

Условие

Задание 9-3. «Железнодорожный мост»

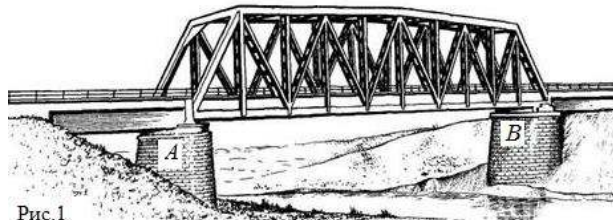


Любые инженерные конструкции предварительно точно рассчитываются, а их поведение в критических ситуациях многократно моделируется на предмет надежности и соответствия требованиям безопасности.

Рассмотрим однопролётный железнодорожный мост (Рис. 1), по которому проходит длинный поезд (длиннее моста) с одинаковыми вагонами.

В опорах (устоях) A и B моста (см. Рис. 1) установлены датчики «избыточного» веса для отслеживания изменения силы давления моста на данную опору при прохождении поезда (т.е. они не учитывают собственный вес моста).

При расчетах будем считать, что масса единицы длины (линейная плотность) поезда $\lambda = \left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right) = \text{const}$ есть величина постоянная. При таком подходе поезд можно считать однородной «движущейся цепочкой» (Рис. 2).



В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс прохождения поезда по мосту с инженерной точки зрения, определить изменения динамической нагрузки на каждую из опор при этом.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь

Часть 1. Балка на опорах

Прежде чем рассматривать движение поезда по однородному мосту, рассмотрим «пустой» мост, без поезда. Неплохой моделью такой механической системы является однородная балка, лежащая на двух опорах.

Рассмотрим однородную горизонтальную балку AB (Рис. 2) массой m , покоящуюся на точечных опорах C и D (см. Рис. 2). Расстояния от центра масс O (Рис. 2) балки до опор

равны $OC = l_1$, $OD = l_2$. «Выступающие» края балки имеют длину $AC = l_3$, $DB = l_4$, соответственно. Площадь поперечного сечения балки постоянна.

1. Найдите модули N_1 и N_2 сил реакций, действующих на балку в опорах C и D , соответственно. 2. Пусть в точку A балки сел небольшой, но тяжелый жучок (Рис. 3) массой m_1 . Найдите изменения ΔN_1 и ΔN_2 модулей сил реакций, действующих на балку в каждой из опор. Укажите знаки каждого из изменений. 3. При какой минимальной массе жучка m_2 сила реакции N_2 , действующая на балку в правой опоре, обратится в нуль?

Часть 2. Длинный поезд

Пусть по мосту длиной $AB = l_0$ (Рис. 4) проходит «однородный» поезд длиной $3l_0$ с одинаковыми вагонами.

Рассмотрим систему в момент, когда на мосту оказалась часть поезда длиной x (см. Рис. 4).

1. Найдите зависимости избыточных сил реакций $N_1(x)$ и $N_2(x)$ в опорах A и B моста, соответственно, от x . 2. Введем безразмерные (приведенные) координаты для силы реакции $N^* = N/(\lambda g l_0)$ и для длины $x^* = x/l_0$. Получите зависимости $N_1^*(x^*)$ и $N_2^*(x^*)$. Рассчитайте полученные зависимости и в листе ответов заполните Таблицу 3. Постройте на Бланке 2 листа ответов полученные зависимости в интервале $0 \leq x^* \leq 1$. 3. При каком x_1^* разность приведенных сил давления $N_1^*(x^*)$ и $N_2^*(x^*)$ максимальна? 4. При каком x_2^* сумма приведенных сил давления $N_1^*(x^*)$ и $N_2^*(x^*)$ максимальна?

Решение

Задание 9-3. «Железнодорожный мост»

Любые инженерные конструкции предварительно точно рассчитываются, а их поведение в критических ситуациях многократно моделируется на предмет надежности и соответствия требованиям безопасности.

Рассмотрим однопролётный железнодорожный мост (Рис. 1), по которому проходит длинный поезд (длиннее моста) с одинаковыми вагонами.

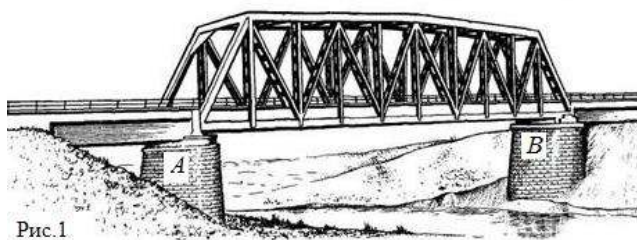


В опорах (устоях) A и B моста (см. Рис. 1) установлены датчики «избыточного» веса для отслеживания изменения силы давления моста на данную опору при прохождении поезда (т.е. они не учитывают собственный вес моста).

При расчетах будем считать, что масса единицы длины (линейная плотность) поезда $\lambda = \left(\frac{\Delta m}{\Delta l}\right) = \text{const}$ есть величина постоянная. При таком подходе поезд можно считать однородной «движущейся цепочкой» (Рис. 2).

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс прохождения поезда по мосту с инженерной точки зрения, определить изменения динамической нагрузки на каждую из опор при этом.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь

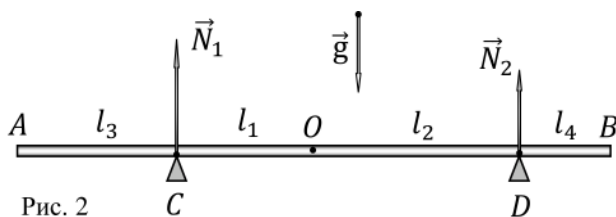


Часть 1. Балка на опорах

Прежде чем рассматривать движение поезда по однородному мосту, рассмотрим «пустой» мост, без поезда. Неплохой моделью такой механической системы является однородная балка, лежащая на двух опорах.

Рассмотрим однородную горизонтальную балку AB (Рис. 2) массой m , покоящуюся на точечных опорах C и D (см. Рис. 2). Расстояния от центра масс O (Рис. 2) балки до опор равны $OC = l_1$, $OD = l_2$. «Выступающие» края балки имеют длину $AC = l_3$, $DB = l_4$, соответственно. Площадь поперечного сечения балки постоянна.

1. Найдите модули N_1 и N_2 сил реакций, действующих на балку в опорах C и D , соответственно. 2. Пусть в точку A балки сел небольшой, но тяжелый жучок (Рис. 3) массой m_1 . Найдите изменения ΔN_1 и ΔN_2 модулей сил реакций, действующих на балку в каждой из опор. Укажите знаки каждого из изменений.

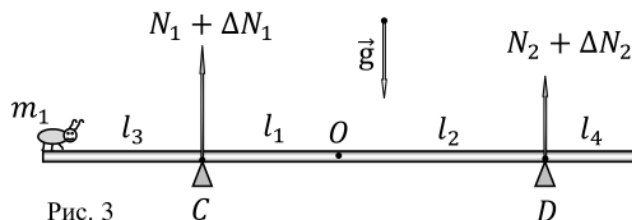


3. При какой минимальной массе жучка m_2 сила реакции N_2 , действующая на балку в правой опоре, обратится в нуль?

Часть 2. Длинный поезд

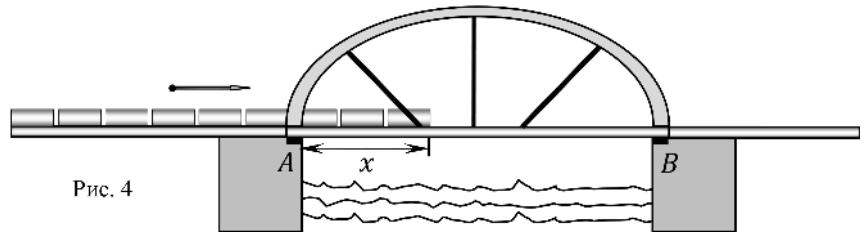
Пусть по мосту длиной $AB = l_0$ (Рис. 4) проходит «однородный» поезд длиной $3l_0$ с одинаковыми вагонами.

Рассмотрим систему в момент, когда на мосту оказалась часть поезда длиной x (см. Рис. 4).



1. Найдите зависимости избыточных сил реакций $N_1(x)$ и $N_2(x)$ в опорах A и B моста, соответственно, от x . 2. Введем безразмерные (приведенные) координаты для силы реакции $N^* = N/(\lambda g l_0)$ и для длины $x^* = x/l_0$. Получите зависимости $N_1^*(x^*)$ и $N_2^*(x^*)$. Рассчитайте полученные зависимости и в листе ответов заполните Таблицу 3. Постройте на Бланке 2

листа ответов полученные зависимости в интервале $0 \leq x^* \leq 1$. 3. При каком x_1^* разность приведенных сил давления $N_1^*(x^*)$ и $N_2^*(x^*)$ максимальна? 4. При каком x_2^* сумма приведенных сил давления $N_1^*(x^*)$ и $N_2^*(x^*)$ максимальна?



Возможные решения:

Часть 1. Балка на опорах

1. При равновесии балки выполняется правило моментов сил относительно оси, проходящей через *любую* точку системы.

Запишем правило моментов относительно точки D (Рис. 1) системы (момент силы N_2 относительно этой оси равен нулю)

$$N_1(l_1 + l_2) = mgl_2 \quad (1)$$

Из (1) найдем силу реакции N_1

$$N_1 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} mg \quad (2)$$

Теперь рассмотрим равновесие балки относительно оси, проходящей через точку C системы (теперь момент силы N_1 относительно этой оси равен нулю)

$$N_2(l_1 + l_2) = mgl_1 \quad (3)$$

Из (3) найдем силу реакции N_2

$$N_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg \quad (4)$$

Заметим, что (4) можно получить и другим способом, используя (2) и правило сил

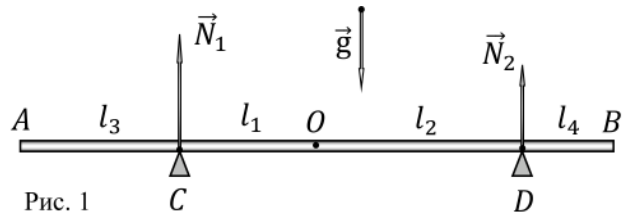
$$N_1 + N_2 = mg \quad (5)$$

откуда

$$N_2 = mg - N_1 = mg - \frac{l_2}{l_1 + l_2} mg = \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg \quad (6)$$

Интересно, что (2) и (4) не зависят от «выступающих» концов балки l_3 и l_4 , поскольку положение центра масс системы (между опорами) автоматически «учитывает» их действие и существование.

1. Жучок (точнее, его сила тяжести m_1g) увеличит силу реакции N_1 в ближней опоре C (Рис. 2) системы ($\Delta N_1 > 0$) и, соответственно, уменьшит в дальней N_2 ($\Delta N_2 < 0$). Запишем это следующим образом



$$\begin{aligned} N_1^* &= N_1 + \Delta N_1 \\ N_2^* &= N_2 - \Delta N_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем правило моментов относительно оси, проходящей через точку C системы

$$mgl_1 = (N_2 - \Delta N_2)(l_1 + l_2) + m_1gl_3 \quad (8)$$

Из (8) получим

$$\Delta N_2 = \frac{l_3}{l_1 + l_2} m_1 g \quad (9)$$

Совершенно аналогично, рассматривая правило моментов относительно оси, проходящей через точку D системы, найдем

$$\Delta N_1 = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_1 + l_2} m_1 g \quad (10)$$

Заметим, что (10) можно получить и другим способом, используя (9) и правило сил

$$\Delta N_1 - \Delta N_2 = m_1 g \quad (11)$$

откуда

$$\Delta N_1 = m_1 g + \Delta N_2 = m_1 g + \frac{l_3}{l_1 + l_2} m_1 g = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{l_1 + l_2} m_1 g \quad (12)$$

Как следует из (9) и (10), теперь результат не зависит от l_4 , поскольку жучок сел на левый конец соломинки.

1. Из (7) и (9) следует, что сила реакции $N_2^* = N_2 - \Delta N_2$ обратится в нуль при минимальной массе жучка m_2 при условии

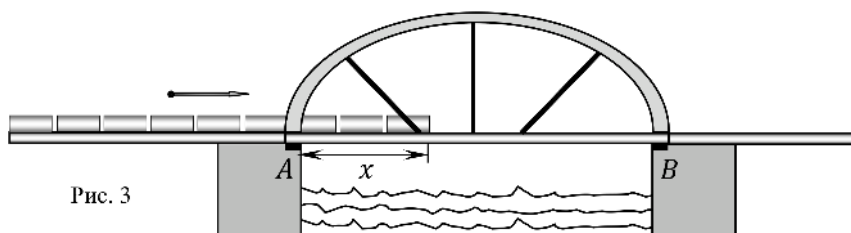
$$N_2 = \Delta N_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg = \frac{l_3}{l_1 + l_2} m_2 g \quad (13)$$

Следовательно,

$$m_2 = \frac{l_1}{l_3} m \quad (14)$$

Часть 2. Длинный поезд

2.1 Пусть в некоторый момент на мосту оказалась часть поезда длиной x (Рис. 3). Поскольку поезд длинный, то имеет смысл разбить расчеты на очевидные этапы: поезд заезжает на мост ($x \leq l$); поезд заполняет весь мост ($l \leq x \leq 2l$); поезд съезжает с моста ($2l \leq x \leq 3l$).



Рассмотрим первый этап. Поскольку на мосту находится часть поезда длиной x , то его масса $m(x) = \lambda x$, (15)

где λ – линейная плотность поезда (масса единицы его длины).

Соответственно, центр масс этого «куска» поезда находится на расстоянии $l_1 = x/2$ от опоры A моста и на расстоянии $l_2 = l_0 - x/2$ от опоры B . Согласно (2) и (3) получим, что в этом случае искомые зависимости равны

$$N_1(x) = \frac{l_2}{l_1+l_2}mg = \frac{l_0-x/2}{l_0}\lambda xg = \frac{(2l_0-x)x}{2l_0}\lambda g, \quad (16)$$

$$N_2(x) = \frac{l_1}{l_1+l_2}mg = \frac{x/2}{l_0}\lambda xg = \frac{x^2}{2l_0}\lambda g, \quad (17)$$

где g – ускорение свободного падения.

2.2 Для получения приведенных сил реакций $N_1^*(x^*)$ и $N_2^*(x^*)$ воспользуемся подсказками, приведенными в условии задания

$$N_1^*(x^*) = \frac{N_1(x)}{\lambda gl_0} = \frac{l_0-x/2}{l_0} \frac{\lambda xg}{\lambda gl_0} = \left(1 - \frac{x^*}{2}\right) x^*, \quad (18)$$

$$N_2^*(x^*) = \frac{N_2(x)}{\lambda gl_0} = \frac{x/2}{l_0} \frac{\lambda xg}{\lambda gl_0} = \frac{(x^*)^2}{2}, \quad (19)$$

	x^*										
	0										
	0,1										
	0,2										
	0,3										
	0,4										
	0,5										
	0,6										
	0,7										
	0,8										
	0,9										
	1										
$N_1^*(x^*)$	0	0,095	0,18	0,255	0,32	0,375	0,42	0,455	0,48	0,495	0,5
$N_2^*(x^*)$	0	0,005	0,02	0,045	0,08	0,125	0,18	0,245	0,32	0,405	0,5

где $x^* = x/l_0$.

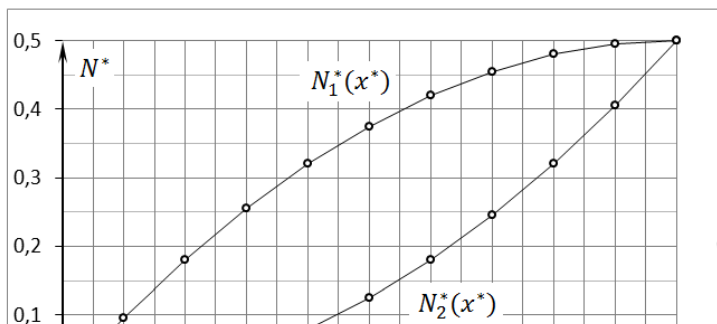
Таблица 3.

Заполняем Таблицу 2. и по полученным точкам в интервале $0 \leq x^* \leq 1$ строим требуемые графики полученных зависимостей.

2.3 Из графика (Рис. 3) визуально заметно, что разность сил сначала увеличивается, а потом уменьшается. Следовательно «где то посередине» у нее существует максимум. Для его поиска воспользуемся (18) и (19)

$$N_1^*(x^*) - N_2^*(x^*) = \left(1 - \frac{x^*}{2}\right) x^* - \frac{(x^*)^2}{2} = (1 - x^*)x^*. \quad (20)$$

Поскольку (20) представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз, то ее максимальное значение будет достигаться в вершине, которая действительно находится посередине



$$x_1^* = 0,5 . \quad (21)$$

2.4 Что касается суммы графиков, то в любой момент времени она равна силе тяжести поезда, выехавшего на мост. Следовательно, она максимальна, когда $x = l_0$, т.е. в указанном диапазоне это произойдет при

$$x_2^* = 1,0 . \quad (22)$$

Заметим (от школьников не требуется!), что полном заполнении моста движущимся поездом ($1 \leq x^* \leq 3$) динамические нагрузки на опоры симметричны и равны $\frac{mg}{2}$ и не изменяются. При съезжании с моста ($3 \leq x^* \leq 4$) графики функций опять же в силу симметрии, «меняются местами» и «разворачиваются».

Контактный телефон для вопросов и консультаций в день проведения олимпиады:

+375 29 766 12 87.

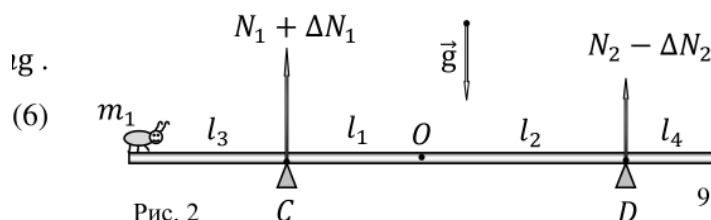


Таблица 3.

x^*	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$N_1^*(x^*)$	0	0,095	0,18	0,255	0,32	0,375	0,42	0,455	0,48	0,495	0,5
$N_2^*(x^*)$	0	0,005	0,02	0,045	0,08	0,125	0,18	0,245	0,32	0,405	0,5

