонит камешек до «полукосмической» скорости.

**4.3 а)** рассмотрим выстрел из суперкатапульты вдоль меридиана от центра планеты. Афины вращаются вокруг центра Земли с линейной скоростью  $v = \omega r$ , где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  —



угловая скорость вращения планеты,  $T = 86\,400\text{с}$  — период обращения Земли вокруг своей оси.

Соответственно, эту же скорость приобретает снаряд в азимутальном направлении относительного абсолютного наблюдателя, находящегося в центре Земли (рис. 6). Однако линейная скорость вращения точек в районе приземления больше (они дальше!) на величину  $\Delta v$

$$\Delta v = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r, \quad (5)$$

где  $\Delta r = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{v_0^2}{g}$  — дальность полета снаряда на неподвижной Земле. Соответственно за время полета снаряда  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$  эти точки «уйдут вперед» на величину

$$\Delta S = \Delta v t = \omega \Delta r \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{4\pi}{T} \frac{v_0^3}{g^2} \sin \alpha = 1,1\text{ м}. \quad (6)$$

Поскольку меридиан уйдет вперед по направлению вращения Земли, то для наблюдателя снаряд отклонится на запад от меридиана на величину  $\Delta S = 1,1\text{ м}$ .

Легко догадаться, что при приближении снаряда к центру Земли линейная скорость вращения точек ее поверхности будет уменьшаться, т.е. теперь, в отличие от предыдущего случая, снаряд будет их «обгонять». Соответственно, меридиан в этом случае «отстанет» на ту же величину  $\Delta S = 1,1\text{ м}$ , но в другом направлении. Таким образом, для земного наблюдателя при выстреле из катапульты вдоль меридиана по направлению к центру Земли снаряд отклонится уже на восток, но на ту же величину  $\Delta S = 1,1\text{ м}$ .

**б)** при выстреле вдоль параллели на восток (запад) (рис. 7) снаряд также добавляет (теряет) азимутальный компонент скорости, что меняет его дальность полета. Кроме того, как следует из рис.7, за время полета снаряда точки параллели «повернут» относительно плоскости его полета, вследствие чего точка падения снаряда окажется на некотором расстоянии  $\Delta S$  от параллели.

Таким образом, дальность полета снаряда  $\Delta r$  при выстреле на восток (по направлению вращения диска)

$$\Delta r = (v_0 \cos \alpha + \omega r) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (7)$$

При выстреле на запад (против направления вращения земного диска)

$$\Delta r = (v_0 \cos \alpha - \omega r) \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (8)$$

Заметим, что в этом случае (см. рис.7) смещение снаряда  $\Delta S$  происходит всегда на юг, т.к. он в любом случае удаляется от центра Земли (параллели). При этом, согласно теореме Пифагора,

$$(r + \Delta S)^2 = r^2 + \Delta r^2. \quad (9)$$

Поскольку  $\Delta S \ll r$ , то в (9) можно пренебречь слагаемым  $(\Delta S)^2$ , что приводит к результату

$$\Delta S = \frac{\Delta r^2}{2r} = \frac{(v_0 \cos \alpha \pm \omega r)^2 (2v_0 \sin \alpha)^2}{2r g^2} = \frac{2(v_0 \cos \alpha \pm \omega r)^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{r g^2}. \quad (10)$$

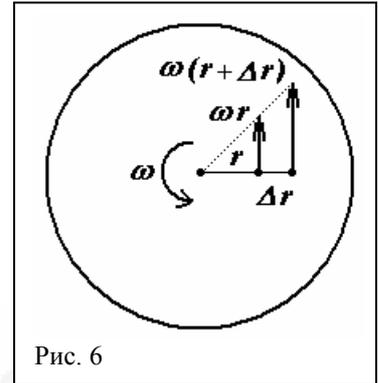


Рис. 6

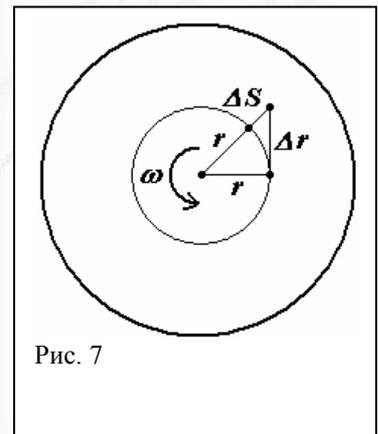


Рис. 7

Подчеркнем, что при расчетах в (10) следует брать знак «+» в случае выстрела на восток

$$\Delta S = 3,4 м,$$

и знак «-» в случае выстрела на запад

$$\Delta S = 1,3 м.$$

Таким образом, для земного наблюдателя при выстреле из суперкатапульты вдоль параллели снаряд отклонится на юг в любом случае, но величины смещений в этом случае будут разными:  $\Delta S = 3,4 м$  при выстреле на восток и  $\Delta S = 1,3 м$  при выстреле на запад.

## Решения 11 класс.

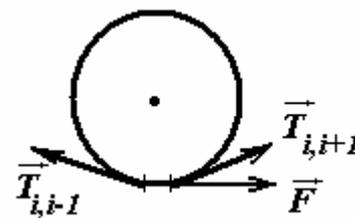
### Задача 1. «Хорошо ли Вы знаете силу трения?»

1.0 Для вывода данного соотношения (уравнения динамики вращательного движения) достаточно рассмотреть уравнение второго закона для небольшого участка цилиндра и затем просуммировать его по всем участкам с учетом третьего закона Ньютона.

Так для  $i$ -го участка можно записать

$$\Delta m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{T}_{i,i+1} + \vec{T}_{i,i-1},$$

где  $\vec{T}_{i,i+1}, \vec{T}_{i,i-1}$  - силы, действующие на  $i$ -тый участок со стороны соседей. В проекции на тангенциальное направление для всех участков  $|\vec{a}_i| = R \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ , при



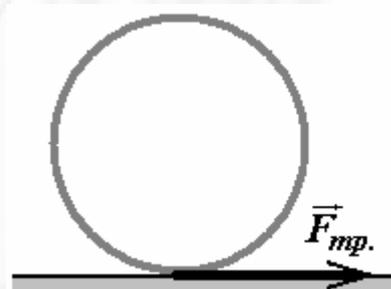
суммировании все внутренние силы «исчезнут», останутся только тангенциальные составляющие внешних сил.

1.1 Сила трения, действующая на трубку, сообщает ей линейное ускорение, приводящее к увеличению скорости центра трубки

$$ma = F_{mp}. \quad (1)$$

Скорость будет изменяться по закону

$$V = \frac{F_{mp}}{m} t. \quad (2)$$



Эта же сила будет тормозить вращение трубки, согласно уравнению динамики вращательного движения

$$mR \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = -F_{mp}. \quad (3)$$

Поэтому угловая скорость будет уменьшаться по закону

$$\omega = \omega_0 - \frac{F_{mp}}{Rm} t. \quad (4)$$

Проскальзывание (следовательно, и изменение скоростей) прекратится при выполнении условия  $V = \omega R$ . Из записанных уравнений следует, что скорость установившегося движения

$$V_{ycm} = \frac{\omega_0 R}{2}. \quad (5)$$

1.2 Если приложенная сила  $F$  превышает максимальную силу трения покоя  $F_{max} = \mu mg$ , то ускорение бруска находится из уравнения второго закона Ньютона

$$a = \frac{F}{m} - \mu g, \quad (6)$$

в противном случае ускорение бруска равно нулю.

1.3 На рисунке изображены силы, действующие на тела (все обозначения традиционны). В проекции на горизонтальное направление уравнения второго закона Ньютона имеют вид

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - T \\ m_2 a &= -F_2 + T \end{aligned} \quad (1)$$

Выразим действующие силы трения (все они являются силами скольжения):

- между цилиндром и бруском

$$F_0 = \mu T, \quad (2)$$

- между цилиндром и горизонтальной поверхностью

$$F_1 = \mu N_1 = \mu(m_1 g - F_0) = \mu(m_1 g - \mu T), \quad (3)$$

- между бруском и поверхностью

$$F_2 = \mu N_2 = \mu(m_2 g + F_0) = \mu(m_2 g + \mu T). \quad (4)$$

Решая эту систему уравнений, получим ускорение тел (если они движутся)

$$a = \mu g \frac{\frac{m_1}{1 + \mu^2} - \frac{m_2}{1 - \mu^2}}{\frac{m_1}{1 + \mu^2} + \frac{m_2}{1 - \mu^2}}. \quad (5)$$

Таким образом, брусок начнет двигаться при

$$m_2 < m_1 \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \approx 0,92 m_1.$$

При заданном значении масс ускорение системы равно  $a \approx 1,6 \frac{M}{c^2}$ .

1.4 Распределение сил в данном случае аналогично рассмотренному ранее. Поэтому если предположить, что все силы являются силами трения скольжения, надо признать справедливой формулу (5) для ускорений. Однако, при  $m_1 = m_2$  из нее следует, что ускорение должно быть отрицательным. Следовательно, сила трения  $F_2$  является трением покоя. Поэтому система уравнений для ускорений имеет вид

$$\begin{aligned} ma &= -T + F_1 = -T + \mu(mg - \mu T) \\ ma &= T - F_2 \end{aligned}, \quad (6)$$

к которым необходимо добавить уравнение динамики вращательного движения для второго цилиндра (с учетом  $\frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{a}{R}$ )

$$mR \frac{a}{R} = F_2 - F_0 = F_2 - \mu T. \quad (7)$$

Из этой системы находим

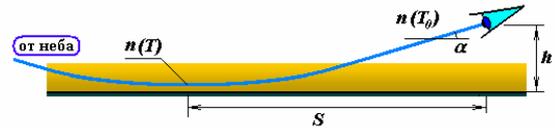
$$F_2 = ma + \mu T$$

$$T = ma + F_2 = 2ma + \mu T \Rightarrow T = \frac{2ma}{1 - \mu}$$

$$ma = \mu mg - T(1 + \mu^2) \Rightarrow a = \frac{\mu g}{1 + 2 \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu}} \approx 0,54 \frac{M}{c^2}$$

**Задача 2. «Хорошо ли Вы знаете закон преломления света?»**

2.1 Воздух над дорогой под действием солнечных лучей разогревается, поэтому его показатель преломления меньше, чем в более высоких и холодных слоях. Лучи, идущие от неба, могут испытывать полное отражение от разогретого слоя, что воспринимается как появление на асфальте «луж». Для описания их положения относительно наблюдателя следует рассмотреть условия полного отражения.



Из закона преломления следует условие полного отражения

$$n(T_0)\cos\alpha = n(T) \quad (2.1)$$

Учитывая малость угла  $\alpha$  (или, что равносильно  $h \ll S$ ), можно положить

$$\cos\alpha = \frac{S}{\sqrt{S^2 + h^2}} = \left(1 + \frac{h^2}{S^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{h^2}{2S^2}.$$

Далее преобразуем выражение для отношения показателей преломления (при разложении будем учитывать, что отклонение показателя преломления от единицы мало  $\frac{a}{T} \ll 1$ , а разность температур сравнима со средней температурой воздуха) –

$$\frac{n(T)}{n(T_0)} = \frac{n(T_0 + \Delta T)}{n(T_0)} = \frac{1 + \frac{a}{T_0 + \Delta T}}{1 + \frac{a}{T_0}} \approx 1 + \frac{a}{T_0 + \Delta T} - \frac{a}{T_0} = 1 - \frac{a\Delta T}{T_0(T_0 + \Delta T)}.$$

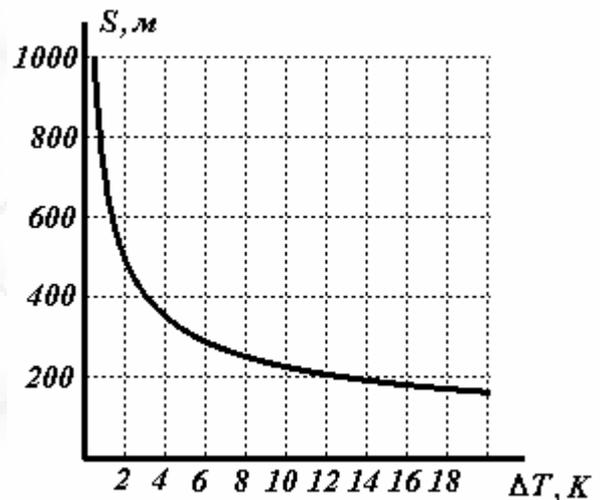
Подставляя эти выражения в уравнение (2.1),

$$\frac{a\Delta T}{T_0(T_0 + \Delta T)} = \frac{h^2}{2S^2}$$

получим искомую зависимость

$$S = h\sqrt{\frac{T_0(T_0 + \Delta T)}{2a\Delta T}}$$

График этой зависимости показан на рисунке.



2.2 Так как предмет (нить) находится на расстоянии  $2F$  от линзы, то и экран следует расположить на расстоянии  $b = 2F = 40\text{см}$  за линзой.

2.3 Согласно известной задаче о кажущейся глубине водоема, изображение нити после преломления на задней грани бруска находится на расстоянии

$l' = \frac{l}{n}$  от нее. Следовательно, это изображение находится на расстоянии

$$a' = a - l + l' = a - l\frac{n-1}{n} \approx 33,3\text{см}$$

от линзы. Используя формулу линзы, получим расстояние  $b'$ , на котором следует расположить экран

$$b' = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{a'}\right)^{-1} \approx 50\text{см}.$$

2.4 Для расчета преломления в данном случае можно воспользоваться принципом Гюйгенса. Вблизи верхней грани бруска световая волна достигнет крайней точки за время

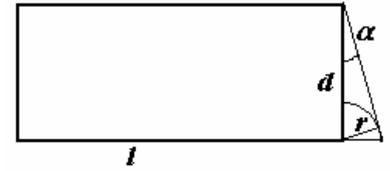
$$t_1 = \frac{n_1 l}{c} = \frac{(n_0 + \delta n) l}{c},$$

а вблизи нижней за время  $t_0 = \frac{n_0 l}{c}$ .

За разность этих времен за задней гранью, свет, испущенный в нижней точке, пройдет путь  $r = c(t_1 - t_0) = \delta n l$ . Следовательно, фронт волны (и перпендикулярные ему лучи

повернутся на малый угол  $\alpha \approx \frac{\delta n l}{d} = 1,0 \cdot 10^{-3}$ . Соответственно, изображение на экране

сместится вверх на величину  $\delta z = \alpha \cdot F = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ .



### Задача 3. «Что Вы знаете о Солнце?»

3.1 По закону Стефана-Больцмана за время  $\Delta t$  Солнце излучает в пространство тепловую энергию

$$W = \sigma T^4 \cdot S \cdot \Delta t = \sigma T^4 4\pi R^2 \Delta t, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус Солнца,  $T$  — абсолютная температура его поверхности. Распространяясь без потерь в космическом пространстве, эта энергия достигает Земли, «обеспечивая» нас светом и теплом. Выразим  $W$  через солнечную постоянную  $\gamma$ . Согласно закону сохранения энергии за промежуток времени  $\Delta t$  через воображаемую сферу радиусом  $L$ , в центре которой находится Солнце, должна пройти та же энергия

$$W = \gamma 4\pi L^2 \Delta t. \quad (2)$$

Из (1) – (2) находим искомую абсолютную температуру  $T$  поверхности Солнца

$$T^4 = \frac{\gamma L^2}{\sigma R^2} \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{\gamma \cdot L^2}{\sigma R^2}}. \quad (3)$$

Поскольку радиус Солнца  $R$  нам не известен, то выразим его через видимый угловой диаметр  $\alpha$  Звезды

$$D = 2R = L \cdot \alpha \Rightarrow R = \frac{L \cdot \alpha}{2}. \quad (4)$$

С помощью (3) – (4) находим

$$T = \sqrt[4]{\frac{4\gamma}{\sigma \alpha^2}} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ K}. \quad (5)$$

Подчеркнем, что для расчета в (5) следует подставлять угловой диаметр звезды, выраженный в радианах

$$\alpha (\text{рад}) = \alpha^\circ \frac{\pi}{180^\circ}.$$

3.2 Вследствие непрерывного излучения энергии Солнце, согласно формуле Эйнштейна, «худеет», уменьшая свою массу. За промежуток времени  $\Delta t$  в термоядерной «солнечной печи» сгорает порция топлива  $\Delta m$

$$E = W = \gamma 4\pi L^2 \Delta t = \Delta m c^2.$$

Соответственно доля  $\eta = \frac{\Delta m}{m} = 10\%$  солнечной массы выгорит за время  $t$ , удовлетворяющее условию

$$\gamma 4\pi L^2 t = \eta m c^2 \Rightarrow t = \frac{\eta m c^2}{4\pi \gamma L^2}. \quad (6)$$

Однако производить расчет с помощью (6) мы не можем, так как в условии не указана масса Солнца. Выразим ее, рассматривая II-ой закон Ньютона (основной закон динамики) для движения Земли вокруг Солнца

$$m_3 \omega^2 L = G \frac{m_3 m}{L^2} \Rightarrow m = \frac{\omega^2 L^3}{G} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L^3}{G}. \quad (7)$$

С учетом (7) выражение (6) примет вид

$$t = \frac{\eta c^2}{4\pi \gamma L^2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{L^3}{G} = \frac{\pi \eta L c^2}{\gamma G T^2}, \quad (8)$$

где  $T = 3,15 \cdot 10^7 c$  — период обращения Земли вокруг Солнца. Расчет по формуле (8) дает

$$t = 4,6 \cdot 10^{19} c.$$

Сравнивая полученный результат с возрастом Вселенной ( $t^* \approx 4,5 \text{ млрд лет} = 1,4 \cdot 10^{17} c$ ) видим, что проблема «похудания» Солнца не представляется столь острой — в рамках многих «земных» задач его массу с неплохой точностью можно считать постоянной.

**3.3** Для оценки эффективной толщины  $h$  солнечной атмосферы воспользуемся барометрической формулой

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right). \quad (1)$$

Общепринятым считается следующий подход — за границу атмосферы принимается высота, на которой давление уменьшается в  $e = 2,718281\dots$  ( $e$  — основание натуральных логарифмов) раз.

С учетом (1) получаем

$$p(h) = \frac{p_0}{e} = p_0 \cdot e^{-1} = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right) \Rightarrow h = \frac{RT}{Mg}, \quad (2)$$

где  $M = 1,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$  — молярная масса атомарного (диссоциировавшего) водорода,

$g = G \frac{m}{R^2} = 270 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$  — ускорение свободного падения на поверхности Солнца.

Расчет дает

$$h = 1,8 \cdot 10^5 \text{ м} = 180 \text{ км}.$$

Как видим при такой большой температуре поверхности Солнца эффективная высота атмосферы оказалась даже меньше земной ( $h \approx 300 \text{ км}$ ), что можно понять, принимая во внимание величину силы всемирного тяготения на поверхности нашего светила.