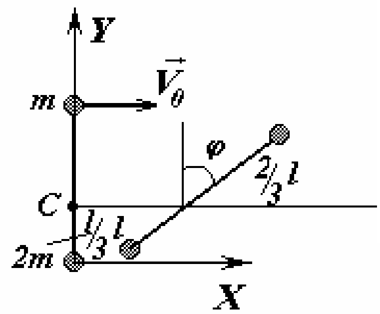
Решения.

11 класс.

1. Движение связанных шайб можно представить как суперпозицию поступательного равномерного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс. Координату центра масс C найдем по формуле



$$y_C = \frac{ml}{m+2m} = \frac{l}{3}, \qquad (1)$$

Скорость центра масс

$$V = \frac{mV_0}{3m} = \frac{V_0}{3},$$

(2)

а угловая скорость вращения

$$\omega = \frac{V_0}{l}. \qquad (3)$$

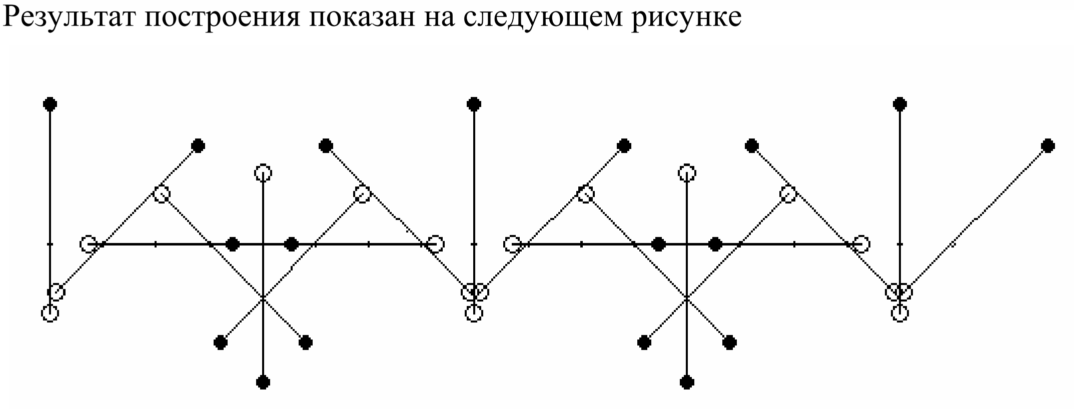
В таком представлении зависимости координат шайб от времени почти очевидны:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{V_0}{3}t + \dfrac{2}{3}l\sin\dfrac{V_0}{l}t \\ y_1 = \dfrac{l}{3} + \dfrac{2}{3}l\cos\dfrac{V_0}{l}t \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{V_0}{3}t - \dfrac{1}{3}l\sin\dfrac{V_0}{l}t \\ y_2 = \dfrac{l}{3} - \dfrac{1}{3}l\cos\dfrac{V_0}{l}t \end{cases}. \qquad (4)$$

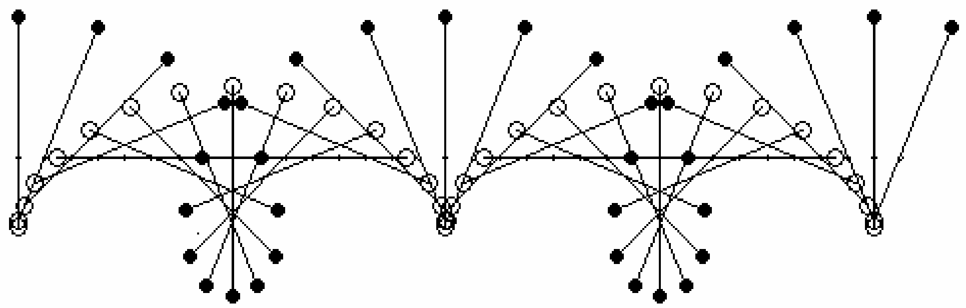
Для построения траекторий можно нарисовать нескольких положений связанных шайб при изменении угла поворота, например на $45°$, и соединить их плавными линиями. Для этого удобно переписать уравнения движения в зависимости от угла поворота $\varphi = \frac{V_0}{l}t$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{l}{3}(\varphi + 2\sin\varphi) \\ y_1 = \dfrac{l}{3}(1 + 2\cos\varphi) \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{l}{3}(\varphi - \sin\varphi) \\ y_1 = \dfrac{l}{3}(1 - \cos\varphi) \end{cases}. \qquad (6)$$

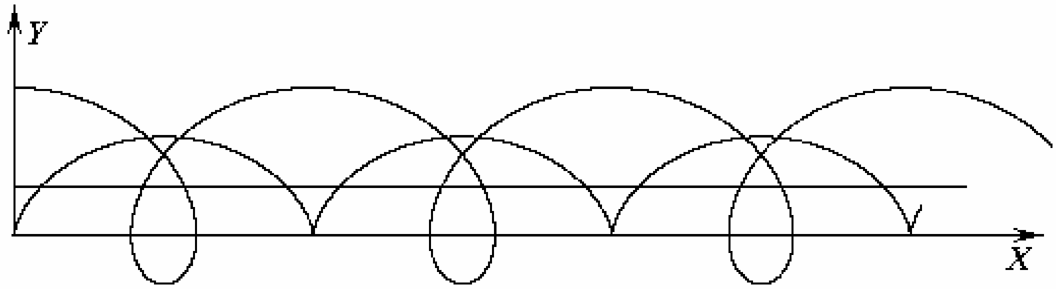
Результат построения показан на следующем рисунке



Более эффектная картинка получится, если уменьшить шаг изменения угла поворота



Траекториями движения являются две циклоиды, первая из которых - удлиненная.



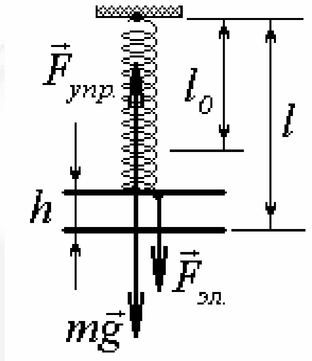
<u>Схема оценивания.</u>

Номер пункта	Содержание	баллы всего	в том числе за подпункты
1	**Разложение движения на составляющие**	***2***	
2	**Уравнения законов движения**	***5***	
	- положение центра масс		*1*
	- скорость центра масс		*1*
	- угловая скорость вращения		*1*
	- закон движения тела m		*1*
	- закон движения тела $2m$		*1*
3	**Построение траекторий**	***3***	
	- метод построения		*1*
	- тела m		*1*
	- тела $2m$		*1*
	всего	***10***	

2. Сила, действующая на подвешенную пластину, вычисляется с помощью «цепочки» формул

$$F = \frac{qE}{2} = \frac{S\sigma E}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} S = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2h^2}, \qquad (1)$$

где q - электрический заряд одной пластины, σ - поверхностная плотность заряда на пластине, $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ - напряженность поля, создаваемого одной пластиной (естественно, напряженность поля внутри конденсатора $E_1 = \frac{U}{h}$ в два раза больше).



Условие равновесия пластины имеет вид

$$mg + \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2h^2} = k(l - l_0 - h), \qquad (2)$$

где $(l - l_0 - h)$ - сила упругости пружины, l - расстояние от нижней неподвижной платины до точки подвеса, l_0 - длина недеформированной пружины, h - расстояние между пластинами.

Если напряжение между пластинами отсутствует, то $h = h_0$, тогда выполняется условие

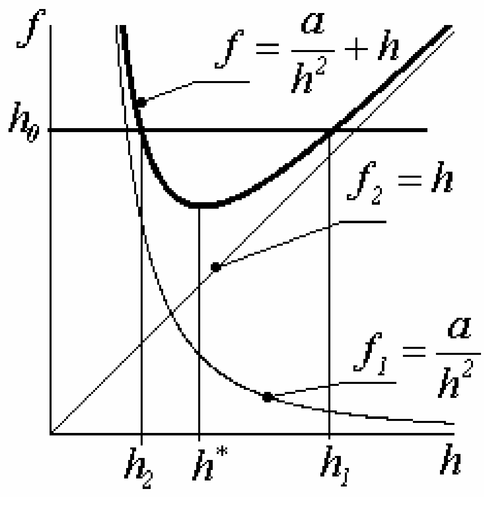
$$mg = k(l - l_0 - h_0). \qquad (3)$$

Из уравнений (2)-(3) следует

$$\frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2h^2} = k(h_0 - h). \qquad (4)$$

Пластины смогут находится в положении равновесия, если уравнение (4) имеет корни, если в качестве неизвестной рассматривать величину h. Перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2kh^2} + h = h_0 \qquad (5)$$



и найдем минимум функции $f(h) = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2kh^2} + h$. Производная от этой функции $f'(h) = -\frac{\varepsilon_0 U^2 S}{kh^3} + 1$ обращается в нуль при $h = h^* = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon_0 U^2 S}{k}}$. Поэтому минимальное значение рассматриваемой функции определяется выражением $f_{min} = f(h^*) = \frac{3}{2}h^*$. Уравнение (4) и равносильное ему уравнение (5) будут иметь корни, если $f_{min} < h_0$. Таким образом, условия существования положения равновесия имеет вид

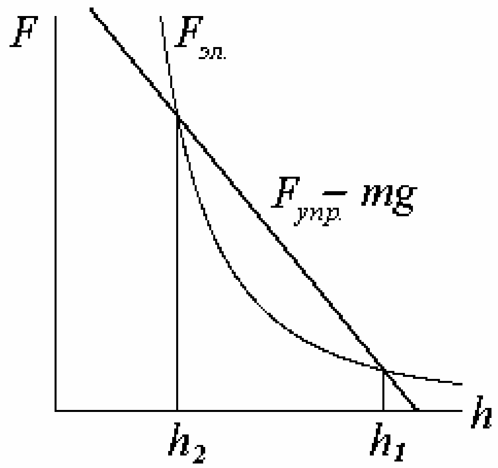
$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\varepsilon_0 U^2 S}{k}} < h_0 . \qquad (6)$$

Из этого неравенства находим

$$U < \frac{8}{27}\frac{k h_0^3}{\varepsilon_0 S} . \qquad (7)$$

Теперь необходимо убедится, что хотя бы одно из решений уравнения (4) описывает устойчивое положение равновесия.

Для этого построим схематически графики зависимостей сил упругости пружины и силы электрического притяжения от расстояния между пластинами.



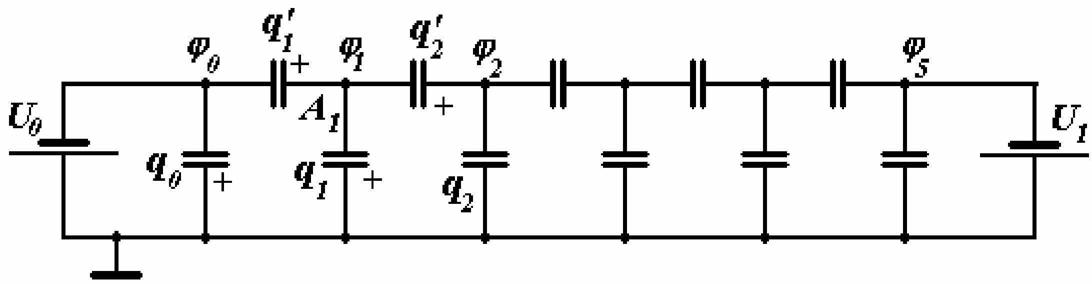
Легко показать, что большему корню h_1 соответствует положение устойчивого равновесия, а меньшему h_2 - положение неустойчивого равновесия.

Таким образом, при выполнении неравенства (7), пластины могут находится на некотором расстоянии друг от друга.

<u>Схема оценивания.</u>

Номер пункта	Содержание	баллы всего	в том числе за подпункты
1	**Аналитическое условие равновесия (4)**	*5*	
	- сила притяжения (1)		*3*
	- сила упругости		*1*
	- уравнение (4)		*1*
2	**Условие существования корней**	*3*	
	- анализ уравнения (4)		*2*
	- условие (7)		*1*
3	**Доказательство устойчивости**	*2*	
	итого	*10*	

3. Обозначим потенциалы точек $A_k\ (k = 1,2,...5)$ через φ_k, заряды конденсаторов емкостями C_1 - q'_k, а кондесаторов C_2 - q_k, соответсвенно. Расставим также предположительные знаки зарядов на пластинах конденсаторов.



Так как потенциалы точек $A_k\ (k = 1,2,...5)$ должны образовывать геометрическую прогрессию, то

$$\varphi_k = \varphi_0 \lambda^k, \qquad (1)$$

где λ - неизвестный пока знаменатель прогрессии, а $\varphi_0 = U_0$.

Используя закон сохранения электрического заряда, можно записать соотношения между зарядами конденсаторов, подключенных к точке A_1:

$$q'_1 = q_1 + q'_2. \qquad (2)$$

Заряды конденсаторов связаны с разностью потенциалов соотношением $q = C\Delta\varphi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} q_1 &= C_2\varphi_1 = \lambda C_2 \varphi_0 \\ q'_1 &= C_1(\varphi_0 - \varphi_1) = (1-\lambda)C_1\varphi_0 \\ q'_2 &= C_1(\varphi_1 - \varphi_{21}) = \lambda(1-\lambda)C_1\varphi_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Подставляя значения зарядов в уравнение (2), получим уравнение из решения которого можно найти значение величины λ

$$(1-\lambda)C_1\varphi_0 = \lambda C_2\varphi_0 + \lambda(1-\lambda)C_1\varphi_0,$$

или

$$(1-\lambda) = \lambda\frac{C_2}{C_1} + \lambda(1-\lambda). \qquad (4)$$

Корни этого квадратного уравнения находятся по стандартной формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 + \frac{C_2}{C_1} \pm \sqrt{(2 + \frac{C_2}{C_1})^2 - 4}}{2}. \qquad (5)$$

Используя значение отношения емкостей конденсаторов, получим

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}. \qquad (6).$$

Чтобы условие задачи было удовлетворено, необходимо, чтобы напряжение второго источника удовлетворяло соотношению

$$U_1 = \varphi_5 = U_0 \lambda^5 = 3^{\pm 5} U_0 . \qquad (7)$$

Таким образом, задача имеет два решения

$$U_1 = 3^5 U_0 = 0{,}24 \cdot 10^3\ В, \quad U_1 = 3^{-5} U_0 = 0{,}043 В .$$

Потенциалы точек образуют прогрессию:

в первом случае $-10, -30, -90, -270, -810, -2430\ В$;

во втором $-10, -3.3, -1.1, -0.37, -0.12, -0.041 В$.

Заметим, что существование двух решений следует из симметрии рассматриваемой электрической схемы.

<u>Схема оценивания.</u>

Номер пункта	Содержание	баллы всего	в том числе за подпункты
1	**Уравнение для знаменателя прогрессии**	***4***	
	- потенциалы точек		*1*
	- связь заряда и разности потенциалов		*1*
	- соотношение между зарядами (2)		*2*
2	**Определение знаменателя прогрессии**	***3***	
	- два корня		*1*
3	**Значение напряжения**	***2***	
	- формула		*1*
	- численные значения		*1*
4	**Потенциалы точек (численные значения)**	***1***	
	всего	***10***	

4. Вода в трубке поднимается благодаря капиллярным силам. Условие равновесия столба воды в трубке имеет вид

$$P + \rho g h = P_{Лап.} + P_0, \qquad (1)$$

где P - давление газа в трубке, $\rho g h$ - гидростатическое давление столбика воды, h - высота столба воды в трубке, ρ - плотность воды, $P_{Лап.}$ - лапласовское давление под искривленной поверхностью, P_0 - атмосферное давление. При открытом верхнем конце трубки, давление газа внутри трубки равно атмосферному, поэтому

$$\rho g h_0 = P_{Лап.}. \qquad (2)$$

Если трубка закрыта, то давление внутри нее можно найти из закона Бойля-Мариотта

$$P(l-h) = P_0 l. \qquad (3)$$

Выражая из уравнений (2) - (3) лапласовское давление и давление газа внутри трубки и подставляя их в условия равновесия (1), получим квадратное уравнения для определения h:

$$\frac{P_0 l}{l-h} + \rho g h = \rho g h_0 + P_0, \quad \Rightarrow \quad \frac{P_0 h}{l-h} = \rho g (h_0 - h). \qquad (4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$h = \frac{\frac{P_0}{\rho g} \pm \sqrt{\left(\frac{P_0}{\rho g}\right)^2 - 4 l h_0}}{2}; \qquad (5)$$

Больший корень физического смысла не имеет, поэтому ответ данной задачи

$$h = \frac{\frac{P_0}{\rho g} - \sqrt{\left(\frac{P_0}{\rho g}\right)^2 - 4 l h_0}}{2} \approx \frac{\rho g l}{P_0} h_0 \approx 13 см. \qquad (6)$$

Схема оценивания.

Номер пункта	Содержание	баллы всего	в том числе за подпункты
1	**Уравнение равновесия столба воды**	***6***	
	-гидростатическое давление		*1*
	- формула Лапласа		*1*
	- закон Бойля-Мариотта		*2*
	- уравнение (4)		*2*
2	**Решение уравнения (4)**	***4***	
	- формула (5)		*1*
	- отброшен лишний корень		*1*
	- численное значение		*2*
	- лишние значащие цифры		*-1*
	итого	***10***	

5. Двигатель может совершать работу за счет внутренней энергии окружающей среды и внутренней энергии воды.

Работа льда при его замерзании и расширении определяется по формуле

$$A = P\Delta V\,, \qquad (1)$$

где $\Delta V = M(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в})$ - увеличение его объема при замерзании, M - масса льда, $\rho_л, \rho_в$ - плотности льда и воды, соответственно.

Массу льда, которую можно заморозить найдем из уравнения теплового баланса

$$M\lambda = mL \quad \Rightarrow \quad M = m\frac{L}{\lambda}, \qquad (2)$$

где m - масса имеющегося в нашем распоряжении жидкого азота, L - удельная теплота парообразования азота, λ - удельная теплота кристаллизации воды.

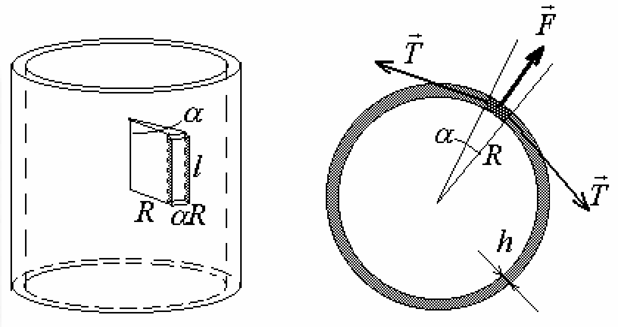
Максимальное давление льда опреляется прочностью стенок цилиндра двигателя.

Выделим на поверхности цилиндра узкую полоску длиной l и видимую с оси цилиндра под малым углом α. Сила давления льда

$$F = PS_0 = Pl\alpha R \qquad (3)$$

уравновешивается силами механического напряжения в стенках цилиндра

$$T = \sigma_{п\,р.}S_1 = \sigma_{п\,р.}lh\,. \qquad (4)$$



В формулах (3)-(4) обозначено: R - радиус цилиндра, h - толщина его стенок, $\sigma_{п\,р.}$ - предел прочности стали, S_0 - площадь выделенной полоски, S_1 - площадь ее боковых торцов. Записывая условие равновесия выделенного элемента в проекции на радиальное направление, получим

$$F = 2T\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \Rightarrow \quad F = T\alpha, \quad \Rightarrow \quad PlR\alpha = \sigma_{п\,р.}lh\alpha\,. \qquad (5)$$

При выводе последнего соотношения учтена малость угла α.

Из уравнения (5) определяем максимально возможное давление льда

$$P = \frac{\sigma_{п\,р.}h}{R}\,. \qquad (6)$$

Таким образом, максимальная работа, которую может совершить двигатель, рассчитывается по формуле

$$A = \frac{\sigma_{п\,р.}h}{R}m\frac{L}{\lambda}(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}) \approx 280\,Дж\,. \qquad (7)$$

Коэффициент полезного действия определяется отношением совершенной работы к количеству полученной теплоты, которая в данном случае равна количеству теплоты, которое требуется на плавление льда ($Q = M\lambda$)

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{\sigma_{np.} h}{R\lambda}\left(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}\right) \approx 1.4 \cdot 10^{-3}\ . \qquad (8)$$

Схема оценивания.

Номер пункта	Содержание	баллы всего	в том числе за подпункты
1	**Источник энергии**	***1***	
2	**Максимальное давление**	***3***	
	- выделение узкой полоски		*1*
	- напряжение в стенке (4)		*1*
	- условие равновесия		*1*
2	**Работа льда**	***4***	
	- формула (1)		*1*
	- изменение объема		*1*
	- тепловой баланс		*1*
	- численное значение		*1*
3	**Расчет КПД**	***2***	
	- определение кпд и расчет теплоты		*1*
	- численное значение		*1*
	итого	***10***	