Задача 9.1.

1.1 Запишем закон движения снаряда в системе отсчета, ось X которой горизонтальна, а ось Y вертикальна, начало отсчета совпадает с точкой вылета

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases} . \qquad (1)$$

Вычислим прежде всего время полета снаряда T. Полагая $y = 0$, из второго уравнения системы находим

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 6{,}2 \cdot 10^2 \cdot \sin 45°}{9{,}8} \approx 89{,}5c \qquad (2)$$

Итак, во время разрыва снаряд будет находится в воздухе. Поэтому расстояние до него и время распространения звука Δt можно вычислить с помощью закона движения (1)

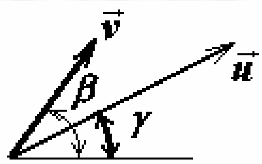
$$\Delta t = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{v_{зв}} = \frac{\sqrt{\left(v_0 t_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(v_0 t_0 \sin\alpha - \dfrac{g t_0^2}{2}\right)^2}}{v_{зв}} \approx 48c . \qquad (3)$$

Можно подсчитать высоту и расстояние, на которой произошел разрыв

$$y_0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{g t_0^2}{2} \approx 8{,}74 \cdot 10^3 \text{ м}; \quad x_0 = v_0 t_0 \cos\alpha \approx 13{,}2 \cdot 10^3 \text{ м}$$

и далее использовать эти значения.

1.2 Скорость каждого осколка можно представить как сумму скорости снаряда $\vec{v}$ в момент разрыва и скорости осколка относительно снаряда $\vec{u}$. Направления этих скоростей удобно определять по углам отклонения от горизонта.



Запишем координаты (в той же системе) осколка через время τ после разрыва

$$\begin{cases} x = x_0 + \left(v_x + u\cos\gamma\right)\tau \\ y = y_0 + \left(v_y + u\sin\gamma\right)\tau - \dfrac{g\tau^2}{2} \end{cases} ,$$

подставив значения координат и компонент скорости снаряда в момент разрыва, получим закон движения

$$\begin{cases} x = v_0 t_0 \cos\alpha + \left(v_0 \cos\alpha + u\cos\gamma\right)\tau \\ y = v_0 t_0 \sin\alpha - \dfrac{g t_0^2}{2} + \left(v_0 \sin\alpha - g t_0 + u\sin\gamma\right)\tau - \dfrac{g\tau^2}{2} \end{cases} ,$$

который можно привести к виду

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\left(t_0 + \tau\right) + u\tau\cos\gamma \\ y = v_0 \sin\alpha\left(t_0 + \tau\right) - \dfrac{g\left(t_0 + \tau\right)^2}{2} + u\tau\sin\gamma \end{cases} \qquad (4)$$

Эти уравнения допускают простую интерпретацию: <u>движение осколков можно представить как сумму (суперпозицию) движения их центра по той же параболе, по которой бы двигался неразорвавшийся снаряд, и равномерного и прямолинейного движения относительно этого центра.</u>

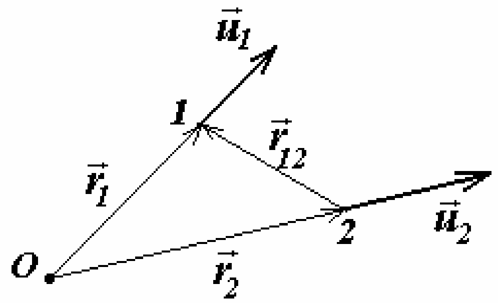
Таким образом, облако осколков в любой момент времени будет представлять собой шар, центр которого находится на параболе, описываемой системой (1), а радиус определяться скоростью самых быстрых осколков $R = u\tau$.

Через время τ_1 после разрыва координаты центра «облака» будут равны

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\left(t_0 + \tau_1\right) \approx 22\ км \\ y = v_0 \sin\alpha\left(t_0 + \tau_1\right) - \dfrac{g\left(t_0 + \tau_1\right)^2}{2} \approx 9{,}8\ км \end{cases}. \qquad (5)$$

Радиус облака $R = u\tau \approx 24\ км$. Таким образом, это облако частично будет «поглощено» поверхностью земли.

1.3 Время $\left(t_0 + \tau_2\right) = 90\ c$ примерно соответствует времени движения неразорвавшегося снаряда, поэтому в этот момент центр облака коснется поверхности земли. Следовательно, в полете будет находится примерно половина осколков, их масса $m_1 \approx \dfrac{m}{2} = 300кг$.



1.4 Для определения относительных скоростей осколков удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром облака ***O***. (Эта система отсчета, конечно, неинерциальная, но так нас интересуют только кинематические проблемы, то неинерциальность системы никакой роли не играет). В этой системе отсчета скорости осколков постоянны и направлены радиально. Если за время τ осколок пролетел расстояние r, то его скорость равна $u = \dfrac{r}{\tau}$. Учитывая направление скорости, это соотношение можно записать в векторной форме $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{\tau}$. Тогда относительная скорость одного осколка (первого) относительно второго равна разности их скоростей

$$\vec{u}_{отн} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \frac{1}{\tau}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{\vec{r}_{12}}{\tau}, \qquad (6)$$

что и требовалось доказать. Как следует из данной формулы, требуемый коэффициент пропорциональности равен

$$a = \frac{1}{\tau}. \qquad (7)$$

1.5 Закон Хаббла совпадает с полученным законом разлета осколков (6), поэтому постоянная Хаббла есть величина обратно пропорциональная времени существования вселенной. Поэтому время жизни Вселенной можно оценить, как величину обратную этой постоянной $T \approx \dfrac{1}{H}$. Для численных расчетов постоянную Хаббла необходимо перевести в систему СИ. Вычислим длину светового года (достаточная точность - порядок величины)

$$1св.год \approx 3{,}0 \cdot 10^8 \frac{м}{с} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600с \approx 9{,}5 \cdot 10^{15}\, м \approx 10^{16}\, м$$

Тогда

$$H = (15 \div 30) \cdot 10^{-6} \frac{км}{с \cdot (св.год)} = (15 \div 30) \cdot 10^{-6} \frac{10^3\, м}{с \cdot 10^{16}\, м} \approx$$

$$\approx (15 \div 30) \cdot 10^{-19}\, с^{-1}$$

Оценка максимального времени жизни Вселенной имеет вид

$$T \approx \frac{1}{H} \approx \frac{1}{15 \cdot 10^{-19}\, с^{-1}} \approx 7 \cdot 10^{17}\, с \approx \frac{7 \cdot 10^{17}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} лет \approx 2 \cdot 10^{10}\, лет$$

Вторая граница в два раза меньше. Таким образом, время жизни Вселенной оценивается в 10-20 миллиардов лет.

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	*Примечания*
1.1	**Расчет времени распространения звука**	**5**	
	- закон движения снаряда		2
	- равномерность распространения звука		1
	- численный расчет		2
1.2	**Форма «облака»**	**5**	
	- закон движения осколков		1
	- разложение движения на составляющие		2
	- облако -шар		1
	- численный расчет координат центра и радиуса		1
1.3	**Масса осколков в воздухе**	**1**	
1.4	**Относительная скорость**	**4**	
	- использование системы отсчета		1
	- скорость пропорциональна расстоянию до центра		2
	- выражение для относительной скорости		1
	- правильное значение коэффициента пропорциональности		1
1.5	**Время жизни Вселенной**	**5**	
	- использование аналогии с разлетом осколков		1
	- время жизни обратно постоянной Хаббла		2
	- численный расчет		2
	ИТОГО	**20**	
	За неверное число значащих цифр		-2

Задача 9.2

Задача решается весьма просто с использованием «золотого правила механики»: ни один простой механизм не дает выигрыша в работе - во сколько раз выигрываешь в силе, во столько раз проигрываешь в расстоянии. Согласно этому правилу, произведение силы, приложенной к рукоятке на ее смещение равно произведению силы, создаваемой поршнем, на его перемещение. Если винт провернется на один оборот, то поршень сместится на величину, равную шагу поршня, поэтому

$$2F \cdot 2\pi l = F_Д h, \qquad (1)$$

где $F_Д = pS = p\pi R^2$ сила давления, создаваемая поршнем. Из этих выражений находим искомое давление

$$p = \frac{4Fl}{hR^2} \qquad (2)$$

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	*Примечания*
1.1	Использование «золотого правила»	**2**	
1.2	Математическое соотношение между силами и смещениями	**2**	
1.3	Связь между смещениями	**1**	
1.4	Связь между силой и давлением	**1**	
1.5	Выражение для давления	**2**	
1.6	Обоснование, оформление	**2**	
	ИТОГО	**10**	

Задача 9.3

Выделим тонкое кольцо протекающей воды толщиной h. Мощность теплоты, выделяемой в этом кольце при прохождении тока, определяется законом Джоуля-Ленца

$$P = \frac{U^2}{R}, \qquad (1)$$

где R - электрическое сопротивление слоя воды, которое можно рассчитать по формуле

$$R = \rho \frac{L}{S}. \qquad (2)$$

Учитывая, что электрический ток идет перпендикулярно тонкому слою воды, в данном случае

$$L = R_1 - R_2; \qquad S = 2\pi R_1 h. \qquad (3)$$

За время протекания воды через нагреватель $\tau = \dfrac{l}{V}$ она получит количество теплоты

$$Q = \frac{U^2}{R}\tau = \frac{U^2 2\pi R_1 h}{\rho\left(R_1 - R_2\right)} \cdot \frac{l}{V}. \qquad (4)$$

Этого количества теплоты должно быть достаточно, чтобы нагреть слой воды на Δt градусов. Для этого требуется теплота

$$Q = cm\Delta t = c\gamma \cdot \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)h\Delta t, \qquad (5)$$

здесь $\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)h$ - объем выделенного слоя воды, γ - плотность воды. Приравнивая два последних выражения, получаем формулы для вычисления скорости

$$V = \frac{2U^2 R_1}{\rho\left(R_1 - R_2\right)} \cdot \frac{l}{c\gamma\left(R_1^2 - R_2^2\right)\Delta t}. \qquad (6)$$

<u>Схема оценивания.</u>

Пункт	**Содержание**	**Баллы**	*Примечания*
1.1	Закон Джоуля-Ленца	**1**	
1.2	Выражение для сопротивления - общая формула - «где длина, где площадь» - применение в данном случае	**3**	 1 1 1
1.3	Выделение тонкого кольца воды	**1**	
1.4	Теплота, необходимая для нагревания - общая формула - выражение для массы выделенной воды - окончательный результат	**3**	 1 1 1
1.5	Использование равенства теплот	**1**	
1.6	Окончательный результат	**1**	
	ИТОГО	**10**	

11 класс. Решения задач.

<u>Задача 1.</u>

1.1 При изменении магнитного поля, вследствие явления электромагнитной индукции, появляется электрическое поле, с которым взаимодействуют заряды кольца. Запишем основное уравнение динамики вращательного движения для кольца

$$mr^2\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = e\tilde{E}r\ , \qquad (1)$$

где $\tilde{E}$ - среднее значение тангенциальной составляющей вихревого электрического поля.

<u>Примечание</u>. Уравнение (1) можно получить и без использования «готового» уравнения динамики вращательного движения - на основании рассмотрения динамики движения отдельных малых элементов кольца.

По закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока, поэтому справедливо соотношение

$$2\pi r\tilde{E} = -\pi r^2\frac{\Delta B}{\Delta t}, \qquad (2)$$

из которого следует

$$r\tilde{E} = -\frac{r^2}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}. \qquad (3)$$

После подстановки выражения (3) в уравнение (1) и сокращения на Δt, получаем требуемое соотношение для модуля изменения угловой скорости

$$\Delta\omega = \frac{e}{2m}B_0. \qquad (4)$$

1.2 Сила тока отдельного кольца может быть вычислена по определению

$$I_1 = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}, \qquad (5)$$

где T - период обращения. Сила тока двух колец равна сумме токов отдельных колец, поэтому (учитывая, что их скорости $\omega_{1,2} = \pm\omega_0 + \Delta\omega$, где ω_0 - угловые скорости до включения магнитного поля)

$$I = \frac{e}{2\pi}\left(\omega_1 + \omega_2\right) = \frac{e}{\pi}\Delta\omega = \frac{e^2}{2\pi m}B_0. \qquad (6)$$

Направление тока легко определить по правилу Ленца - он создает поле, противоположное внешнему полю.

1.3 Магнитный момент отдельного атома определяется по формуле

$$p_m = I\pi r^2 = \frac{e^2r^2}{2m}B_0, \qquad (7)$$

а магнитный момент единицы объема

$$J = np_m = \frac{e^2r^2}{2m}nB_0. \qquad (8)$$

1.4 Обозначим высоту цилиндра h, а его радиус R, тогда его магнитный момент может быть записан в двух формах

$$P_m = JV = \frac{e^2 r^2}{2m} n B_0 \pi R^2 h;$$
$$P_m = ih\pi R^2; \qquad (9)$$

приравнивая которые получим

$$i = J = \frac{e^2 r^2}{2m} n B_0. \qquad (10)$$

Магнитное поле, созданное этим полем можно вычислить используя формулу для индукции поля внутри соленоида $B = \mu_0 \frac{NI}{l}$, в которой произведение силы тока на плотность намотки является линейной плотностью токов, поэтому

$$B' = \mu_0 i = \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} n B_0. \qquad (11)$$

1.5 Так как поле B' направлено противоположно внешнему полю B_0, то поле внутри магнетика будет равно

$$B = B_0 - B' = \left(1 - \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} n\right) B_0, \qquad (12)$$

Сравнивая это выражение с формулой приведенной в условии, получим выражение для магнитной проницаемости

$$\mu = 1 - \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} n. \qquad (13)$$

1.6 Для проведения численных расчетов необходимо выразить значение концентрации атомов через известные постоянные $n = \frac{\rho}{m_{Cu}} = \frac{\rho N_A}{M}$, где $m_{Cu} = \frac{M}{N_A}$ - масса атома меди. Окончательное выражение для магнитной проницаемости принимает вид

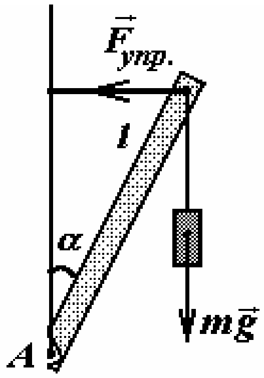
$$1 - \mu = \mu_0 \frac{e^2 r^2}{2m} \cdot \frac{\rho N_A}{M} =$$
$$= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-10}\right)^2}{2 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-30}} \cdot \frac{8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3}} \approx 5 \cdot 10^{-6}$$

Заметим, что табличное значение рассчитанной величины для меди равно $1{,}0 \cdot 10^{-5}$, что отличается всего в два раза.

<u>Схема оценивания.</u>

Пункт	Содержание	Баллы	*Примечания*
1.1	**Вывод формулы (4)** - закон эл.-маг. индукции -выражение для средней напряженности эл. поля - ур-ние движения - его решение	**4**	 1 1 1 1
1.2	**Всего** - сила тока одного витка - суммарный ток - направление тока	**3**	 1 1 1
1.3	**Всего** - магнитный момент атома - магнитный момент объема	**2**	 1 1
1.4	**Всего** - выражение момента через поверхностный ток - равенство моментов - выражение для i - выражение для B'	**5**	 1 1 1 2
1.5	**Всего** - разность полей - выражение для μ	**2**	 1 1
1.6	**Всего** - выражение для n - численный расчет	**3**	 1 2
	Оформление	**1**	
	ИТОГО	**20**	

Задача 2.



Рассмотрим зависимость моментов сил, действующих на стержень, от угла его отклонения от вертикали α. (Понятно, что из-за симметрии задачи достаточно рассмотреть один стержень). Для опрокидывания стержня необходимо, чтобы момент силы тяжести

$$M_1 = mgl\sin\alpha \qquad (1)$$

превышал момент силы упругости

$$M_2 = k(2l\sin\alpha - 2a)l\cos\alpha \qquad (2)$$

при любом положении стержня. Таким образом, неравенство

$$mgl\sin\alpha > k(2l\sin\alpha - 2a)l\cos\alpha \qquad (3)$$

должно выполняться при любом значении угла α в диапазоне от 0 до $\pi/2$. Так как в этом диапазоне $\sin\alpha > 0$, то неравенство (3) можно перепмсать в виде

$$m > \frac{2kl}{g}\cdot\frac{(\sin\alpha - \xi)\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (4)$$

где обозначено $\xi = \frac{a}{l}$. Найдем максимум функции

$$f(\alpha) = \frac{(\sin\alpha - \xi)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cos\alpha - \xi ctg\alpha. \qquad (5)$$

Вычисляя производную

$$f'(\alpha) = -\sin\alpha + \frac{\xi}{\sin^2\alpha}$$

и приравнивая ее к нулю, получаем значение угла α^*, при котором функция (5) принимает максимальное значение

$$\sin\alpha^* = \sqrt[3]{\xi}. \qquad (6)$$

Найдем косинус этого угла

$$\cos\alpha^* = \sqrt{1 - \sin^2\alpha^*} = \sqrt{1 - \xi^{2/3}}$$

и подставим в неравенство (4)

$$m > \frac{2kl}{g}\cdot\frac{(\sin\alpha^* - \xi)\cos\alpha^*}{\sin\alpha^*} = \frac{2kl}{g}\left(1 - \frac{\xi}{\sin\alpha^*}\right)\cos\alpha^* =$$

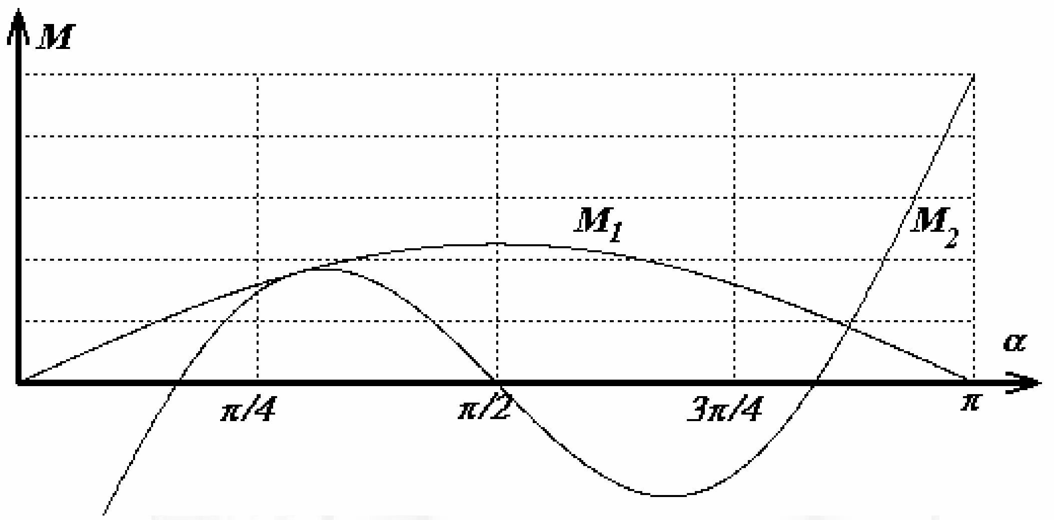
$$= \frac{2kl}{g}\left(1 - \xi^{2/3}\right)^{3/2}$$

Итак, окончательный ответ задачи имеет вид: стержни опрокинутся при

$$m > \frac{2kl}{g}\left(1 - \left(\frac{a}{l}\right)^{2/3}\right)^{3/2}.$$

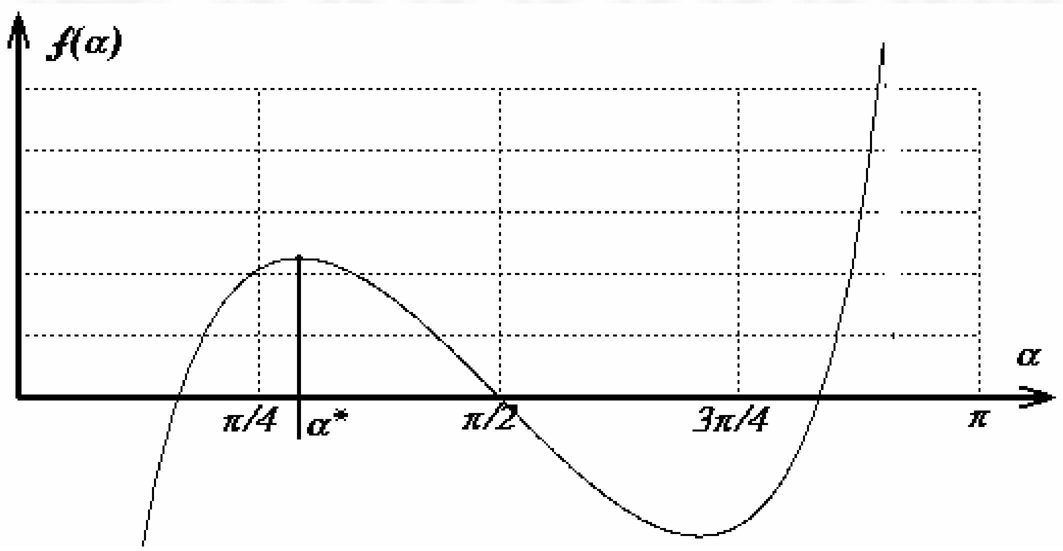
Комментарии к задаче.

1. *Представим графически зависимости моментов сил (1),(2) от угла* α. *На*



рисунке показан предельный случай, соответствующий найденному решению задачи. График построен при $\xi = 0,5$. *Отрицательные значения момента силы упругости в области малых углов соответствуют сжатию резинки.*

2. *Покажем также график исследованной функции* $f(\alpha)$, *показывающий, что найденное значение* α^* *действительно соответствует точке максимума.*

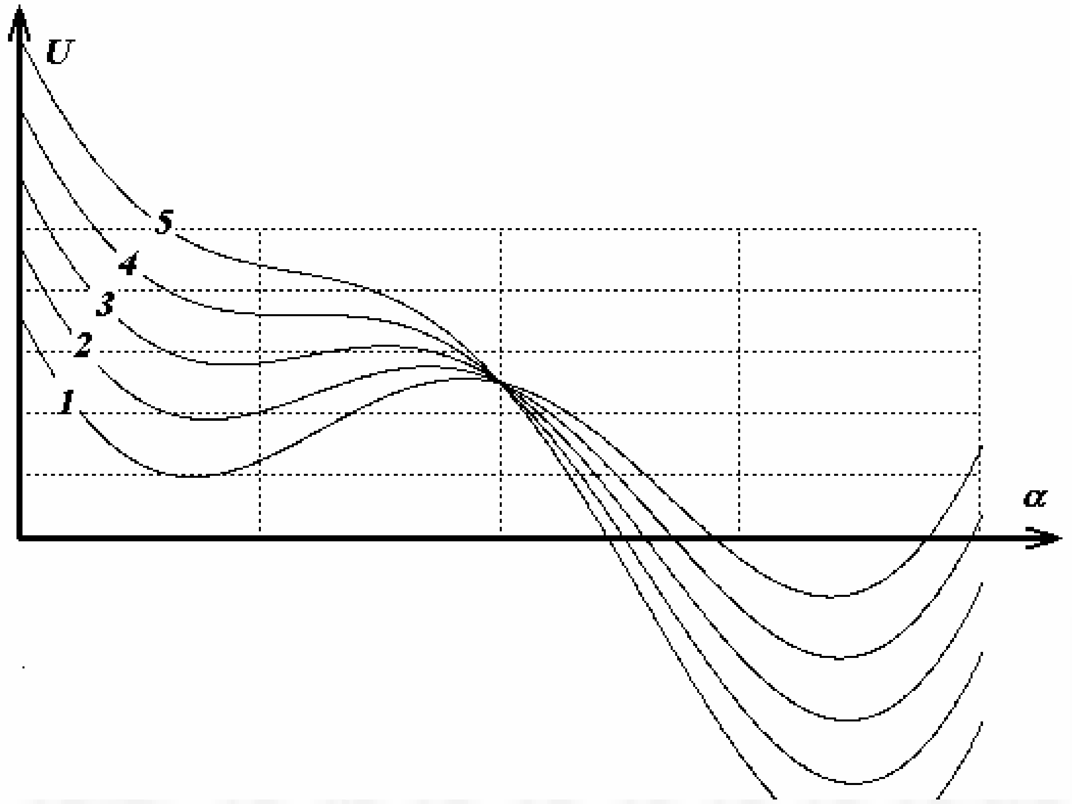


3. *Возможно также решение данной задачи на основании анализа зависимости потенциальной энергии системы от угла отклонения при различных значениях масс грузов*

$$U = 2mgl\cos\alpha + \frac{k}{2}\left(2l\sin\alpha - 2a\right)^2 =$$

$$= 2kl^2\left(\frac{mg}{kl}\cos\alpha - \left(\sin\alpha - \xi\right)^2\right)$$

Если потенциальная кривая имеет минимум в диапазоне $\left[0,\pi/2\right]$, то стержни могут оставаться в положении равновесия выше горизонтали, при исчезновении этого минимума система такого положения равновесия не

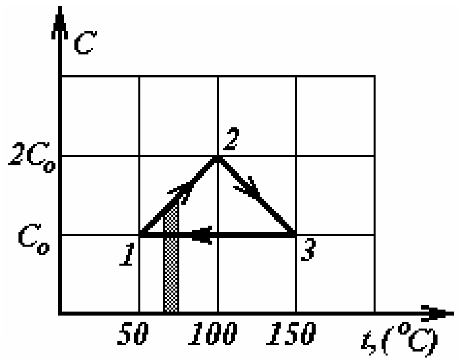


имеет.
Рисунок показывает изменение зависимости потенциальной энергии от угла α при возрастании увеличении массы грузов (в порядке возрастания номеров кривых), который и демонстрирует этот эффект - так на кривой 4, соответствующей найденному граничному значению массы), минимум отсутствует.

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	*Примечания*
2.1	Выражения для моментов сил - необходимость сравнения моментов - момент силы тяжести - момент силы упругости	**4**	 1 1 2
2.2	Исследование зависимостей моментов от угла отклонения - необходимость анализа - поиск максимума - найден максимум	**5**	 1 1 2
2.3	Оформление	**1**	
	ИТОГО	**10**	

Задача 3



Легко заметить, что $C\Delta t = \delta Q$, δQ - количество теплоты, полученное газом при изменении температуры на величину Δt. Следовательно площадь, под графиком зависимости $C(t)$ численно равна количеству полученной теплоты. На участках $1 \to 2$ и $2 \to 3$ $C > 0$ и $\Delta t > 0$, поэтому на этих участках газ получает теплоту от нагревателя $(\delta Q > 0)$. Следовательно, количество полученной газом теплоты равно

$$Q_1 = 2\frac{C_0 + 2C_0}{2} \cdot (t_2 - t_1) = 3C_0(t_2 - t_1) = \frac{9}{2}R(t_2 - t_1). \qquad (1)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$Q_1 = \frac{9}{2}R(t_2 - t_1) = \frac{9}{2} \cdot 8{,}31 \cdot 50 \approx 1{,}9\ кДж\,. \qquad (2)$$

На участке $3 \to 1$ $C > 0$, но $\Delta t < 0$, поэтому на этом участке газ отдает теплоту холодильнику $(\delta Q < 0)$. Количество отданной теплоты равно

$$Q_2 = C_0(t_3 - t_1) = \frac{3}{2}R(t_3 - t_1). \qquad (3)$$

По завершении всего процесса $1 \to 2 \to 3 \to 1$ температура газа принимает первоначальное значение, поэтому изменение внутренней энергии равно нулю, следовательно, разность полученной и отданной теплоты равна работе совершенной газом

$$A = Q_1 - Q_2 = C_0(t_2 - t_1) = \frac{3}{2}R(t_2 - t_1) \approx 0{,}62\ кДж\,. \qquad (4)$$

По определению КПД данного процесса равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{1}{3}. \qquad (5)$$

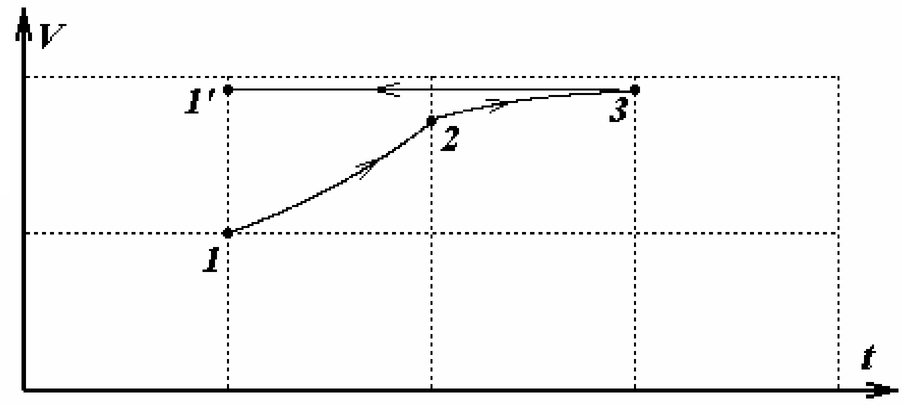
Максимальная температура газа в точке 3, а минимальная в точке 1, поэтому по теореме Карно максимальный КПД цикла, работающего в данном диапазоне температур равен (температуры должны быть переведены в абсолютную шкалу)

$$\eta_{max} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = \frac{t_3 - t_1}{t_3 + 273} = \frac{100}{150 + 273} \approx 0{,}24\,. \qquad (6)$$

Итак, КПД цикла Карно, при тех же предельных температурах, оказался меньше, чем в рассматриваемом процессе. Разрешения парадокса в том, что рассмотренный процесс не является циклическим, так теплоемкость не является функцией состояния. А теорема Карно справедлива для циклических процессов, поэтому в данном случае она не применима.

Примечание к задаче.

Используя уравнение первого начала термодинамики, можно получить уравнения, описывающие данный процесс в терминах параметров состояния. Так на рисунке показан этот процесс в координатах (V, T - «объем-температура»)



Как видно, процесс, действительно не является циклическим (система не возвращается в исходное состояние). Заметьте, что участок $3 \to 1$ является изохорическим процессом.

Схема оценивания.

Пункт	Содержание	Баллы	*Примечания*
2.1	Методика расчета теплоты - элементарная теплота - площадь под графиком (либо интеграл)	**2**	 1 1
2.2	Расчет полученной теплоты - выбор участков (обоснование) - численный расчет	**2**	 1 1
2.3	Расчет работы - методика расчета (обоснование) - численное значение	**2**	 1 1
2.4	КПД процесса	**1**	
2.5	КПД цикла Карно	**1**	
2.6	Объяснение парадокса - есть парадокс - нет цикла	**2**	 1 1
	ИТОГО	**10**	