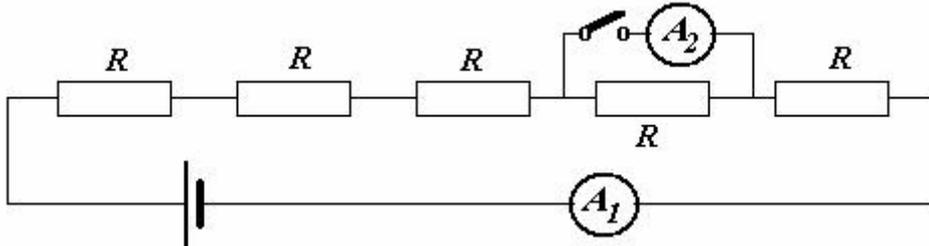


Решения задач.

9 класс.

Задание 1. «Паутина»

Согласно приведенным данным сопротивления кольцевых нитей значительно меньше сопротивления радиальных. Поэтому сопротивлением кольцевых нитей можно пренебречь. Тогда приведенная схема может быть заменена на эквивалентную.



В этой схеме сопротивление каждого обозначенного резистора есть сопротивление 12 соединенных параллельно отдельных звеньев радиальных нитей, т.е.

$$R = \frac{1}{12} \rho_1 \frac{4a}{\pi d_1^2} \approx 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}.$$

При разомкнутом ключе первый амперметр покажет значение тока $I_1 = \frac{U}{5R_1} \approx 28 \text{ А}$.

Если замкнуть ключ, то показания амперметров будут одинаковы и равны $I_2 = \frac{U}{4R_1} \approx 35 \text{ А}$.

Задание 2. «Аквариум»

После разрушения стенок-оснований трапеции, останется отличная от нуля сила давления на боковые стенки, которая по модулю равна разности сил давления на стенки-основания. Следовательно, эта сила равна

$$F = \rho g \frac{h}{2} \cdot h(a - b). \quad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорение, которое приобретет аквариум, будет равно

$$w = \frac{F}{m} = \frac{\rho g h^2 (a - b)}{2m}.$$

Задание 3. «Допотопные весы»

Обозначим массу левого кирпича m_1 , а правого m_2 , а расстояние от левого края доски до упора (в положении равновесия y). Запишем условия равновесия доски в обоих случаях

$$\begin{aligned} m_1 \left(x - \frac{a}{2} \right) &= m_2 \left(l - x - \frac{a}{2} \right) \\ m_1 \left(y - \frac{b}{2} \right) &= m_2 \left(l - y - \frac{b}{2} \right) \end{aligned}$$

Разделив второе равенство на первое, получим уравнение для определения неизвестной величины y :

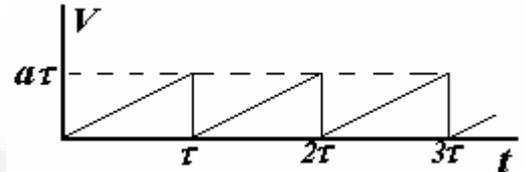
$$\frac{y - \frac{b}{2}}{x - \frac{a}{2}} = \frac{l - y - \frac{b}{2}}{l - x - \frac{a}{2}}.$$

Решением этого уравнения является величина

$$y = \frac{l-b}{l-a}x - \frac{l}{2} \cdot \frac{a-b}{l-a}.$$

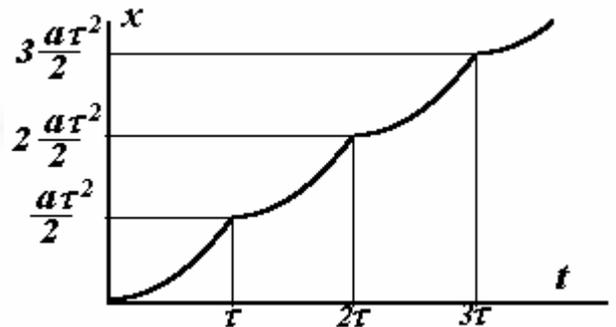
Задание 4. «Сочини закон Ома!»

1. График зависимости скорости частицы от времени представляет собой набор прямолинейных отрезков, коэффициент наклона которых к оси времени равен ускорению частицы a .



Зависимость координаты от времени изображается в виде набора парабол, каждая из которых описывается функцией

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \quad (1)$$



Средняя скорость движения частицы за большой промежуток времени равна средней скорости на временном интервале равноускоренного движения, т.е.

$$V_{cp.} = \frac{a\tau}{2}. \quad (2)$$

2. Время движения частицы на одном интервале равноускоренного движения определим из уравнения

$$l = \frac{a\tau^2}{2} \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2l}{a}}. \quad (3)$$

Тогда средняя скорость движения будет равна

$$V_{cp.} = \frac{l}{\tau} = \sqrt{\frac{al}{2}}. \quad (4)$$

3. Как известно, электрическое напряжение равно работе электрических сил по перемещению единичного заряда, поэтому

$$U = \frac{FL}{e} \Rightarrow F = \frac{eU}{L} \quad (5)$$

4. Ускорение электрона между столкновениями определяется по второму закону Ньютона

$$a = \frac{F}{m} \Rightarrow a = \frac{eU}{mL}. \quad (6)$$

Так как в течение промежутка времени τ электрон движется с постоянным ускорением, а затем полностью теряет свою скорость, его средняя скорость равна (см. (2))

$$V_{cp} = \frac{a\tau}{2} = \frac{eU\tau}{2mL}. \quad (7)$$

5. Сила электрического тока равна заряду, проходящему через поперечное сечение проводника в единицу времени. Так как концентрация электронов в проводнике постоянна, то сила тока пропорциональна средней скорости движения электронов. Так как средняя скорость пропорциональна приложенному напряжению, то сила тока пропорциональна приложенному напряжению, что и соответствует закону Ома.

6. Через поперечное сечение проводника за время t пройдут те электроны, которые находятся от рассматриваемого сечения на расстояниях меньших, чем $V_{cp}t$, то есть в объеме проводника $V_{cp}tS$, умножая этот объем на концентрацию электронов, получим число электронов в этом объеме $V_{cp}tSn$, для вычисления суммарного заряда необходимо умножить число электронов на заряд одного электрона. Таким образом, за время t через поперечное сечения проводника протечет заряд $q = V_{cp}tSne$. Следовательно, сила тока в цепи

$$I = \frac{q}{t} = V_{cp}Sne = \frac{e^2\tau Sn}{2mL}U. \quad (8)$$

7. Запишем закон Ома в «традиционной» форме и выразим сопротивление проводника через его размеры и удельное электрическое сопротивление

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho L}. \quad (9)$$

Сравнивая данное выражение с полученной ранее формулой (8), находим удельное электрическое сопротивление материала проводника

$$\rho = \frac{2m}{e^2\tau n}. \quad (8)$$

10 класс.

Задание 1. «Повторим физику»

Хотя на первый взгляд задания кажутся не связанными между собой, поскольку представляют разные разделы физики, однако их решение основано на одинаковой «математике». Ее можно условно назвать «уравнением неразрывности», требующим сохранения некоторой физической величины (в оригинале расхода воды) по всем поперечным сечениям потока

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 .$$

§1 Из условия задачи следует соотношение для скоростей автомобиля на различных участках дороги

$$v_0 = v_1 \eta_1 = v_2 \eta_2 , \quad (1)$$

Время движения находится из очевидного равенства, из которого следует выражение для начальной скорости автомобиля

$$t_2 - t_1 = \frac{l}{\frac{v_0}{\eta_1}} + \frac{l}{\frac{v_0}{\eta_2}} = (\eta_1 + \eta_2) \frac{l}{v_0} \Rightarrow v_0 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{t_2 - t_1} l . \quad (2)$$

Искомый график зависимости $t(x)$ представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. На границе раздела плохих участков автомобиль будет в момент времени

$$t^* = t_1 + \frac{l}{V_1} = t_1 + \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} (t_2 - t_1) . \quad (3)$$

§2. В процессе движения шайбы ее кинетическая энергия убывает под действием силы трения. Согласно теореме о кинетической энергии

$$\Delta E_K = A_{TP} , \quad (4)$$

можно найти начальную энергию шайбы

$$E_0 = E + m g l (\mu_1 + \mu_2) . \quad (5)$$

График зависимости кинетической энергии шайбы от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. На границе раздела шероховатых участков энергия шайбы будет равна

$$E^* = E - \mu_2 m g l . \quad (6)$$

§3. В данном случае должен быть одинаковым поток теплоты вдоль стержня, т.е.

$$\gamma_1 \frac{\Delta t_1}{l} = \gamma_2 \frac{\Delta t_2}{l} , \quad (7)$$

кроме того, имеем очевидное уравнение

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = t_1 - t_2 . \quad (8)$$

Решение системы (5)-(6) приводит к результату

$$\Delta t_1 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} (t_1 - t_2)$$

$$\Delta t_2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} (t_1 - t_2)$$
(9)

Соответственно для плотности потока теплоты через пластину получим

$$q = \gamma_1 \frac{\Delta t_1}{l} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \cdot \frac{t_1 - t_2}{l}$$
(10)

График зависимости температуры пластины от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. Температура на границе раздела равна

$$t^* = t_1 - \Delta t_1 = t_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} (t_1 - t_2)$$
(11)

Это уравнение можно привести к виду совпадающему с формулой (3)

$$t^* = t_1 + \frac{\frac{1}{\gamma_1}}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}} (t_2 - t_1)$$
(12)

§4. В данном случае имеем систему уравнений, полученную из граничных условий для напряженности электрического поля и связи между напряженностью и потенциалом

$$E_1 \varepsilon_1 = E_2 \varepsilon_2$$

$$E_1 l + E_2 l = \varphi_1 - \varphi_2$$
(13)

где E_1 и E_2 — искомые напряженности полей соответственно в первой и второй пластинах. Решение системы (9) приводит к результату

$$E_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$E_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$
(14)

График зависимости потенциала электрического поля внутри пластины от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. Потенциал границы раздела

$$\varphi^* = \varphi_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} (\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_1 + \frac{\frac{1}{\varepsilon_1}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}} (\varphi_2 - \varphi_1)$$
(15)

§5. В данном случае значение силы тока в обеих частях пластины должно быть одинаковым, поэтому на основании закона Ома можно записать

$$\frac{I}{\rho_1} \frac{\Delta \varphi_1}{l} = \frac{I}{\rho_2} \frac{\Delta \varphi_2}{l}$$
(16)

С учетом очевидного равенства

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (17)$$

найдем

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \Delta\varphi_2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя выражения (13) в равенство (11) находим плотность электрического тока через пластину (сравни с (10))

$$j = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{1/\rho_1 \cdot 1/\rho_2}{1/\rho_1 + 1/\rho_2} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (19)$$

Согласно теореме Гаусса для поверхностной плотности заряда σ на границе раздела пластин имеем

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_1 - E_2 = j(\rho_1 - \rho_2) = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (20)$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (21)$$

График зависимости потенциала электрического поля внутри пластины от координаты x представляет собой два участка прямых с разными угловыми коэффициентами. Потенциал границы раздела рассчитывается по формуле

$$\varphi^* = \varphi_1 + \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} (\varphi_2 - \varphi_1) \quad (22)$$

Задание 2. «Удвоение и падение»

Рассмотрим спицу с одним шариком в момент, когда она составляет некоторый угол α с вертикалью.

Согласно закону сохранения механической энергии имеем

$$\frac{mV^2}{2} + mgl \cos \alpha = mgl \cos \alpha_0, \quad (1)$$

где l — длина спицы, m — масса шарика, V — его скорость в данный момент, α_0 — угол начального отклонения спицы. Из (1), учитывая, что $V = \omega l$ найдем угловую скорость ω_1 спицы в рассматриваемый момент времени

$$\omega_1 = \sqrt{2 \frac{g}{l} (\cos \alpha_0 - \cos \alpha)}. \quad (2)$$

Проводя аналогичные рассуждения для случая падения спицы с двумя шариками, получим

$$\frac{(ml^2 + m\frac{l^2}{4})\omega_2^2}{2} = mg(l + \frac{l}{2})(\cos\alpha_0 - \cos\alpha). \quad (3)$$

Выражая из (3) значение угловой скорости ω_2 , получим

$$\omega_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{g}{l} (\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}. \quad (4)$$

Как видим из (2) и (4) отношение угловых скоростей ω_2 к ω_1 остается постоянным при падении спицы

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{6}{5}}. \quad (5)$$

Это говорит о том, что так же будут соотноситься и средние угловые скорости падения спиц. Следовательно, времена падения будут связаны обратным соотношением

$$\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow t_2 = t_1 \sqrt{\frac{5}{6}}. \quad (6)$$

Задание 3. «Конденсатор»

Потенциал, создаваемый нижней пластиной в точке A не меняется, тогда как потенциал, создаваемый верхней пластиной при неизменной «геометрии» пропорционален σ_1

$$\varphi_1 = \alpha \sigma_1 = \alpha \gamma \sigma_0. \quad (1)$$

Поскольку при $\gamma = 1$ заряды пластин одинаковы, то потенциалы, создаваемые ими в точке A , в этом случае также равны. Отсюда следует, что

$$\alpha = \frac{\varphi_0}{2\sigma_0}. \quad (2)$$

Поскольку потенциалы складываются алгебраически, то искомая зависимость линейна и имеет вид

$$\varphi(\gamma) = \frac{\varphi_0}{2}(1 + \gamma). \quad (3)$$

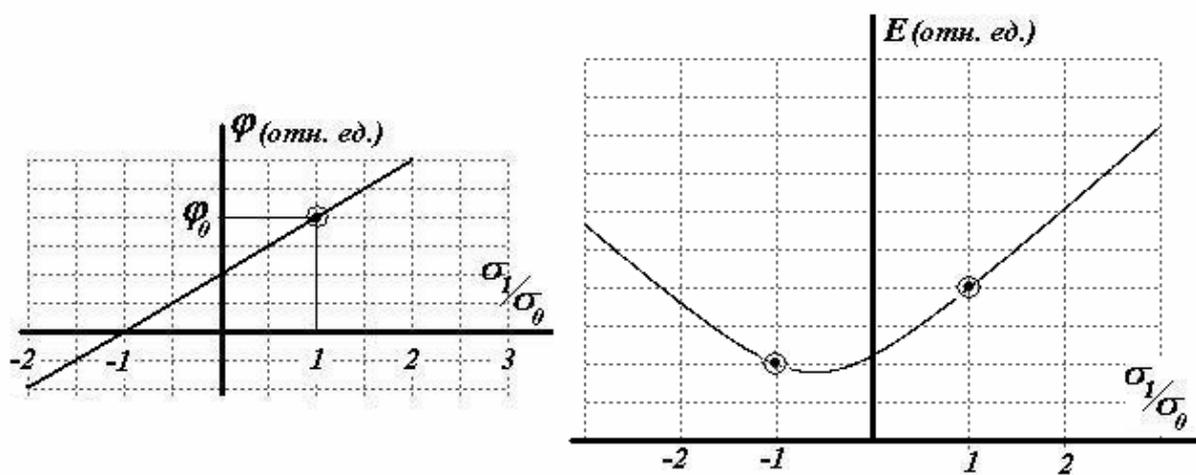
С напряженностями ситуация несколько «напряженнее». Поскольку при $\gamma = 1$ результирующее поле не исчезло, то это говорит о том, что точка A , находится в зоне т.н. «краевых эффектов», где векторы напряженностей каждой из пластин имеют не только нормальные (\vec{E}_\perp), но и тангенциальные (\vec{E}_\parallel) компоненты. Как и в первом пункте следует учесть, что напряженности полей пропорциональны плотностям зарядов, тогда выражения для соответствующих компонент напряженностей примут следующий вид

$$\begin{aligned} E_\parallel(\gamma) &= \frac{E_2}{2}(1 + \gamma) \\ E_\perp(\gamma) &= \frac{E_1}{2}(1 - \gamma) \end{aligned} \quad (4)$$

Соответственно искомая зависимость $E(\gamma)$ может быть найдена с помощью теоремы Пифагора

$$E(\gamma) = \sqrt{(E_{\parallel}(\gamma))^2 + (E_{\perp}(\gamma))^2} = \frac{\sqrt{E_1^2(1-\gamma)^2 + E_2^2(1+\gamma)^2}}{2}. \quad (5)$$

Графики полученных зависимостей показаны на рисунке.



Задание 4. «Суперпозиция»

а) В момент максимального удаления от поверхности пластины на расстояние h скорость (кинетическая энергия) электрона обратится в нуль. Следовательно, согласно закону сохранения энергии можем записать

$$\frac{mV_0^2}{2} = eEh \Rightarrow h = \frac{mV_0^2}{2eE}, \quad (1)$$

где m — масса электрона, а e — его заряд.

б) При движении электрона под действием силы Лоренца он будет описывать окружность радиуса R . Согласно основному закону динамики можем записать

$$\frac{mV_0^2}{R} = eBV_0 \Rightarrow R = \frac{mV_0}{eB}. \quad (2)$$

Следовательно, в данном случае максимальное удаление от поверхности пластины будет равно

$$R = \frac{mV_0}{eB}. \quad (3)$$

в) В случае одновременного действия двух полей магнитное поле будет «поворачивать» электрон, а электрическое — тормозить. Направим ось Ox вдоль пластины, а ось Oy — перпендикулярно. Если электрон оказался на расстоянии h от поверхности пластины, то согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{mV^2}{2} = eEh. \quad (4)$$

Второй закон Ньютона в проекции на ось Ox может быть записан в виде

$$m \frac{\Delta V_X}{\Delta t} = eB \frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (5)$$

Умножив уравнение (5) на Δt и просуммировав с учетом начальных условий, получим

$$mV_X = eBy. \quad (6)$$

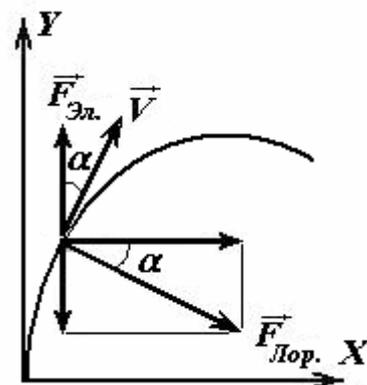
Поскольку в момент максимального удаления электрона от пластины $V_Y = 0$, то из (6) получим, что скорость V электрона в этот момент

$$V = V_X = \frac{eB}{m} h \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в закон сохранения энергии (4), получим квадратное уравнение для определения значения h . Положительный корень этого уравнения дает искомое значение максимального удаления электрона

$$h = \sqrt{\left(\frac{mE}{eB^2}\right)^2 + \left(\frac{mV_0}{eB}\right)^2} - \frac{mE}{eB^2}. \quad (8)$$

Отрицательный корень можно отбросить, так как электрон «на обратном пути» не сможет проскочить через пластину. Отметим, что в этом случае траектория электрона — арка эпициклоиды.



11 класс.

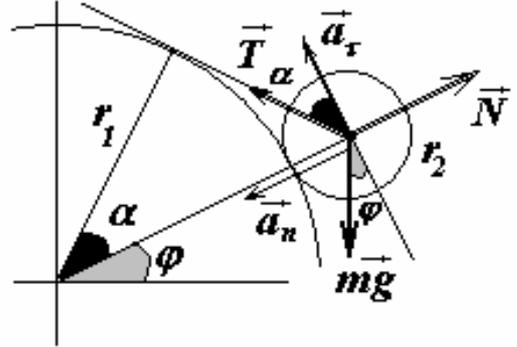
Задача 1. «Шарик на привязи»

Рассмотрим общий случай движения шарика вокруг цилиндра, т.е. движение с угловым ускорением β и в поле тяжести mg . Переход к частным случаям очевиден – либо $\beta \rightarrow 0$, либо $mg \rightarrow 0$ (либо и то и другое).

Положение шарика будем задавать с помощью угла φ - между горизонталью и отрезком, соединяющим центры вала и шарика. Зададим также угол α между радиусами вала, направленными к точке касания вала и шарика и точке, в которой нить касается поверхности вала (см. рис.). Понятно, что угол α полностью определяется отношением радиусов вала и

шарика. Так $\cos \alpha = \frac{r_1}{r_1 + r_2} = \frac{5}{8}$, или

$$\alpha \approx 51^\circ \approx 0,896 \text{ рад} .$$



Шарик движется под действием: силы тяжести $m\vec{g}$; силы натяжения нити \vec{T} ; силы реакции \vec{N} .

В общем случае ускорение шарика можно разложить на нормальную

$$a_n = \omega^2(r_1 + r_2) \quad (1)$$

и тангенциальную составляющие

$$a_\tau = \beta(r_1 + r_2). \quad (2)$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона

$$m(\vec{a}_n + \vec{a}_\tau) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} \quad (3)$$

в проекциях на радиальное и касательное направления

$$\begin{cases} m\omega^2(r_1 + r_2) = mg \sin \varphi + T \sin \alpha - N \\ m\beta(r_1 + r_2) = -mg \cos \varphi + T \cos \alpha \end{cases} \quad (4)$$

При отрыве шарика от поверхности вала сила реакции устремляется к нулю (до этого она должна быть положительной). Выразим из системы уравнений (4) значение силы реакции N :

$$T = \frac{m\beta(r_1 + r_2) + mg \cos \varphi}{\cos \alpha}$$

$$N = \frac{m\beta(r_1 + r_2) \sin \alpha + mg \sin(\varphi + \alpha)}{\cos \alpha} - m\omega^2(r_1 + r_2)$$

Из этого соотношения определим функцию

$$F = \frac{N \cos \alpha}{m} = \beta(r_1 + r_2) \sin \alpha + g \sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2) \cos \alpha, \quad (5)$$

знак которой определяет условие отрыва (повторим, отрыв произойдет, когда положительная функция уменьшится до нуля).

1. Когда вал расположен вертикально ($g = 0$) и начинает вращаться с постоянной ($\beta = 0$) угловой скоростью функция (5) имеет вид

$$F = -\omega^2(r_1 + r_2) \cos \alpha, \quad (6)$$

она отрицательна при любых значениях параметров системы. Следовательно, шарик оторвется от поверхности вала сразу после начала движения, т.е. в этом случае $\tau = 0$.

2. Если вал расположен вертикально ($g = 0$) и начинает вращаться с постоянным угловым ускорением, функция (5) имеет вид

$$F = \beta(r_1 + r_2)\sin\alpha - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha. \quad (7)$$

Учитывая, что угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = \beta t$, заключаем, что сначала эта функция положительна, а затем обращается в нуль. Следовательно, шарик сначала будет прижат к поверхности вала, а затем оторвется от нее, причем это произойдет в момент времени

$$F = \beta(r_1 + r_2)\sin\alpha - \beta^2\tau^2(r_1 + r_2)\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\tau = \sqrt{\frac{tg\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_1^2}}{\beta r_1}} \approx 0,65c \quad (8)$$

3а. Если вал расположен горизонтально, начинает вращаться с постоянной ($\beta = 0$) угловой скоростью, первоначально нить расположена вертикально (при $t = 0$ $\varphi = -\alpha$), функция (5) имеет вид

$$F = g\sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha \quad (9)$$

и в начальный момент времени отрицательна. Следовательно, шарик сразу после начала движения, т.е. при $\tau = 0$.

3б. Если же первоначально нить горизонтальна (при $t = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$), то значение функции (9) при $t = 0$

$$F = g\sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha =$$

$$= (g - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha) \approx 9,4 > 0 \quad (10)$$

Поэтому первоначально шарик будет прижат к поверхности вала. Отрыв произойдет, когда эта функция обратится в нуль (причем следует выбрать минимальный положительный корень этой функции), т.е

$$F = g\sin(\omega t + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{\left(\pi - \arcsin\frac{\omega^2 r_1}{g}\right) - \alpha}{\omega} \approx 0,73c$$

4. Наконец, нам необходимо рассматривать полную функцию (5). Вал расположен горизонтально, начинает вращаться с постоянным угловым ускорением, первоначально нить расположена вертикально ($\omega = \beta t$, $\varphi = \frac{\beta t^2}{2} - \alpha$); эта функция имеет вид

$$F = \beta(r_1 + r_2)\sin\alpha + g\sin(\varphi + \alpha) - \omega^2(r_1 + r_2)\cos\alpha. \quad (11)$$

В начальный момент времени эта функция положительна, следовательно, шарик прижат к поверхности вала, для определения момента отрыва нам необходимо найти минимальный положительный корень этой функции. Аналитическое решение уравнения $F = 0$ невозможно, необходимо использовать приближенные численные методы. Для анализа решения обозначим $\varphi + \alpha = \frac{\beta t^2}{2} = \xi$, тогда $\omega = \beta t = \sqrt{2\beta\xi}$ и перепишем уравнение

$F = 0$ в виде

$$\sin\xi = \frac{2\beta(r_1 + r_2)\cos\alpha}{g}\xi - \frac{\beta(r_1 + r_2)\sin\alpha}{g}, \quad (12)$$

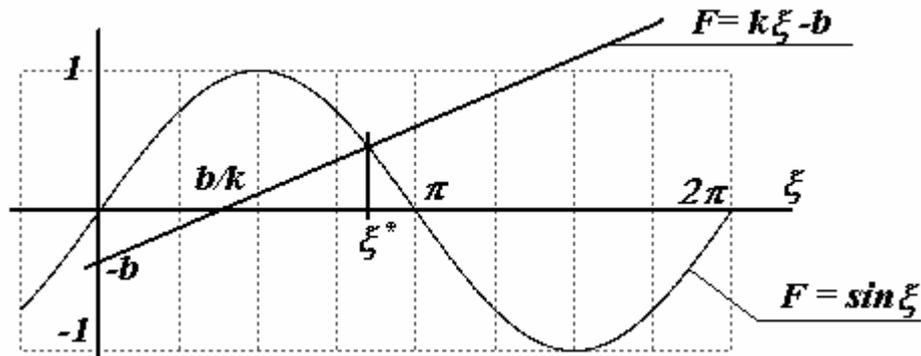
или обозначая постоянные коэффициенты

$$k = \frac{2\beta(r_1 + r_2)\cos\alpha}{g} \approx 3,06 \cdot 10^{-2}; \quad b = \frac{\beta(r_1 + r_2)\sin\alpha}{g} \approx 1,91 \cdot 10^{-2},$$

которое выглядит достаточно простым,

$$\sin \xi = k\xi - b. \quad (13)$$

Построим схематические графики функций, стоящих в правой и левой частях уравнения (13)



Вид графиков показывает, что уравнение (13) имеет положительный корень при любых параметрах системы. При заданных в условии числовых данных наклон графика линейной зависимости мал, поэтому следует ожидать, что корень уравнения ξ^* близок к π , поэтому это число можно взять в качестве начального приближения корня, которое потом можно уточнить любым методом. В результате получается следующее значение корня

$$\xi^* \approx 3,067, \text{ соответствующее значение времени отрыва } \xi^* \approx 3,067\tau = \sqrt{\frac{2\xi^*}{\beta}} \approx 1,4c.$$

Заметим, что шарик оторвется, совершив чуть меньше, чем пол оборота.

5. Чтобы шарик до отрыва совершил полный оборот необходимо, первый положительный корень уравнения был равен 2π . Изобразим графически такую ситуацию. Как следует из этого рисунка, для реализации описанной ситуации должны выполняться следующие соотношения

$$\frac{b}{k} = 2\pi, \quad (14)$$

в этом случае 2π будет являться корнем уравнения;

$$k \geq 1, \quad (15)$$

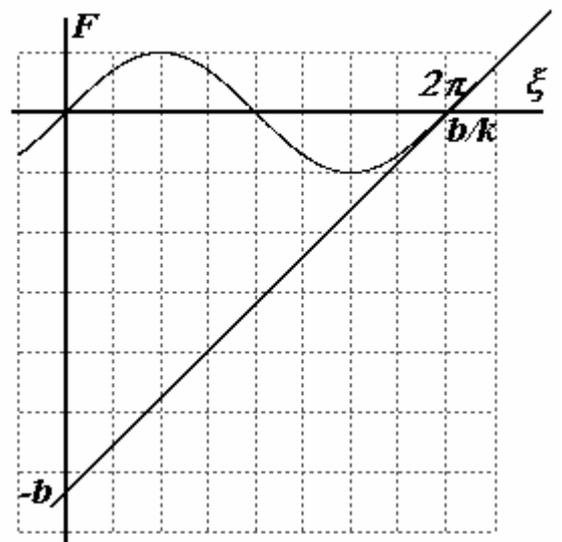
при выполнении этого условия будут отсутствовать меньшие корни.

Используя выражения для коэффициентов, условие (14) и его решение приобретут вид

$$\frac{\tan\alpha}{2} = 2\pi \Rightarrow \frac{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - r_1^2}}{r_1} = 4\pi \Rightarrow r_2 = (\sqrt{16\pi^2 + 1} - 1)r_1 \approx 58\text{см}$$

Из условия (15) находим

$$k = \frac{2\beta(r_1 + r_2)\cos\alpha}{g} = \frac{2\beta r_1}{g} \geq 1 \Rightarrow \beta \geq \frac{g}{2r_1} \approx 98\text{с}^{-2}.$$



Задача 2. «Блики на дне»

Очевидно, что блики на дне возникают благодаря преломлению на изогнутой поверхности воды, при этом «горбы» служат своеобразными собирающими линзами, а впадины – рассеивающими линзами. Следовательно, для описания бликов необходимо рассмотреть ход лучей после преломления на поверхности. Заметим, что волна движется перпендикулярно плоскости падения лучей, поэтому можно изучать ход лучей в одной вертикальной плоскости, совпадающей с направлением распространения волны. Кроме того, можно считать, что лучи падают на поверхность вертикально (точнее, можно принимать во внимание только вертикальные составляющие солнечных лучей).

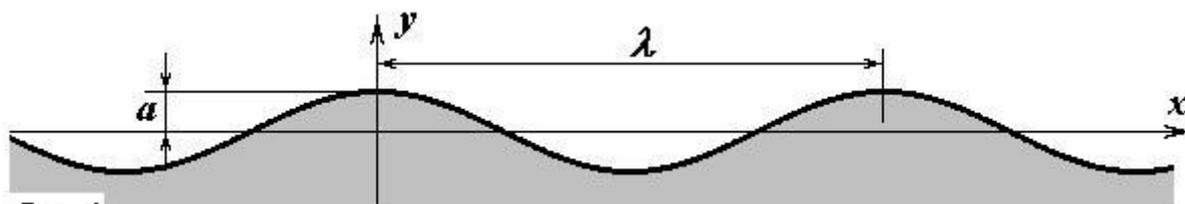


Рис. 1

1. Зададим уравнение профиля волны (рис.1):

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (1)$$

2. Пусть в точке A волны с координатой x вектор нормали \vec{n} к поверхности волны образует с вертикалью угол φ (рис. 2). Найдем зависимость этого угла от координаты.

Понятно, что этот угол равен углу, который образует касательная с горизонталью. Как известно, тангенс угла наклона касательной графику функции к оси аргумента равен первой производной от изучаемой функции.

Так как в рассматриваемой задаче длина волны значительно больше ее амплитуды, угол φ можно считать малым, следовательно, здесь и далее тангенс и синус этого угла можно принимать равными самому углу. Таким образом, искомая зависимость имеет вид

$$\varphi(x) = -y' = a \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (2)$$

Заметим, что максимальное значение этого угла $\varphi_{\max} = a \frac{2\pi}{\lambda} \approx 0,3$. При этом погрешности замен синусов и тангенсов на значение самого угла не превышает 4%.

3. Пусть вертикальный луч попадает на поверхность воды в точке A с координатой x . В этой точке вектор нормали направлен под углом φ к вертикали, следовательно, он и является углом падения. Найдем угол α между лучом преломленным и вертикалью (рис.3). Учитывая, что все углы малы и используя закон преломления, найдем угол преломления $\gamma = \frac{\varphi}{n}$, тогда искомый угол можно рассчитать по формуле

$$\alpha = \varphi - \gamma = \frac{n-1}{n} \varphi. \quad (3)$$

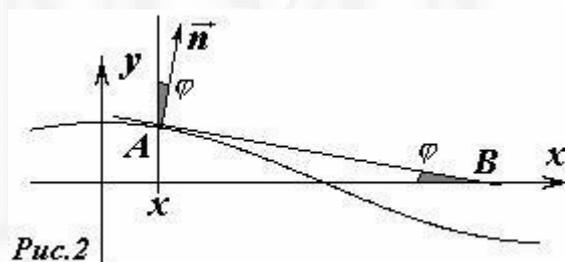


Рис. 2

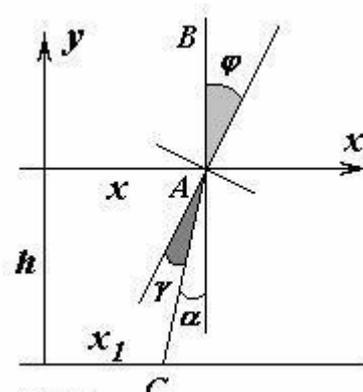


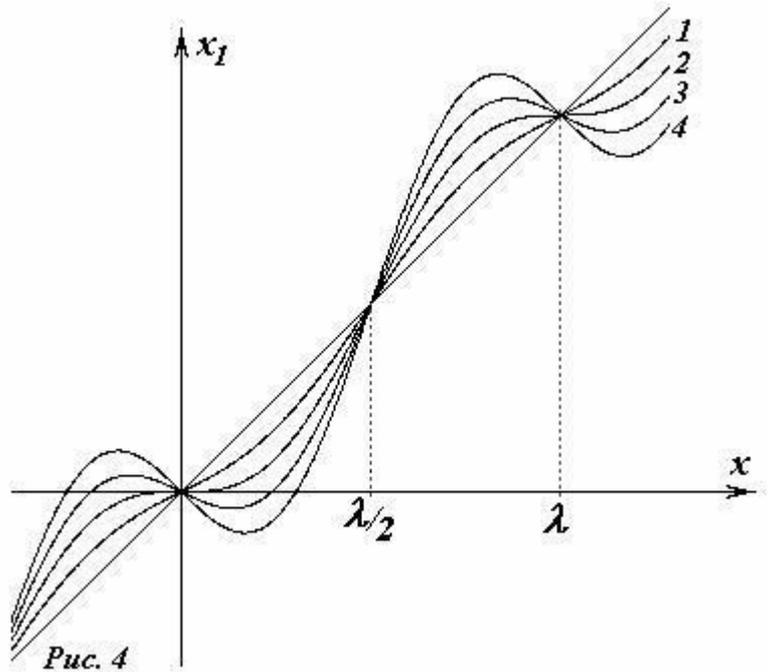
Рис.3

4. Учитывая, что рассматриваемые глубины значительно превышают амплитуду волны, последней можно пренебречь при определении координаты точки падения луча на дно. Как легко заметить (рис.3)

$$x_1 = x - h \cdot \operatorname{tg} \alpha \approx x - h \alpha . \quad (4)$$

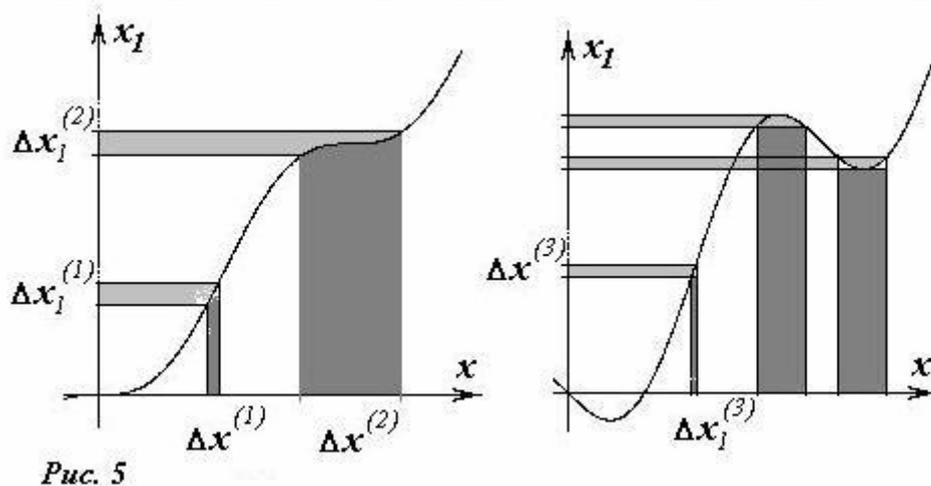
5. Запишем функцию зависимости x_1 от x в явном виде

$$x_1 = x - h \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (5)$$



Схематические графики этой функции при различных значениях глубины показаны на рис.4 (номера графиков даны в порядке возрастания глубины).

6. Самой существенной особенностью данных зависимостей является переход от монотонного возрастания к появлению максимумов и минимумов.



Действительно, рассмотрим малый интервал (полоску) на дне шириной Δx_1 , на нее попадут лучи, которые пересекли поверхность воды в соответствующем интервале Δx .

Понятно, что чем больше Δx , тем больше света попадет на полоску Δx_1 (рис. 5). Поэтому средняя освещенность полоски дна возле точки x_1 пропорциональна отношению $\frac{\Delta x}{\Delta x_1}$.

Поэтому чем более полого зависимость $x_1(x)$ в данной точке, тем ее освещенность больше. Вблизи максимума она становится очень большой, а вблизи точки перегиба еще больше. Поэтому максимум интенсивности будет достигаться на той глубине, где график зависимости $x_1(x)$ будет иметь точки перегиба.

Кстати, на больших глубинах для расчета интенсивности в некоторых точках дна требуется провести суммирование по трем, пяти и большему числу интервалов на поверхности. Не будем заниматься этой работой. Достаточно, что мы получили метод расчета глубины максимальной фокусировки - в зависимости $x_1(x)$ должны появляться точки перегиба. В приближении малых углов эта зависимость имеет вид (5)

Производная от этой функции равна

$$x_1' = 1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (6)$$

При малых глубинах h функция (5) экстремумов не имеет (рис. 5), при h больших некоторого критического значения появляются точки минимумов и максимумов. Это произойдет тогда, когда производная функция (6) будет принимать в некоторых точках нулевые значения. Иными словами, когда уравнение $x_1' = 0$ имеет корни, в зависимости $x_1(x)$ появляются экстремумы - граничное значение между этими двумя случаями - точки перегиба. Итак, условие фокусировки получает абстрактную математическую формулировку - у функции (6) появляются нули!

Как следует из анализа функции (5) если первая производная равна нулю при $x = x_1 = 0$, эта точка будет точкой перегиба, то есть именно в этом случае яркость полосок будет максимальна. Для определения этой «оптимальной» глубины необходимо решить простейшее уравнение

$$1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} = 0, \quad (7)$$

из которого находим глубину «фокусировки»

$$h_0 = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \cdot \frac{n}{a(n-1)} \approx 2,0 \text{ м}. \quad (8)$$

Альтернативный способ.

Рассмотрим фокусировку лучей, попадающих в малую область вблизи максимума волны. Для этого будем считать в функции (5) x малым, тогда эта функция упрощается

$$x_1 = x - h \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \approx \left(1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \right) x. \quad (9)$$

Далее замечаем, что если коэффициент в скобках обращается в нуль, то все падающие лучи собираются в точке $x_1 = 0$, то есть фокусируются. Из этого непосредственно следует выражение (8).

8. Глубина водоема $h = 0,5 \text{ м}$ является малой по сравнению с найденной глубиной фокусировки. Поэтому в этом случае функция (5) экстремумов не имеет, поэтому, как было отмечено ранее, освещенность дна пропорциональна $\frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{1}{x_1'}$, и может быть

записана в виде

$$I = \frac{I_0}{1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right)}. \quad (10)$$

Строго говоря, в это выражение следует подставить x как функцию x_1 , выраженную из функции (5). Однако, учитывая малость углов отклонения лучей от вертикали, малость глубины, для построения схематического графика можно положить $x_1 \approx x$. Требуемый график показан на рис. 6.

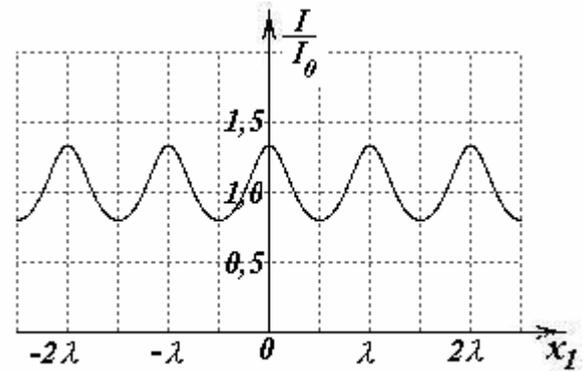


Рис. 6

9. При глубине озера $h = 2,5$ м функция (5) имеет достаточно близко расположенные максимумы и минимумы. Следовательно, на этой глубине каждая яркая полоса «раздваивается», так как каждому минимуму и максимуму соответствует резкое увеличение освещенности. Схематически структура пучка показана на рис. 7.

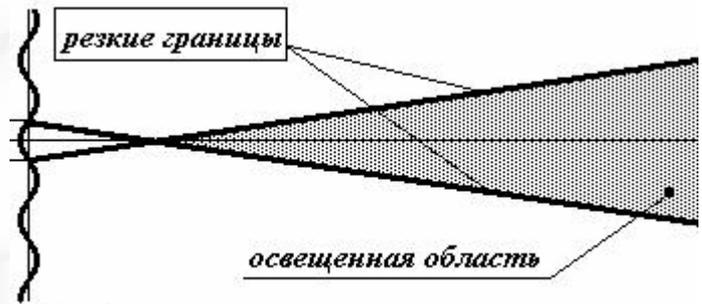


Рис. 7

Для определения положения максимума освещенности x_1 на дне необходимо решить систему уравнений (5) – (6). Из условия обращения производной (6) в нуль находим

$$1 - ha \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\lambda}{2\pi} \arccos \frac{h_0}{h} \approx \pm 0,10 \text{ м},$$

Подставляя это значения в функцию (5), находим

$$x_1 = x - h \frac{2\pi a}{\lambda} \cdot \frac{n-1}{n} \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) \approx \mp 1,7 \text{ см}.$$

Окончательно, ширина полоски равна $\Delta x_1 = 2x_1 \approx 3,5 \text{ см}$.

Задача 3. «Побег и погоня»

1. Расчет массы очевиден $m = \gamma V = \pi R^2 h \gamma$.

2. Обсудим физические причины, приводящие в движение монету. При включении тока возникает переменное магнитное поле, которое индуцирует в монете электрические токи, которые в свою очередь, взаимодействуют с магнитным полем. Это взаимодействие приведет к появлению силы Ампера, сообщающей монете ускорение. Так как по условию ток, а, следовательно, и магнитное поле возрастают быстро, то можно пренебречь смещением монеты за время возрастания тока в кабеле. То есть, достаточно рассчитать импульс, который приобретет монета. На основании правила Ленца можно утверждать, что импульс монеты будет направлен от кабеля (чтобы уменьшить возрастание магнитного потока), поэтому дальнейшие расчеты будем проводить без учета знаков, то есть «по модулю». Приступим к расчету скорости монеты.

Строго говоря, магнитное поле в пределах молекулы является неоднородным. Однако, принимая во внимание малые размеры монеты, по сравнению с расстоянием до кабеля, при расчете распределения токов в монете неоднородностью поля пренебрежем. Учитывая осевую симметрию монеты, следует считать, что распределение токов в монете является круговым, причем величина плотности тока зависит расстояния до центра монеты. Выделим в монете тонкое кольцо радиуса r , толщиной dr и найдем силу тока в этом кольце. Магнитный поток через площадь кольца равен

$$\Phi = \pi r^2 B_0 = \pi r^2 \frac{\mu_0 I}{2\pi l} = \frac{\mu_0 I}{2l} r^2, \quad (1)$$

здесь $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi l}$ - индукция магнитного поля в центре монеты, рассчитываемая по известной формуле индукции поля прямого тока.

При изменении силы тока в кабеле, в рассматриваемом кольце возникнет ЭДС индукции, равная по закону Фарадея

$$E_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I'}{2l} r^2, \quad (2)$$

здесь $I' = \frac{dI}{dt}$ - скорость изменения тока в кабеле, кроме того, согласно сделанной ранее оговорке опущен знак минус.

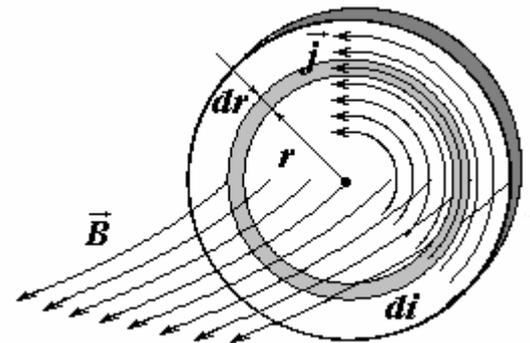
Электрическая проводимость выделенного кольца рассчитывается по известной формуле

$$g = \frac{1}{R_{эл.}} = \frac{h dr}{\rho 2\pi r}, \quad (3)$$

здесь $R_{эл.} = \rho \frac{l}{S}$ - электрическое сопротивление, не путать с радиусом монеты – букв не хватает.

По закону Ома, сила тока в выделенном кольце

$$di = g E_{ind} = \frac{h dr}{\rho 2\pi r} \cdot \frac{\mu_0 I'}{2l} r^2 = \frac{\mu_0 I' h}{4\pi \rho l} r dr. \quad (4)$$

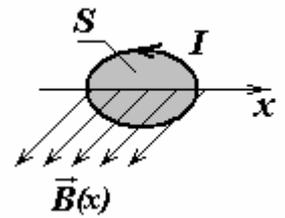


Заметим, что в однородном магнитном поле, сила, действующая на контур с током, ориентированный так, как наша монета, равна нулю.

Однако можно показать, что в неоднородном поле появляется сила, которая для малого контура может быть записана в виде

$$F = IS \frac{dB}{dx}, \quad (5)$$

здесь I, S - сила тока в контуре и его площадь, $\frac{dB}{dx}$ - производная



от величины индукции поля по координате, вычисленная в центре контура. В нашем случае

$$\frac{dB}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x^2}. \quad (6)$$

Таким образом, сила, действующая на выделенное кольцо, равна

$$dF = di \cdot (\pi r^2) \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi x^2} = \frac{\mu_0 I' h}{4\pi \rho l} r dr \cdot \pi r^2 \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi x^2} = \frac{\mu_0^2 I I' h}{8\pi \rho l^3} r^3 dr. \quad (7)$$

Проинтегрировав по всему кольцу, получим выражение, для полной силы, действующей на монету

$$F = \frac{\mu_0^2 I I' h}{8\pi \rho l^3} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0^2 I I' h}{8\pi \rho l^3} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\mu_0^2 I I' h R^4}{32\pi \rho l^3} \quad (8)$$

По второму закону Ньютона изменение импульса тела, равно импульсу силы, который в данном случае можно вычислить, даже не зная явного вида зависимости силы тока в кабеле от времени

$$mV = \int F dt = \frac{\mu_0^2 h R^4}{32\pi \rho l^3} \int I I' dt = \frac{\mu_0^2 h R^4}{32\pi \rho l^3} \int I \frac{dI}{dt} dt = \frac{\mu_0^2 h R^4}{32\pi \rho l^3} \int I dI = \frac{\mu_0^2 h R^4}{32\pi \rho l^3} \cdot \frac{I_0^2}{4} = \frac{\mu_0^2 h R^4 I_0^2}{128\pi \rho l^3}. \quad (9)$$

Наконец, используя выражение для массы, получим выражение для скорости монеты

$$V_0 = \frac{\mu_0^2 h R^4 I_0^2}{128\pi \rho l^3} \cdot \frac{1}{\pi R^2 h \gamma} = \frac{\mu_0^2 R^2 I_0^2}{128\pi^2 \rho l^3 \gamma}. \quad (10)$$

3. При движении монеты в стационарном поле также будет возникать ЭДС индукции и как следствие электрические токи, в этом случае за счет неоднородности магнитного поля. Следовательно, на катящуюся монету будет действовать тормозящая сила, часто называемая «магнитной вязкостью». Направление этой силы, противоположное скорости также можно обосновать правилом Ленца. Для расчета этой силы применим «энергетический» подход - работа (и мощность) тормозящей силы равна количеству (мощности) выделяемой в монете джоулевой теплоты. Таким образом, нам необходимо рассчитать мощность выделяющейся теплоты. Еще раз отметим, что ЭДС индукции возникает вследствие движения монеты в неоднородном поле, в остальном же расчет токов остается прежним, поэтому проведем его без подробных комментариев.

Магнитный поток через выделенное кольцо

$$\Phi = \pi r^2 B(x) = \pi r^2 \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I_0}{2x} r^2. \quad (11)$$

ЭДС индукции в кольце

$$E_{ind} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x} \right) = -\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x^2} \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x^2} V. \quad (12)$$

Мощность джоулевой теплоты, выделяющейся в кольце

$$dP = gE_{ind}^2 = \frac{hdr}{2\pi r \rho} \cdot \left(\frac{\mu_0 I_0 r^2}{2x^2} V \right)^2 = \frac{\mu_0^2 I_0^2 h}{8\pi \rho x^4} V^2 r^3 dr. \quad (13)$$

После интегрирования по всей плоскости монеты получим полную мощность

$$P = \frac{\mu_0^2 I_0^2 h}{8\pi \rho x^4} V^2 \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0^2 I_0^2 h R^4}{32\pi \rho x^4} V^2, \quad (14)$$

которую приравняем к мощности силы $P = FV$, и найдем явное выражение для этой силы

$$F = \frac{\mu_0^2 I_0^2 h R^4}{32\pi \rho x^4} V. \quad (15)$$

Как следует из этой формулы, тормозящая сила пропорциональна скорости и зависит от координаты кольца. Запишем уравнение второго закона Ньютона для движущегося кольца

$$m \frac{dV}{dt} = -\frac{C}{x^4} V, \quad (16)$$

где обозначено $C = \frac{\mu_0^2 I_0^2 h R^4}{32\pi \rho}$ - постоянный коэффициент. Так как нас интересует только

конечное положение кольца (когда его скорость станет равной нулю), можем преобразовать уравнение (16), избавившись в нем от времени:

$$m \frac{dV}{dt} = m \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \frac{dV}{dx} V = -\frac{C}{x^4} V \Rightarrow m \frac{dV}{dx} = -\frac{C}{x^4}. \quad (17)$$

Последнее же уравнение может быть легко проинтегрировано с учетом начальных и конечных условий

$$m dV = -C \frac{dx}{x^3} \Rightarrow -mV_0 = -C \int_l^L \frac{dx}{x^4} = -C \left(\frac{1}{l^3} - \frac{1}{L^3} \right). \quad (18)$$

Подставляя значения константы и начальной скорости, из уравнения (18) находим конечное положение монеты $L = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \cdot l$ и путь пройденный ею

$$\Delta x = L - l = \left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}} - 1 \right) l \quad (19)$$

Подстановка численного значения начального расстояния приводит к результату $\Delta x \approx 5,0 \text{ см}$.