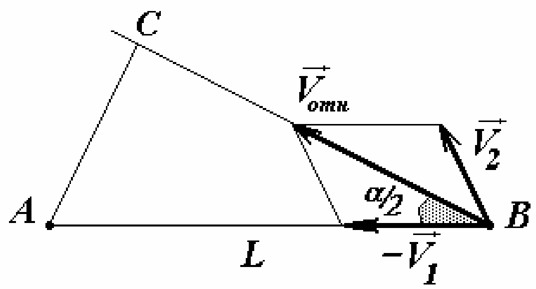
9 класс.

1. Перейдем в систему отсчета, связанную с кораблем $\boldsymbol{A}$. В этой системе корабль $\boldsymbol{B}$ движется с относительной скоростью $\vec{V}_{отн} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Модуль этой скорости равен



$$\left|\vec{V}_{отн}\right| = 2v\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (1)$$

а ее вектор направлен под углом $\frac{\alpha}{2} = 30°$ к отрезку $\boldsymbol{AB}$ (см рис). Следовательно, корабль $\boldsymbol{B}$ движется относительно корабля $\boldsymbol{A}$ по прямой ВС.

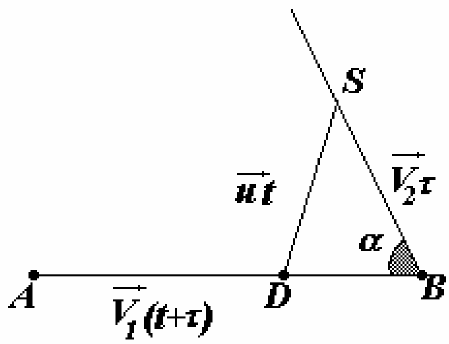
а) Минимальной расстояние между кораблями есть расстояние от точки А до прямой ВС, которое равно

$$l_{\min} = L\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{L}{2}. \qquad (2)$$

б) Очевидно, что шлюпка, спущенная с корабля $\boldsymbol{B}$, достигнет корабля A за минимальное время, если скорость их сближения максимальна, а начальное расстояние между ними минимально. Эти условия будут выполнены, если шлюпку сразу спустить на воду и направить ее навстречу кораблю $\boldsymbol{A}$. Тогда время, за которое шлюпка достигнет корабля $\boldsymbol{A}$ вычисляется по формуле

$$t_{\min} = \frac{L}{2v}. \qquad (3)$$

в) Пусть капитан корабля $\boldsymbol{B}$ отправляет шлюпку через время τ (нам необходимо найти его максимально возможное значение) в точке S, а затем через время t шлюпка встречается с кораблем $\boldsymbol{A}$ в точке $\boldsymbol{D}$ (см. рис.). За это время корабль $\boldsymbol{A}$ пройдет путь $|AD| = v(t+\tau)$. Как следует из рис. ,



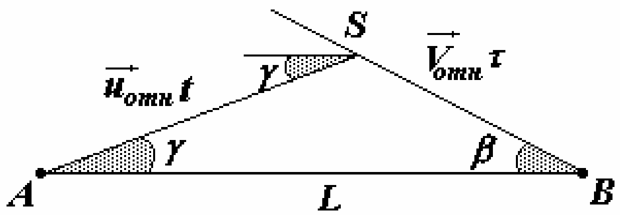
чтобы шлюпка и корабль $\boldsymbol{A}$ встретились должно выполняться условие (которое следует из теоремы косинусов для треугольника $\boldsymbol{BSD}$)

$$(ut)^2 = (v\tau)^2 + \left(L - v(t+\tau)\right)^2 - 2(v\tau)\left(L - v(t+\tau)\right)\cos\alpha. \qquad (4)$$

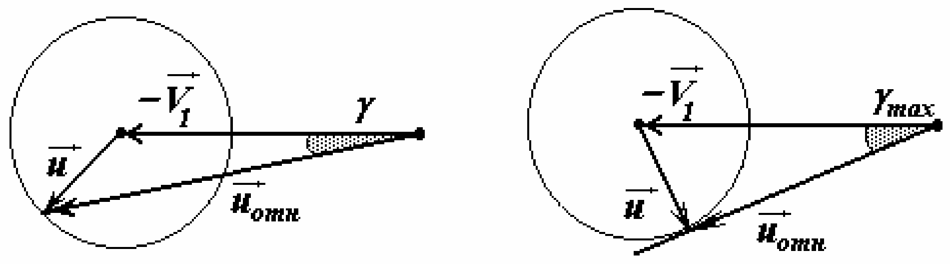
Для того, чтобы найти максимальное значение времени τ необходимо рассмотреть выражение (4) как уравнение относительно величины t и определить условия (значения τ), при которых оно имеет неотрицательное решение. В принципе этот путь решения задачи приведет к успеху, правда путем долгих и громоздких алгебраических преобразований.

Кстати, это же уравнение (при $u = v$) можно использовать для алгебраического обоснования результата, полученного в п. б). Решив это уравнение относительно t, можно получить зависимость времени движения $(t + \tau)$ от времени τ, а затем найти минимум этой функции. Этот способ приводит к уже полученному результату: функция $(t + \tau)$ монотонно возрастает с ростом τ, следовательно ее минимум достигается при $\tau = 0$.

Вернемся к решению пункта в).



Опять рассмотрим движение кораблей в системе отсчета, связанной с кораблем ***A***. В этой системе диаграмма перемещений кораблей и шлюпки имеет вид, показанный на рис. , здесь обозначено $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$, $\vec{u}_{отн} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ - скорость шлюпки, относительно корабля ***A***. На рисунке видно, что время τ (или что то же самое перемещение $V\tau$) будет максимально при максимальном угле γ, между направлением относительной скорости $\vec{u}_{отн}$ и отрезком ***AB***. Максимальное значение этого угла



можно найти, построив диаграмму скоростей (рис.) . Вектор скорости шлюпки $\vec{u}$ может быть направлен под произвольным углом, иными словами его конец может располагаться в любой точке нарисованной окружности. Как следует из рисунка угол γ будет максимален, если вектор $\vec{u}_{отн}$ будет касательным к этой окружности. Таким образом, $\sin\gamma_{\max} = \dfrac{u}{v}$.

Запишем теорему синусов для треугольника ***ABS***

$$\frac{V\tau_{\max}}{\sin\gamma_{\max}} = \frac{L}{\sin(\pi-\beta-\gamma_{\max})}\ , \tag{5}$$

где $(\pi-\beta-\gamma_{\max})$ - угол ***ASB***. Из выражения (5) находим

$$\tau_{\max} = \frac{L}{V}\cdot\frac{\sin\gamma_{\max}}{\sin(\beta+\gamma_{\max})} = \frac{L}{2v\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma_{\max}}{\sin\beta\cos\gamma_{\max}+\sin\gamma_{\max}\cos\beta} =$$

$$= \frac{L}{v}\cdot\frac{\sin\gamma_{\max}}{\sin 2\beta\sqrt{1-\sin^2\gamma_{\max}}+\sin\gamma_{\max}2\cos^2\beta} = \tag{6}$$

$$= \frac{L}{v}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{v}{u}\right)^2-1}+3}.$$

Отметим, что при

1) $u\to 0$ $\tau_{\max}\to 0$, т.е. шлюпку надо сразу спускать на воду и ждать пока к ней подплывет второй корабль;

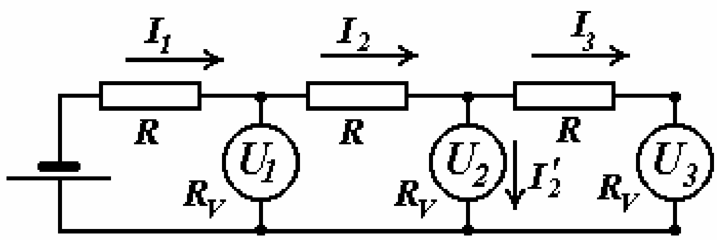
2) при $u=v$, капитан может подождать в течении времени $\tau_{\max}=\frac{2L}{3V}$;

3) при $u>v$ шлюпка может догнать корабль после любого времени ожидания τ.

г) Скорость снаряда будет минимальна, если он пролетит минимальное расстояние, будучи выпущен под углом 45° к горизонту. Следовательно эту скорость можно найти из уравнения $\frac{v_{\min}^2}{g}=l_{\min}$, или

$$v_{\min}=\sqrt{\frac{Lg}{2}}.$$

2. Различия в показаниях вольтметров, возникаю из-за того, что они не являются идеальными, то есть имеют конечное сопротивление, которое мы обозначим R_V, которое сравнимо с сопротивлением резисторов R.



На схеме указаны обозначения токов, текущих через различные элементы схемы. Используя законы последовательного и параллельного соединения, можно записать следующие уравнения

$$\begin{aligned} &U_3 = I_3 R_V \\ &U_2 = I_3 (R + R_V). \qquad (1) \\ &U_1 = I_2 R + U_2 \end{aligned}$$

Выразим силу тока I_2 через силу тока I_3, используя систему уравнений

$$\begin{aligned} &I_2 = I_2' + I_3 \\ &I_2' R_V = U_2 \end{aligned}, \qquad (2)$$

из которой следует

$$I_2 = \frac{U_2}{R_V} + I_3. \qquad (3)$$

Не смотря на то, что в системе 4 уравнений (1), (3) содержится 5 неизвестных, из нее можно найти значение U_2.

Действительно, в третье уравнение системы (1) подставим выражение (3)

$$U_1 = \left(\frac{U_2}{R_V} + I_3\right) R + U_2. \qquad (4)$$

А из первых двух уравнений этой же системы выразим:

$$I_3 R = U_2 - U_3 \qquad \text{(из разности этих уравнений);}$$

$$\frac{R}{R_V} = \frac{U_2}{U_3} - 1 \qquad \text{(из частного этих уравнений);}$$

и подставим их в уравнение (4)

$$U_1 = U_2\left(\frac{U_2}{U_3} - 1\right) + U_2 - U_3 + U_2.$$

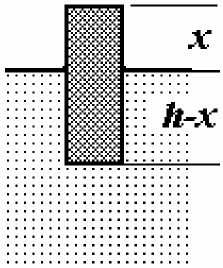
Решение этого квадратного уравнения имеет вид

$$U_2 = \frac{\sqrt{5U_3^2 + 4U_1U_2} - U_3}{2} \approx 8{,}6B.$$

Отрицательный корень мы отбросили, как не имеющий физического смысла.

Отметим, что в нашей цепи $R_V \approx 12R$, что подтверждает наше исходное предположение.

3. Пусть цилиндр поднялся над водой на высоту x. Тогда действующая на него сила Архимеда равна



$$F_A = \rho_0 S(h - x)g. \qquad (1)$$

Так как эта сила изменяется по линейному закону, то для вычисления ее работы можно использовать ее среднее значение. Итак, работа силы Архимеда

$$A_A = \frac{1}{2}\rho_0 Shg \cdot h \qquad (2)$$

пошла на увеличение кинетической и потенциальной энергии цилиндра

$$\frac{1}{2}\rho_0 Sh^2 g = \rho Shg \cdot h + \frac{\rho Shv^2}{2}. \qquad (3)$$

Из этого уравнения определяем скорость цилиндра

$$v = \sqrt{\frac{\rho_0 - 2\rho}{\rho} gh} \approx 1{,}7\frac{м}{с}.$$

Обратите внимание, при $\rho > \dfrac{\rho_0}{2}$ цилиндр не выскочит из воды полностью.

4. Будем считать, что протекая по отопительным радиаторам, вода остывает до комнатной температуры. Для того, чтобы температура в комнате осталась неизменной, необходимо, чтобы после ремонта вода приносила в единицу времени такое же количество теплоты, что выражается уравнением

$$c\rho v_1 S_1(t_1 - t_0) = c\rho v_2 S_2(t_2 - t_0).$$

Из этого уравнения определяем скорость движения воды по трубам

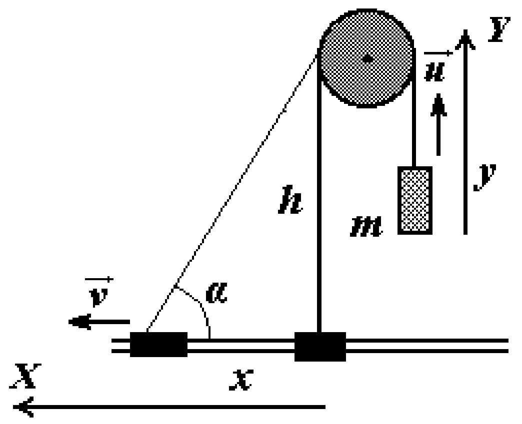
$$v_2 = v_1 \frac{S_1(t_1 - t_0)}{S_2(t_2 - t_0)}.$$

Решение задач.

10 класс.

1. При смещении муфты на расстояние x висящий груз поднимется на высоту

$$y = \sqrt{x^2 + h^2} - h. \qquad (1)$$



Вычисляя производную по времени от этого выражения, установим связь между скоростями муфты v и груза u

$$u = v\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}. \qquad (2)$$

Заметим, что последнее соотношение $u = v\cos\alpha$ можно найти путем геометрических векторных построений.

а) Работа внешних сил при смещении муфты равна изменению потенциальной энергии груза, поэтому

$$A = mgy = mg\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right). \qquad (3)$$

б) Заметим, что когда муфта проходит положение равновесия (нить вертикальна), скорость груза обращается в нуль. Поэтому муфта будет иметь максимальную скорость именно при прохождении положения равновесия, так как в этом положении изменение потенциальной энергии максимально, и вся запасенная энергия (3) перейдет в кинетическую энергию муфты. Эту максимальную скорость найдем из закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mg\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right),$$

или

$$v_{\max} = \sqrt{2g\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right)}. \qquad (4)$$

в) Для определения скорости муфты в произвольной точке опять воспользуемся законом сохранения механической энергии (кинетическая энергия муфты и груза равна изменению потенциальной энергии груза):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = mg\left(\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - h\right) - \left(\sqrt{x^2 + h^2} - h\right)\right).$$

Используя соотношение (2), находим искомые скорости

муфты $$v = \sqrt{2g\frac{x^2 + h^2}{2x^2 + h^2}\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - \sqrt{x^2 + h^2}\right)}, \qquad (5)$$

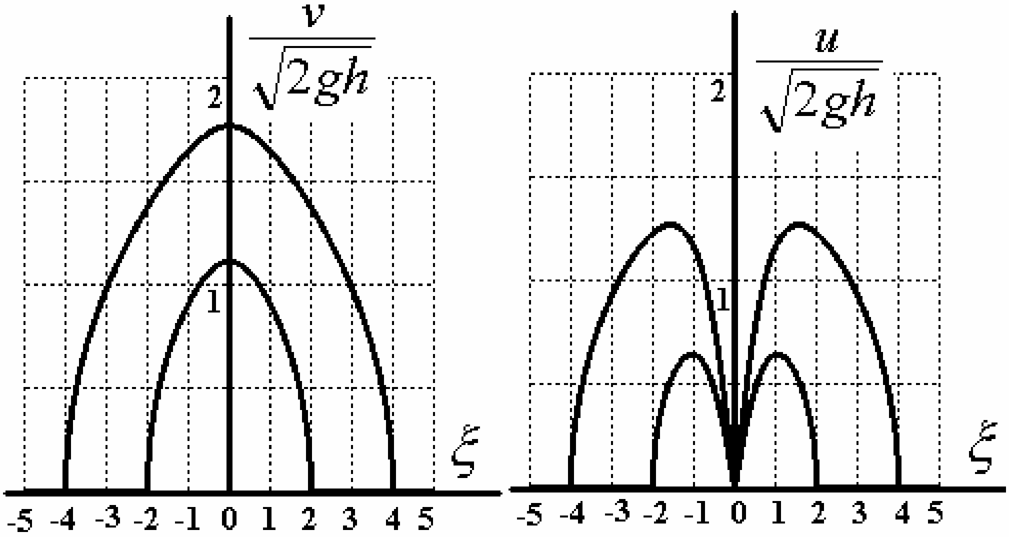
и груза $$u = \sqrt{2g\frac{x^2}{2x^2 + h^2}\left(\sqrt{x_0^2 + h^2} - \sqrt{x^2 + h^2}\right)}. \qquad (6)$$

Для построения графиков этих функций их удобно представить в виде

$$\frac{v}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{\xi^2+1}{2\xi^2+1}\left(\sqrt{\xi_0^2+1} - \sqrt{\xi^2+1}\right)};,$$

$$\frac{u}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{\xi^2}{2\xi^2+1}\left(\sqrt{\xi_0^2+1} - \sqrt{\xi^2+1}\right)};$$

где обозначено $\xi = \frac{x}{h}$. Графики модулей этих функций (при $\xi_0 = 2, \quad \xi_0 = 4$) представлены на рисунке.



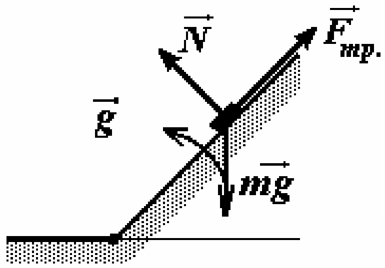
г) Обратим внимание, что численные значения параметров таковы, что $x_0 >> h$. Поэтому практически все время движения (за исключением малого участка вблизи положения равновесия) нить, удерживающая муфту, горизонтальна. В этом случае можно приближенно считать, что муфта движется с постоянным ускорением $a = \frac{g}{2}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Следовательно, время ее движения от крайнего положения до положения равновесия определяется формулой $\tau = \sqrt{\frac{2x_0}{a}} = 2\sqrt{\frac{x_0}{g}}$, а период движения, очевидно в четыре раза больше $T = 8\sqrt{\frac{x_0}{g}} \approx 2{,}5c$.

2. При неподвижной наклонной плоскости скольжение бруска начинается когда проекция силы тяжести на наклонную плоскость превышает максимальную силу трения покоя, как известно это

граничное условие связывает угол наклона и коэффициент трения соотношением

$$\mu = tg\alpha\,. \qquad (1)$$

При равномерном вращении плоскости шайба движется с центростремительным ускорением $a = \Omega^2 l$, поэтому в проекции на наклонную плоскость уравнение второго закона Ньютона будет иметь вид (мы предполагаем, что шайба стремится соскользнуть вниз):



$$m\Omega^2 l = mg\sin\beta - F_{тр.} \qquad (2)$$

Скольжение начнется, когда $F_{тр.}$ достигнет величины

$$\mu N = \mu mg\cos\beta\,. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)-(3) находим

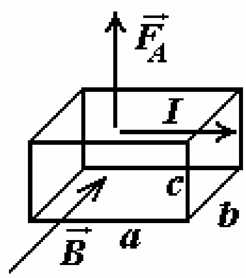
$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\sin\beta - tg\alpha\cdot\cos\beta\right)} = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}} \qquad (4)$$

Заметим, что при больших угловых скоростях шайба может начать скользить вверх по наклонной плоскости, в этом случае сила трения изменит направление на противоположное. Такое движение начнется, если угловая скорость достигнет величины

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}\left(\sin\beta + tg\alpha\cdot\cos\beta\right)} = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos\alpha}}\,. \qquad (5)$$

Так как в условии задачи, не указано направление сдвига шайбы, то данная задача имеет два ответа (4) и (5).

3. Давление жидкости на дно сосуда может исчезнуть, если под действием приложенного напряжения в жидкости появится такой электрический ток, который взаимодействуя с магнитным полем, приведет к появлению силы Ампера, которая компенсирует силу тяжести. Понятно, что ток должен течь перпендикулярно граням $b\times c$. Выразим силу тяжести и силу Ампера через параметры задачи



$$mg = \rho abcg\,, \qquad (1)$$

$$F_A = IBa = \frac{U}{R}Ba = \frac{Ubc}{\rho^* a}Ba = \frac{Ubc}{\rho^*}B\,. \qquad (2)$$

Приравнивая полученные выражения, находим искомое значение напряжения $U = \dfrac{\rho\rho^* ag}{B}$.

4. Так как заряды шариков противоположны, то шарики начнут сближаться, в момент удара произойдет их перезарядка, после чего шарики начнут разъезжаться.

Скорости шариков v_1 в момент столкновения найдем из закона сохранения энергии

$$2\frac{mv_1^2}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 D}, \qquad (1)$$

здесь $\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r}$- энергия взаимодействия шариков, находящихся на расстоянии r. Учитывая закон сохранения электрического заряда и равенство зарядов шариков после столкновения, получим величину этого заряда

$$q_1' = q_2' = \frac{q_1 + q_2}{2}. \qquad (2)$$

Так как удар шариков абсолютно упругий, то величины скоростей шариков сразу после столкновения останутся прежними (естественно, изменятся направления скоростей).

Запишем опять закон сохранения энергии для движения шариков после столкновения

$$2\frac{mv_1^2}{2} + \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 D} = 2\frac{mv_2^2}{2} + \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad (3)$$

Где v_2 скорости шариков находящихся на расстоянии a. Из выражений (1) и (3) можно найти эту скорость.

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 Dm}\left(\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 - q_1 q_2\right)} \approx 1{,}0\frac{см}{c}.$$

При выводе последней формулы мы пренебрегли энергией взаимодействия шариков, находящихся на расстоянии a, так как $a >> D$.

Заметим, что кинетическая энергия шариков появилась благодаря уменьшению полной энергии электростатического поля.