

Условие

Задание 9-2. «Непостоянный ток»

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: удельная теплоемкость воды $c_v = 4,2$ кДж/(кг • °С).

1. Сила тока I через резистор сопротивлением $R = 200$ Ом изменяется со временем t так, как показано на графике (Рис. 1). При построении графика для удобства использованы популярные ныне безразмерные координаты $I^* = I(t)/I_0$ («безразмерная» сила тока) и $t^* = t/t_0$ («безразмерное время»), где $I_0 = 1,0$ А, $t_0 = 10$ мин – размерные масштабные множители. Точки на графике зависимости $I^*(t^*)$ сведены в Таблицу 1.

Таблица 1. Зависимость $I^*(t^*)$.

	t^*													
	0,0	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
I^*	0,00	0,16	0,22	0,32	0,39	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1,00

Пусть мгновенная мощность тока (тепловыделения) на резисторе $P(t)$. Введем понятие «безразмерной мощности» тока (тепловыделения) на резисторе как $P^*(t^*) = P(t)/(I_0^2 R)$.

Рассчитайте безразмерную мгновенную мощность $P^*(t^*)$ для каждой точки на приведенном графике. Результаты ваших расчетов внесите в Таблицу 2 на Листе ответов.

1. Постройте на Бланке 1 Листа ответов график полученной зависимости $P^*(t^*)$. Проанализируйте полученную зависимость, отметьте ее характер и особенности. 2. Пусть все количество теплоты, выделяемой на резисторе R , идет на нагревание воды массой $m = 0,10$ кг. Найдите, на сколько градусов Δt (°С) нагреется вода при прохождении тока за промежуток времени $t_1 = 8,0$ мин? Начальная температура воды $t_0 = 0,0$ °С. 3. Через какой промежуток времени t_2 вода закипит?

Решение

Задание 9-2. «Непостоянный ток»

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: удельная теплоемкость воды $c_v = 4,2$ кДж/(кг • °С).

1. Сила тока I через резистор сопротивлением $R = 200$ Ом изменяется со временем t так, как показано на графике (Рис. 1). При построении графика для удобства использованы популярные ныне безразмерные координаты $I^* = I(t)/I_0$ («безразмерная» сила тока) и $t^* = t/t_0$ («безразмерное время»), где $I_0 = 1,0$ А, $t_0 = 10$ мин – размерные масштабные множители. Точки на графике зависимости $I^*(t^*)$ сведены в Таблицу 1.

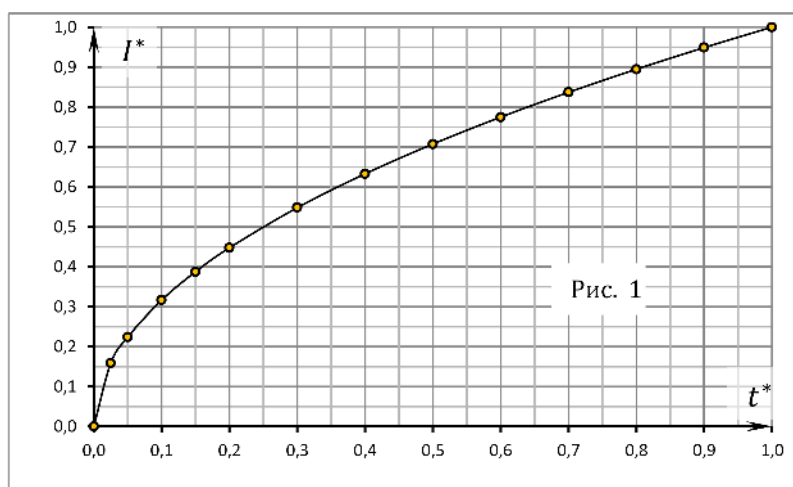


Таблица 1. Зависимость $I^*(t^*)$.

t^*	0,0	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
I^*	0,00	0,16	0,22	0,32	0,39	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1,00

Пусть мгновенная мощность тока (тепловыделения) на резисторе $P(t)$. Введем понятие «безразмерной мощности» тока (тепловыделения) на резисторе как $P^*(t^*) = P(t)/(I_0^2 R)$.

Рассчитайте безразмерную мгновенную мощность $P^*(t^*)$ для каждой точки на приведенном графике. Результаты ваших расчетов внесите в Таблицу 2 на Листе ответов.

1. Постройте на Бланке 1 Листа ответов график полученной зависимости $P^*(t^*)$. Проанализируйте полученную зависимость, отметьте ее характер и особенности. 2. Пусть все количество теплоты, выделяемой на резисторе R , идет на нагревание воды массой $m = 0,10$ кг. Найдите, на сколько градусов Δt ($^{\circ}\text{C}$) нагреется вода при прохождении тока за промежуток времени $t_1 = 8,0$ мин? Начальная температура воды $t_0 = 0,0$ $^{\circ}\text{C}$. 3. Через какой промежуток времени t_2 вода закипит?

Возможное решение:

9-2. «Непостоянный ток»

1. Согласно закону Джоуля-Ленца мгновенная тепловая мощность тока на резисторе равна

$$P(t) = (I(t))^2 R. \quad (1)$$

Соответственно, «безразмерная мощность» тепловыделения на резисторе (согласно условию)

$$P^*(t^*) = \frac{P(t)}{I_0^2 R} = \frac{(I(t))^2 R}{I_0^2 R} = \frac{(I(t))^2}{I_0^2} = \left(\frac{I(t)}{I_0}\right)^2 = (I^*)^2. \quad (2)$$

Таким образом, в выбранных координатах безразмерная мощность $P^*(t^*)$ «фактически» есть квадрат безразмерной силы тока (I^*) !

После такого «открытия», вооружившись инженерным калькулятором (рекомендован к использованию на олимпиаде, поскольку позволяет проводить подобные расчеты достаточно быстро), достаточно быстро рассчитаем безразмерную мощность $P^*(t^*)$ для каждой точки графика. Результаты расчетов внесем в Таблицу 2.

Таблица 2.

	t^*
0,0	
0,025	
0,05	
0,1	
0,15	
0,2	
0,3	
0,4	
0,5	
0,6	
0,7	
0,8	
0,9	
1,0	

I^*	0,00	0,16	0,22	0,32	0,39	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1,00
P^*	0,00	0,0256	0,484	0,1024	0,1521	0,2025	0,3025	0,3969	0,5041	0,5929	0,7056	0,7921	0,9025	1,00

1. Построим по точкам Таблицы 2 график полученной зависимости $P^*(t^*)$ на выданном бланке (Рис. 1).

Из правильно построенного графика $P^*(t^*)$ следует еще одно «интересное открытие» – зрительно рассчитанные точки достаточно неплохо (можно сказать отлично!) ложатся на прямую (доверяй калькулятору!), проходящую через начало координат.

С приемлемой точностью этот же вывод следует и из анализа Таблицы 2, однако графический метод быстр, убедителен и нагляден. Наблюдательность на олимпиаде в цене!

Кроме того, эта прямая («на глаз») является биссектрисой первого координатного угла ($y = x$). Это обстоятельство также упрощает нахождение «безразмерного» количества выделенной в цепи теплоты, как площади соответствующей фигуры под построенным графиком.

Иными словами, можно сначала найти площадь прямоугольного треугольника «под графиком» за требуемый промежуток времени, и далее получить «размерное» количество теплоты.

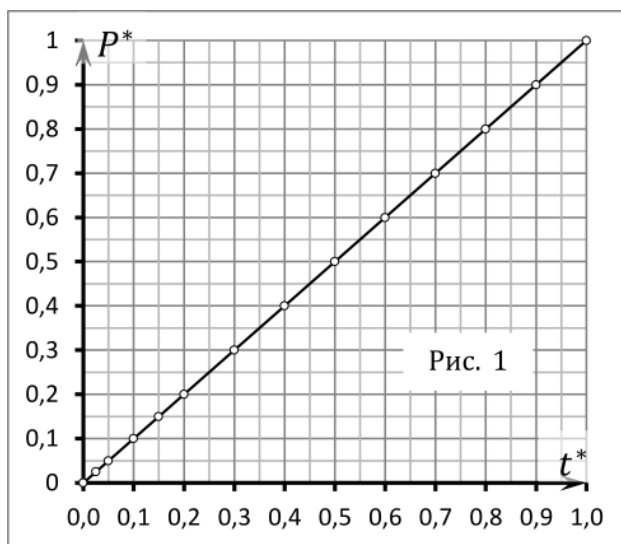


Рис. 1

1. Из выше полученного графика (и из графика в условии) следует, что мгновенная мощность тока в цепи изменяется. В таком случае традиционная формула Джоуля-Ленца «не работает», поскольку непонятно, какое значение мощности «следует брать».

Следовательно, необходимо использовать метод разбиений (Ньютона), при котором данный процесс рассматривается на достаточно малых (бесконечно малых) временных интервалах (промежутках) Δt_i .

На малом временном интервале Δt_i можно считать, что мгновенная мощность P_i остается практически постоянной (пренебрегаем её изменением), тогда закон Джоуля-Ленца опять «работает».

При таком подходе малое количество выделившейся теплоты за промежуток Δt_i будет равно

$$\Delta Q_i = P_i \Delta t_i = I_i^2 R \Delta t_i = (I^*(t^*) \cdot I_0)^2 R \cdot (\Delta t^* t_0) = (I^*(t^*))^2 \Delta t^* (I_0^2 R t_0). \quad (3)$$

Соответственно, за все время на резисторе выделится количество теплоты

$$Q = \sum_i \Delta Q_i = \sum_i (I^*(t^*))^2 \Delta t^* (I_0^2 R t_0) = I_0^2 R t_0 \sum_i (I^*(t^*))^2 \Delta t^*. \quad (4)$$

Сумма $\sum_i (I^*(t^*))^2 \Delta t^*$, стоящая в (4) есть ни что иное, как площадь под графиком из Пункта 2 задания, которую легко отыскать как площадь прямоугольного треугольника.

Согласно уравнению теплового баланса получим

$$Q = \sum_i P_i \Delta t_i = cm(t_2 - t_1). \quad (5)$$

Так, для промежутка времени $t = 8,0$ мин ($t^* = 0,8$) эта площадь будет равна

$$\sum_i^\infty (I^*(t^*))^2 \Delta t^* = \frac{1}{2} \bullet (0,8)^2. \quad (6)$$

В числах получим

$$Q = \frac{1}{2} \bullet (0,8)^2 \bullet (1,0)^2 \bullet 200 \bullet 10 \bullet 60 \text{ (Дж)} = 38400 \text{ Дж.} \quad (7)$$

Это позволит нагреть воду на ($^{\circ}\text{C}$)

$$\Delta t = \frac{Q}{cm} = \frac{38400}{4200 \bullet 0,10} (^{\circ}\text{C}) = \{91,42857143\} = 91 \text{ } ^{\circ}\text{C}. \quad (8)$$

1. Пусть «безразмерное время» закипания воды x , тогда справедливо уравнение

$$Q = \frac{1}{2} \bullet (x)^2 \bullet (1,0)^2 \bullet 200 \bullet 600 \text{ (Дж)} = 42000 \text{ Дж.} \quad (9)$$

Из (9) находим

$$x = \{0,8366600265\} = 0,84, \quad (10)$$

что соответствует промежутку времени

$$t_2 = 8,4 \text{ мин} = 5,0 \bullet 10^2 \text{ с.} \quad (11)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

Таблица 2.

t^*	0,0	0,025	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
I^*	0,00	0,16	0,22	0,32	0,39	0,45	0,55	0,63	0,71	0,77	0,84	0,89	0,95	1,00
P^*	0,00	0,0256	0,484	0,1024	0,1521	0,2025	0,3025	0,3969	0,5041	0,5929	0,7056	0,7921	0,9025	1,00

