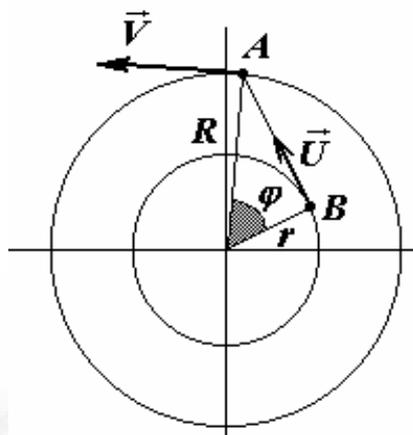


## 9 класс

### 1. «Погоня»

Для решения задачи следует сообразить, что в данной системе реализуется устойчивый режим движения, если точка **В** будет двигаться по окружности меньшего радиуса, но с той же угловой скоростью, что и точка **А**. Иными словами, в этом случае должно выполняться соотношение

При этом точка **В** будет «отставать» от точки **А** на угол



В системе отсчета, связанной с точкой **А**, точка **В** движется по окружности радиуса  $r' = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \left(\frac{U}{V}\right)^2}$  (это и будет неизменное расстояние между точками) с той же угловой скоростью, следовательно скорость точки **В** относительно точки **А** равна  $U' = \frac{V}{R} \cdot R\sqrt{1 - \left(\frac{U}{V}\right)^2} = \sqrt{V^2 - U^2}$ .

### 2. «Комната»

А) Полученные зависимости легко объяснить, если предположить, что количество теплоты, передаваемое в единицу времени от одного тела к другому, пропорционально разности температур этих тел.

Действительно, пусть количество теплоты, полученное за некоторый промежуток времени комнатным воздухом от нагревателя  $q_1 = k_1(t_0 - t)$ , а количество теплоты, уходящей в окружающее пространство за тот же промежуток времени  $q_2 = k_2(t - t_1)$ , где  $k_1, k_2$  - некоторые постоянные коэффициенты. Приравнявая эти потоки теплоты, получим уравнение для определения температуры воздуха в комнате:

из которого следует

(1)

где обозначено  $z = \frac{k_2}{k_1}$ . Приведенные графики удовлетворяют этой зависимости

при  $z = 2$ .

Следовательно, высказанные предположения полностью описывают полученные экспериментальные зависимости. При температуре нагревателя  $t_0 = 70^\circ\text{C}$  зависимость температуры воздуха внутри сосуда  $t$  от наружной температуры  $t_1$  описывается линейной функцией



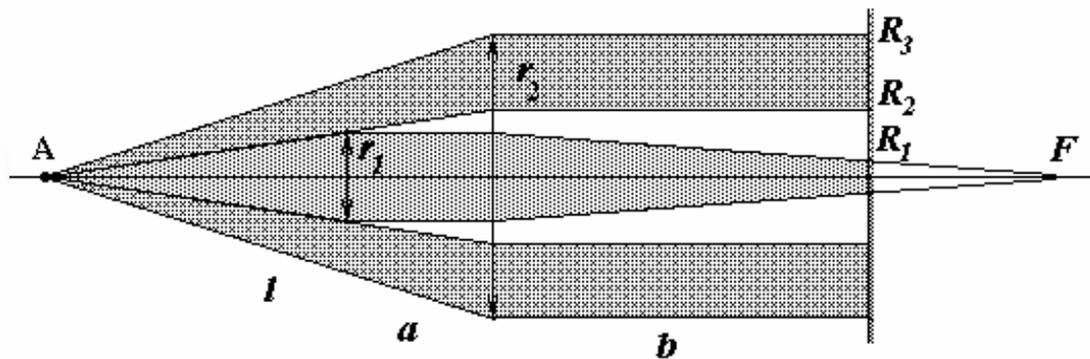
построить график которой не составляет труда.

При изменении толщины стенки изменится коэффициент теплопередачи  $k_2$ , причем разумно предположить, что этот коэффициент обратно пропорционален толщине стены, то есть при увеличении толщины в два раза, коэффициент  $k_2$  (а, следовательно, и параметр  $z$ ) уменьшится в два раза. В этом случае зависимость температуры воздуха внутри сосуда  $t$  от наружной температуры  $t_1$  описывается линейной функцией



### 3. «Линзы»

Рассмотрим ход лучей через центрированную систему линз.



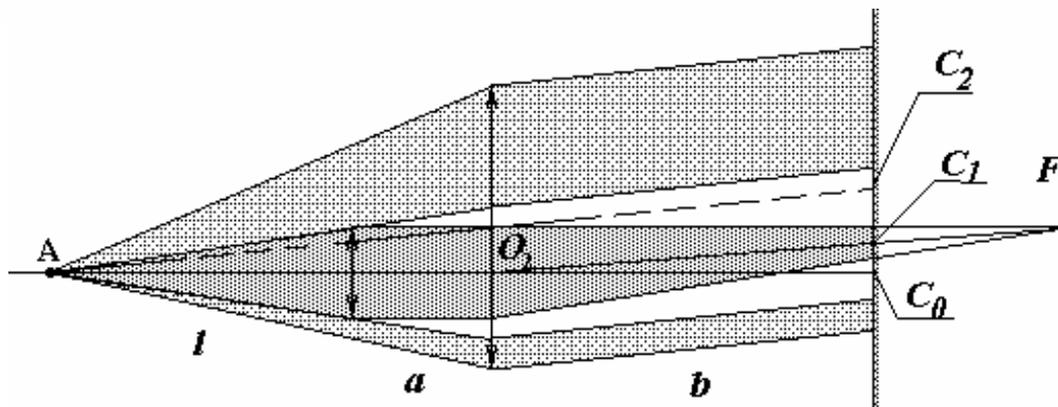
Лучи, попадающие на первую линзу, после преломления в ней образуют параллельный пучок лучей, который после преломления во второй линзе образует сходящийся конус лучей. Следовательно, эти лучи образуют на экране освещенный кружок, радиус которого легко найти с помощью рисунка:

$$\frac{R_1}{f_2 - b} = \frac{r_1}{f_2}; \Rightarrow R_1 = r_1 \frac{f_2 - b}{f_2} \approx 0,33 \text{ см}.$$

Лучи, не попавшие на первую линзу, но преломившиеся во второй образуют на экране кольцо с внешним радиусом, равным радиусу второй линзы  $R_3 = r_2 = 3,0 \text{ см}$ . Внутренний радиус кольца найти также не трудно

$$\frac{R_2}{l + a} = \frac{r_1}{f_1}; \Rightarrow R_2 = r_1 \frac{l + a}{f_1} \approx 1,5 \text{ см}.$$

После смещения второй линзы ход лучей также изменится.



Однако можно заметить, что границы освещенных областей, по-прежнему останутся окружностями тех же радиусов, произойдет только их смещение.

Центры центрального освещенного кружка и внутренней границы освещенного кольца  $C_1$  сместятся относительно первоначального положения  $C_0$  на величину  $\delta x_1$ , которую можно найти с помощью рисунка

$$\frac{\delta x_1}{b} = \frac{x}{f_2}; \Rightarrow \delta x_1 = x \frac{b}{f_2} \approx 0,33 \text{ см}.$$

#### 4. «Доски».

Уравнения движения досок имеют стандартный вид (в традиционных обозначениях

$$\begin{aligned} ma &= F - 2\mu mg - \mu mg - T \\ ma &= -\mu mg + T \end{aligned}$$

из которых следует, что скольжение досок начнется при  $F = 4\mu mg$ .

Результат не изменится, если силу приложить к верхней доске.

## 11 класс.

### 1. «Фототок»

Обозначим силу тока через правый резистор  $i_0$ , а суммарную силу фототока  $i$ . Плотность фототока найдем из следующих соотношений:

$j = en$  - где  $n$  - число электронов, которые вылетают с единицы площади пластины в единицу времени, которое пропорционально числу падающих

фотонов  $n = \eta \frac{I_0 \lambda}{hc}$ . Поэтому плотность фототока описывается формулой

$$j = e\eta \frac{I_0 \lambda}{hc}, \text{ а его сила}$$

$$i = e\eta \frac{I_0 \lambda}{hc} al. \quad (1)$$

При оговоренных условиях сила тока через пластину линейно возрастает от  $i_0$  до  $(i_0 + i)$ , поэтому падение напряжения на пластине можно рассчитать по формуле

$$U = \frac{(i_0 + i) + i_0}{2} R_0 = \left(i_0 + \frac{i}{2}\right) R_0 \quad (2)$$

Для всей цепи можно записать  $U_0 = i_0 R + \left(i_0 + \frac{i}{2}\right) R_0 + (i_0 + i) R$ , откуда можно найти значение силы тока через левый резистор

$$i_0 = \frac{U_0 - i \left(\frac{R_0}{2} + R\right)}{R_0 + 2R}. \quad (4)$$

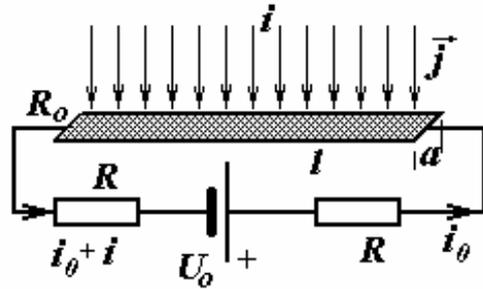
и через правый

$$i_0 + i = \frac{U_0 - i \left(\frac{R_0}{2} + R\right)}{R_0 + 2R} + i = \frac{U_0 + i \left(\frac{R_0}{2} + R\right)}{R_0 + 2R}. \quad (5)$$

Подставив значение силы фототока (1), получим ответ задачи

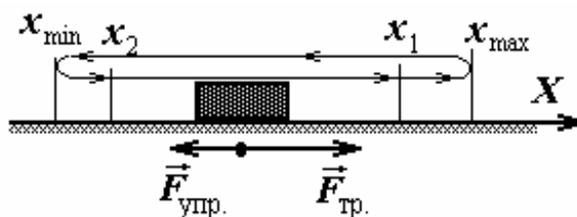
$$i_0 = \frac{U_0 - \frac{e\eta I_0 al \lambda}{hc} \left(\frac{R_0}{2} + R\right)}{R_0 + 2R}; \quad (6)$$

$$i_0 + i = \frac{U_0 + \frac{e\eta I_0 al \lambda}{hc} \left(\frac{R_0}{2} + R\right)}{R_0 + 2R}$$



## 2. «Застой».

Будем рассматривать движение бруска в системе отсчета, связанной с неподвижным упором. Пусть в некоторый момент времени брусок покоится относительно ленты (т.е. движется со скоростью ленты в



выбранной системе отсчета). В это время сила трения, действующая на брусок, является силой трения покоя, поэтому максимальна. Такое движение бруска возможно пока увеличивающаяся сила упругости пружинки не превысит силу трения покоя. (Обозначим координату этой точки  $x_1$ ). После ее прохождения брусок начнет скользить относительно ленты, поэтому сила трения скачком уменьшится до силы трения скольжения. Однако, некоторое время брусок будет продолжать двигаться в прежнем направлении по инерции (т.к. он имел скорость, равную скорости ленты). Сместившись на максимальное расстояние  $x_{max}$ , он начнет двигаться в обратном направлении с ускорением, определяемым силами трения и упругости, до некоторого положения  $x_{min}$ . Затем направление его движения опять изменится, его скорость начнет возрастать до тех пор, пока не станет равной скорости ленты (точку, в которой это произойдет, обозначим  $x_2$ ), после чего процесс повторится - брусок станет двигаться до точки  $x_1$  со скоростью ленты и т.д. Заметим, что потери механической энергии бруска из-за трения скольжения компенсируются работой сил трения покоя.

Координату точки  $x_1$ , в которой начинается скольжение бруска относительно ленты, найдем из условия равенства силы упругости и силы трения покоя:

$$kx_1 = \mu_0 mg, \Rightarrow x_1 = \frac{\mu_0 mg}{k}. \quad (1)$$

Пока брусок скользит относительно ленты, его уравнение движения имеет вид, записанный на основании 2 закона Ньютона:

$$ma = -kx + \mu mg. \quad (2)$$

Следует отметить, что на этом участке сила трения не изменяет своего направления. Уравнение (2) перепишем в виде

$$a = -\frac{k}{m} \left( x - \frac{\mu mg}{k} \right), \quad (3)$$

совпадающем с уравнением гармонических колебаний для величины  $\left( x - \frac{\mu mg}{k} \right)$ . Поэтому его полное решение имеет вид

$$x - \frac{\mu mg}{k} = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (4)$$

где обозначена

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

собственная частота колебаний бруска на пружине. Произвольные постоянные  $A, B$  в выражении (4) определяются из начальных условий. Из выражения (4) следует, что скорость бруска зависит от времени по закону

$$v = -A\omega_0 \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t. \quad (6)$$

Учитывая, что в момент начала скольжения (будем считать этот момент началом отсчета времени  $t = 0$ ) координата бруска равна  $x_1$ , определяемая формулой (1), а его скорость равна скорости ленты  $v_0$ , из формул (4), (6) легко определить неизвестные коэффициенты  $A, B$ . Окончательно законы изменения координаты и скорости бруска от времени имеет вид (напомним, что эти законы справедливы только для этапа скольжения бруска относительно ленты)

$$x = \frac{\mu mg}{k} + \frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k} \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

$$v = -\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k} \omega_0 \sin \omega_0 t + v_0 \cos \omega_0 t \quad (7)$$

Преобразуя тригонометрическую сумму традиционным образом перепишем еще раз закон движения бруска

$$x = \frac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (8)$$

где  $\varphi$  не существенный для дальнейшего решения задачи фазовый сдвиг. Теперь не составляет труда найти максимальное и минимальное смещения бруска

$$x_{max} = \frac{\mu mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$

$$x_{min} = \frac{\mu mg}{k} - \sqrt{\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad (9)$$

Подстановка численных данных приводит к следующему результату  
 $x_{max} \approx 3,2 \text{ см}; \quad x_{min} \approx 1,8 \text{ см}.$

Далее нам необходимо найти момент времени  $t_1$ , когда скорость бруска станет равной скорости ленты  $v_0$ . Для этого следует решить второе уравнение системы (7), полагая в нем  $v = v_0$ :

$$v_0 = -\frac{(\mu_0 - \mu)mg}{k} \omega_0 \sin \omega_0 t_1 + v_0 \cos \omega_0 t_1. \quad (10)$$

В интересующем нас диапазоне решение этого уравнения имеет вид

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0} \arctg\left(\frac{(\mu_0 - \mu)mg\omega_0}{kv_0}\right). \quad (11)$$

Подстановка этого значения времени в закон движения бруска дает значение координаты  $x_2$ , в которой скорости бруска и ленты сравниваются (прямая подстановка требует определенной аккуратности в проведении тригонометрических преобразований)

$$x_2 = -\frac{\mu_0 mg}{k} + 2 \frac{\mu mg}{k}. \quad (12)$$

Заметим, что этот же результат можно получить более простым способом, рассматривая закон изменения энергии бруска и пружины

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} + \mu mg(x_1 - x_2). \quad (13)$$

Далее брусок движется с постоянной скоростью, поэтому его закон движения на этом участке выражается формулой

$$x = x_2 + v_0(t - t_1), \quad (14)$$

до тех пор пока его координата не достигнет значения  $x_1$  (с которого мы и начали рассмотрение движения бруска). Это произойдет в момент времени

$$\begin{aligned} t_2 = t_1 + \frac{x_1 - x_2}{v_0} = \\ = \frac{2\pi}{\omega_0} - \frac{2}{\omega_0} \operatorname{arctg} \left( \frac{(\mu_0 - \mu)mg\omega_0}{kv_0} \right) + \frac{2(\mu_0 - \mu)mg}{kv_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что это выражение и определяет период колебаний бруска. Численное значение периода колебаний  $T \approx 0,67c$ , что незначительно превышает период свободных колебаний бруска на пружине.

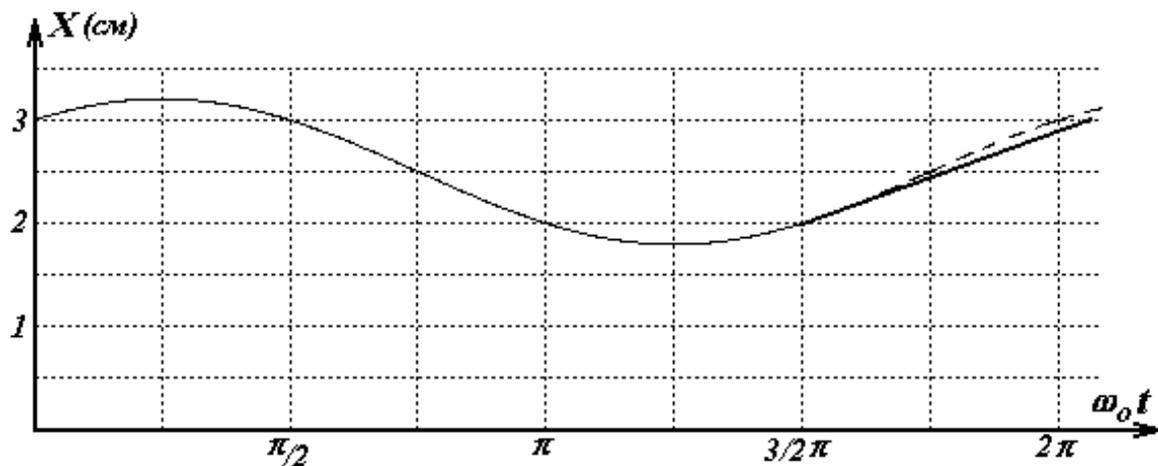
Для построения графика закона движения подставим численные значения в функцию закона движения (7), что приводит ее к виду

$$x = 2,5 + 0,5 \cos \omega_0 t + 0,5 \sin \omega_0 t,$$

далее можно заметить, что момент времени  $t_1$  приблизительно соответствует

значению  $\omega_0 t_1 \approx \frac{3}{2}\pi$ . После этой точки график закона движения - прямая линия.

В результате таких рассуждений можно получить следующий график (пунктир - продолжение гармонических колебаний).



### 3. «Пыль».

Перенос заряда между пластинами осуществляется пылинками, которые заряжаются (и перезаряжаются) при соприкосновении с пластинами. Величину заряда пылинки  $q$  можно найти из условия равенства потенциала шарика и пластины

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \pm \frac{U}{2}, \Rightarrow |q| = 2\pi\epsilon_0 r U. \quad (1)$$

При оговоренных условиях пылинки будут двигаться равноускоренно, при чем максимальная их скорость может быть найдена из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_{max}^2}{2} = qU, \quad (2)$$

Тогда средняя скорость движения пылинок (учитывая, что начальная скорость равна нулю, а ускорение постоянно) определяется выражением

$$v_{cp} = \frac{v_{max}}{2} = \sqrt{\frac{qU}{2m}} = U \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 r}{m}}. \quad (3)$$

Следовательно, плотность тока между пластинами равна

$$j = qnv_{cp} = 2\pi\epsilon_0 r \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 r}{m}} n U^2, \quad (4)$$

наконец, искомое значение силы тока

$$I = jS = 2\pi\epsilon_0 r \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 r}{m}} n S U^2. \quad (5)$$

Отметим, что для рассматриваемой системы закон Ома не выполняется.

*Этот же результат может быть получен из следующих рассуждений: Сила тока, по определению, равна  $I = \frac{qN}{\tau}$ , где  $\tau$  - время пролета пылинки от одной пластины до другой, которое находится из следующих соотношений  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2hm}{qE}} = \sqrt{\frac{2h^2 m}{qU}}$ , что приводит к той же формуле (5).*

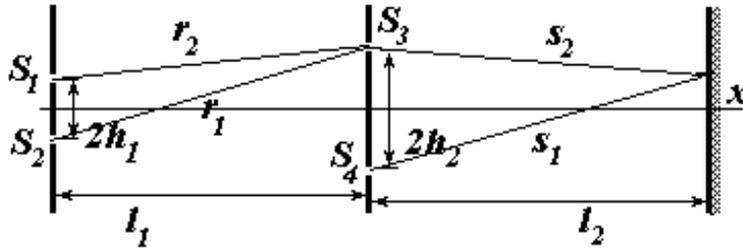
Для оценки времени разрядки выразим заряд пластины  $Q$  через напряжение между обкладками  $Q = CU = \frac{\epsilon_0 S}{h} U$ . Уменьшение напряжение на  $\eta$  процентов, соответствует такому же уменьшению заряда на пластинах. Следовательно за искомое время  $\Delta t$ , электрический ток должен «перенести» заряд  $\eta Q$ , что приводит к уравнению

$$I\Delta t = \eta Q, \Rightarrow 2\pi\epsilon_0 r \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 r}{m}} n S U^2 \Delta t = \eta \frac{\epsilon_0 S}{h} U, \quad (6)$$

из которого определяем время уменьшения заряда (заметим, что изменение заряда мало, поэтому напряжение можно считать постоянным и равным напряжению батареи):

$$\Delta t = \frac{\eta}{2\pi r n h U} \sqrt{\frac{m}{\pi\epsilon_0 r}}. \quad (7)$$

#### 4. «Двойная интерференция»



Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, каждую щель можно рассматривать как источник вторичных волн. Обозначим эти «источники» в первом экране  $S_1$  и  $S_2$ , тогда на расстоянии  $r$  от источника вторичные волны описываются функциями

$$A = A_0 \cos(\omega t - kr) \quad , \quad (1)$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число. Чтобы найти функцию, описывающую колебания в щелях  $S_3$  и  $S_4$  во втором экране, необходимо просуммировать волны от щелей  $S_1$  и  $S_2$ . Результат суммирования может быть получен разными способами, например, посредством цепочки преобразований

$$\begin{aligned} A_3 &= A_0 \cos(\omega t - kr_1) + A_0 \cos(\omega t - kr_2) = \\ &= 2A_0 \cos\left(\omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

При выводе учтено, расстояния  $r_1$  и  $r_2$  отличаются мало, поэтому амплитуды интерферирующих волн можно считать равными. Вычисление разности хода следует проводить с учетом малости расстояний между щелями по сравнению с расстоянием между экранами. С помощью очевидной и традиционной методики получим

$$\begin{aligned} r_1^2 &= l_1^2 + (h_2 + h_1)^2; \quad r_2^2 = l_1^2 + (h_2 - h_1)^2; \\ 2l_1(r_1 - r_2) &= 4h_2 h_1; \quad \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = 2 \frac{h_2 h_1}{l_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Полностью аналогично вычисляется функция колебаний в точке  $x$  на последнем экране, как сумма вторичных волн от щелей  $S_3$  и  $S_4$ . Так разность хода между этими волнами вычисляется с помощью соотношений

$$\begin{aligned} s_1^2 &= l_2^2 + (h_2 + x)^2; \quad s_2^2 = l_2^2 + (h_2 - x)^2; \\ 2l_2(s_1 - s_2) &= 4h_2 x; \quad \Rightarrow \quad s_1 - s_2 = 2 \frac{h_2 x}{l_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

А суммирование волн выполняется аналогично преобразованиям (2):

$$\begin{aligned} A_x &= A'_3 \cos(\omega t - ks_1) + A'_3 \cos(\omega t - ks_2) = \\ &= 2A'_3 \cos\left(\omega t - k \frac{s_1 + s_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{s_1 - s_2}{2}\right) \quad . \end{aligned} \quad (5)$$

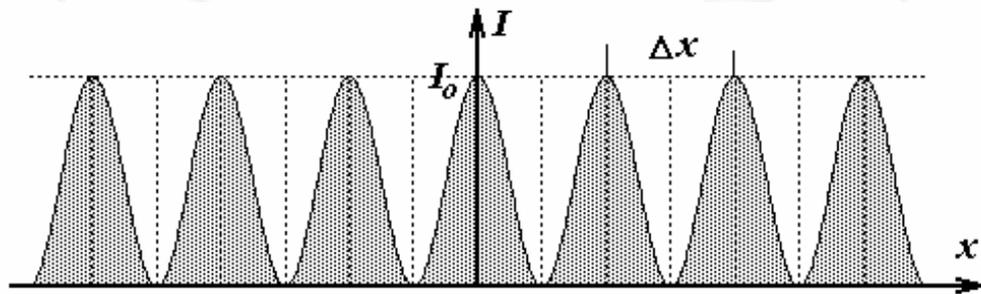
Понятно, что амплитуды интерферирующих волн на последнем экране отличны от амплитуды колебаний в щелях на втором экране, но равны между собой, кроме того, легко показать, что колебания в щелях второго экрана синфазны. Используя полученные ранее выражения, получим амплитуду колебаний в интересующей нас точке

$$A_x = A \cos(\omega t) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{s_1 - s_2}{2}\right) = A \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1 h_2}{l_1}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_2 x}{l_2}\right),$$

Как известно, интенсивность света пропорциональна среднему квадрату амплитуды колебаний, поэтому распределение интенсивности света на последнем экране описывается функцией

$$I_x = \langle A_x^2 \rangle = I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1 h_2}{l_1}\right) \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_2 x}{l_2}\right). \quad (6)$$

Таким образом интерференционная картина представляет собой набор чередующихся равноотстоящих полос, ширина которых не зависит от расстояния между щелями в первом экране. Это расстояние определяет



интенсивность полос.

Эта же функция (6) описывает зависимость интенсивности света в точке  $x$  экрана от расстояния между щелями во втором экране.

Для определения оптимального положения для экспериментального изучения зависимости интенсивности от расстояния  $h_2$ , перепишем функцию (6) в виде

$$I_x(h_2) = I_0 \cos^2(\beta_1 h_2) \cos^2(\beta_2 h_2), \quad (7)$$

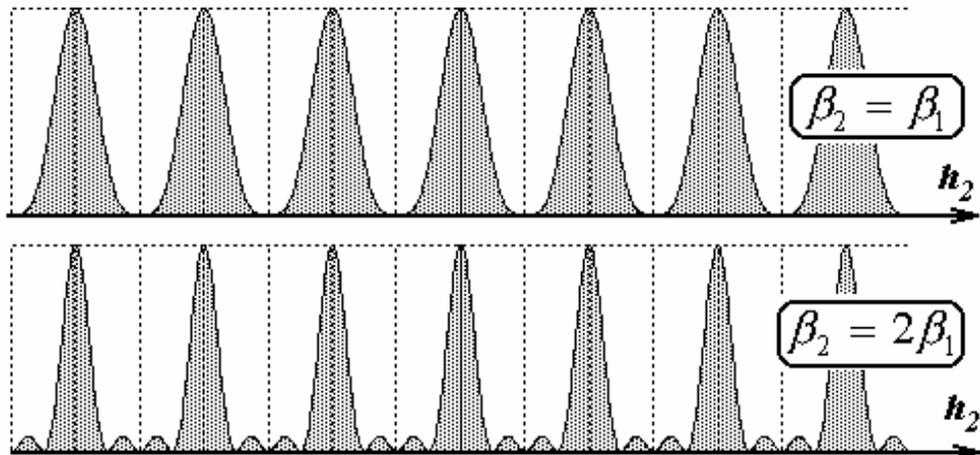
где обозначено  $\beta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_1}{l_1}$ ,  $\beta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x}{l_2}$ .

Для выбора оптимального соотношения между параметрами  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  используем следующие критерии:

1) Эта функция должна быть достаточно простой, чтобы полученная экспериментальная зависимость легко интерпретировалась). Этого можно достичь если параметры  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  кратны друг другу ( $\beta_2 = m\beta_1$ ,  $m$  – целое), тогда зависимость (7) будет периодической.

2) Эта функция должна иметь резкие максимумы (что бы точность определения ширины полосы была выше), этого можно достичь при возрастании  $S$ . Однако при возрастании  $x$ , во-первых, ухудшается видимость интерференционной картины, во-вторых, усложняется зависимость  $I_x(h_2)$ .

С этих точек зрения наиболее предпочтительными являются значения  $\beta_2 = \beta_1$ ,  $\beta_2 = 2\beta_1$ . На рисунке представлены эти зависимости.



Переход к следующему  $\beta_2 = 3\beta_1$ , по-видимому, уже слишком усложнит вид зависимости. Поэтому оптимальным можно признать соотношение  $\beta_2 = 2\beta_1$ , из которого следует, что приемник целесообразно разместить в точке, находящейся на расстоянии  $x = 2 \frac{h_1 l_2}{l_1}$ .

В заключение можно полюбоваться «трехмерным графиком функции (6).

