

## Активa БГУ

### Условие

#### Задача 11\_2. Крутильные колебания

В данной задаче Вам предстоит исследовать горизонтальные и вертикальные крутильные колебания.

**Оборудование:** экспериментальная установка (рис. 1, включает: штатив (из старого оборудования) с лапкой и двумя винтовыми зажимами, дополнительная штанга от штатива для горизонтальной перекладины (можно из оборудования «Активa БГУ») пружина (из оборудования «Активa БГУ», длина 5,0 см, диаметр, 1,3 см), зажим канцелярский, тонкий стержень (алюминиевая или стальная упругая проволока, длина 80 – 90 см, диаметр не менее 3 – 5 мм), два груза с крючками по 50 г (можно гирьки от весов) кусочек пластилина (для крепления грузов на проволоке если необходимо) мерная лента, электронный секундомер.

Рисунок 1



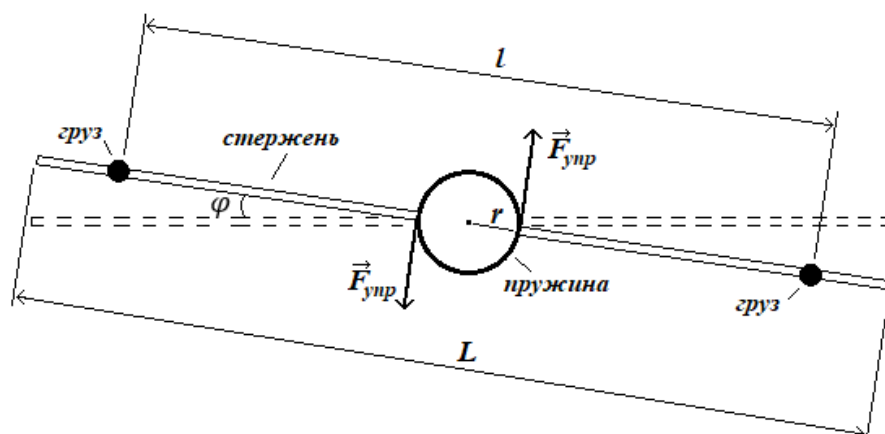
#### Часть 0. Наблюдения (не оценивается)

Подвесьте к горизонтальному стержню два груза как показано на рис.1 (после подвешивания грузов, стержень должен располагаться горизонтально). Закрепите крючки грузов кусочками пластилина, иначе при вертикальных колебаниях грузы могут соскользнуть со стержня.

Возьмитесь за края стержня обеими руками и поверните его на небольшой угол в горизонтальной плоскости (отведите края стержня на 5 – 10 см в сторону от положения равновесия) и отпустите. Пронаблюдайте горизонтальные крутильные колебания. Пружина при таких колебаниях должна сохранять вертикальное положение.

Отклоните стержень в вертикальной плоскости на небольшой угол (приподнимите один из краёв стержня на 3 – 5 см вверх от положения равновесия) и отпустите. Пронаблюдайте вертикальные крутильные колебания. Пружина при таких колебаниях должна изгибаться только в плоскости колебаний стержня.

#### Часть 1. Теоретическая



Введём обозначения:  $T$  – период колебаний,  $l$  – расстояние между центрами грузов,  $L$  – длина стержня,  $k$  – модуль кручения пружины (коэффициент её жёсткости «на кручение»),  $m_{\text{г}}$  – масса одного груза,  $m_{\text{с}}$  – масса стержня.

Рисунок 2. Крутильный маятник. Вид сверху

Иные необходимые вам промежуточные величины вводите и описывайте самостоятельно.

При горизонтальных крутильных колебаниях (рис.2) Момент сил упругости  $M_{\text{упр}}$  пропорционален углу закручивания пружины  $\varphi$ :

$$M_{\text{упр}} = -k\varphi. \quad (1)$$

Второй закон Ньютона для рассматриваемого случая примет вид:

$$J\varepsilon = M_{\text{упр}}, \quad (2)$$

где:  $\varepsilon$  – угловое ускорение грузов и стержня ( $[\varepsilon] = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ ),  $J$  – суммарный момент инерции грузов и стержня.

$$J = J_{\text{г}} + J_{\text{с}}. \quad (3)$$

Момент инерции стержня в данном случае определяется:

$$J_{\text{с}} = \frac{1}{12}m_{\text{с}}L^2. \quad (4)$$

Грузы можно считать материальными точками. Момент инерции материальной точки  $J_{\text{МТ}}$  массой  $m$ , которая движется по окружности радиуса  $R$  определяется:

$$J_{\text{МТ}} = mR^2. \quad (5)$$

**1.1** Получите формулу для суммарного момента инерции грузов и стержня через их массы, длину стержня  $L$  и расстояние между центрами грузов  $l$ .

**1.2** Покажите, что период крутильных колебаний данной системы тел будет определяться уравнением:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}m_{\Gamma}l^2 + \frac{1}{12}m_c L^2}{k}}. \quad (6)$$

**Подсказка.** 1) В рассмотренной колебательной системе, характеризующие её физические величины, будут аналогичны физическим величинам, характеризующих пружинный маятник: угловое ускорение – ускорению тела, угол закручивания пружины – координате тела, суммарный момент инерции стержня и грузов – массе тела. 2) Эксперименты в частях 2 и 3 можно выполнять «одновременно». 3) Масса каждого груза  $m_{\Gamma} = 50,0$  г

## Часть 2. Эксперимент. Горизонтальные крутильные колебания

**2.1** Измерьте длину проволоки  $L$ . **2.2** Исследуйте зависимость периода горизонтальных крутильных колебаний от расстояния между центрами грузов  $T(l)$  экспериментально. Результаты представьте таблично. Кратко опишите как вы измеряли период. **2.3** Линеаризируйте уравнение (6). Укажите какие величины в полученном вами линеаризованном уравнении будут аналогичны величинам  $y$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $x$  в линейном уравнении  $y = b + ax$  (7). **2.4** Постройте график линеаризованной зависимости  $T(l)$ . **2.5** На основе результатов эксперимента определите период горизонтальных крутильных колебаний, когда  $l \rightarrow 0$ . Вычислите погрешности. **2.6** На основе результатов эксперимента определите модуль кручения пружины  $k$ . Вычислите погрешности. **2.7** На основе результатов эксперимента определите массу стержня  $m_c$ . Вычислите погрешности.

## Часть 3. Эксперимент. Вертикальные крутильные колебания

**3.1** Исследуйте зависимость периода вертикальных крутильных колебаний от расстояния между центрами грузов  $T(l)$  экспериментально. Результаты представьте таблично. **3.2** Какая из приведенных ниже зависимостей  $T(l)$  при вертикальных крутильных колебаниях будет выполняться:

$$T = 2\pi \sqrt{b_1 + a_1 l^2} \quad (8)$$

или

$$T = 2\pi \sqrt{b_2 + a_2 l} \quad (9)$$

Здесь  $b_1$ ,  $a_1$ ,  $b_2$ ,  $a_2$  некоторые константы. **3.3** На основе результатов эксперимента определите среднее значение периода вертикальных крутильных колебаний, когда  $l \rightarrow 0$ . Погрешности в данном пункте вычислять не нужно.

## Решение

### Задача 11\_2. Крутильные колебания

В данной задаче Вам предстоит исследовать горизонтальные и вертикальные крутильные колебания.

**Оборудование:** экспериментальная установка (рис. 1, включает: штатив (из старого оборудования) с лапкой и двумя винтовыми зажимами, дополнительная штанга от штатива для горизонтальной переключины (можно из оборудования «Актива БГУ») пружина (из оборудования «Актива БГУ», длина 5,0 см, диаметр, 1,3 см), зажим канцелярский, тонкий стержень (алюминиевая или стальная упругая проволока, длина 80 – 90 см, диаметр не менее 3 – 5 мм), два груза с крючками по 50 г (можно гирьки от весов) кусочек пластилина (для крепления грузов на проволоке если необходимо) мерная лента, электронный секундомер.

Рисунок 1



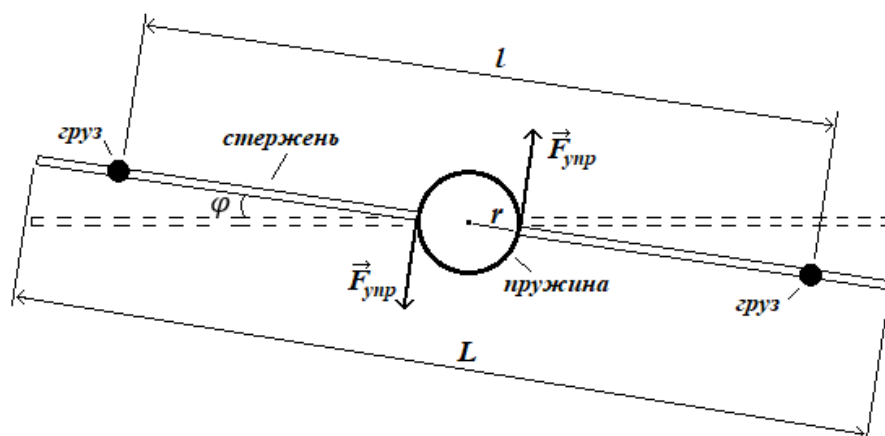
#### Часть 0. Наблюдения (*не оценивается*)

Подвесьте к горизонтальному стержню два груза как показано на рис.1 (после подвешивания грузов, стержень должен располагаться горизонтально). Закрепите крючки грузов кусочками пластилина, иначе при вертикальных колебаниях грузы могут соскользнуть со стержня.

Возьмитесь за края стержня обеими руками и поверните его на небольшой угол в горизонтальной плоскости (отведите края стержня на 5 – 10 см в сторону от положения равновесия) и отпустите. Пронаблюдайте горизонтальные крутильные колебания. Пружина при таких колебаниях должна сохранять вертикальное положение.

Отклоните стержень в вертикальной плоскости на небольшой угол (приподнимите один из краёв стержня на 3 – 5 см вверх от положения равновесия) и отпустите. Пронаблюдайте вертикальные крутильные колебания. Пружина при таких колебаниях должна изгибаться только в плоскости колебаний стержня.

#### Часть 1. Теоретическая



Введём обозначения:  $T$  – период колебаний,  $l$  – расстояние между центрами грузов,  $L$  – длина стержня,  $k$  – модуль кручения пружины (коэффициент её жёсткости «на кручение»),  $m_{\text{г}}$  – масса одного груза,  $m_{\text{с}}$  – масса стержня.

Рисунок 2. Крутильный маятник. Вид сверху

Иные необходимые вам промежуточные величины вводите и описывайте самостоятельно.

При горизонтальных крутильных колебаниях (рис.2) Момент сил упругости  $M_{\text{упр}}$  пропорционален углу закручивания пружины  $\varphi$ :

$$M_{\text{упр}} = -k\varphi. \quad (1)$$

Второй закон Ньютона для рассматриваемого случая примет вид:

$$J\varepsilon = M_{\text{упр}}, \quad (2)$$

где:  $\varepsilon$  – угловое ускорение грузов и стержня ( $[\varepsilon] = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ ),  $J$  – суммарный момент инерции грузов и стержня.

$$J = J_{\text{г}} + J_{\text{с}}. \quad (3)$$

Момент инерции стержня в данном случае определяется:

$$J_{\text{с}} = \frac{1}{12}m_{\text{с}}L^2. \quad (4)$$

Грузы можно считать материальными точками. Момент инерции материальной точки  $J_{\text{МТ}}$  массой  $m$ , которая движется по окружности радиуса  $R$  определяется:

$$J_{\text{МТ}} = mR^2. \quad (5)$$

**1.1** Получите формулу для суммарного момента инерции грузов и стержня через их массы, длину стержня  $L$  и расстояние между центрами грузов  $l$ .

**1.2** Покажите, что период крутильных колебаний данной системы тел будет определяться уравнением:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}m_{\Gamma}l^2 + \frac{1}{12}m_c L^2}{k}}. \quad (6)$$

**Подсказка.** 1) В рассмотренной колебательной системе, характеризующие её физические величины, будут аналогичны физическим величинам, характеризующих пружинный маятник: угловое ускорение – ускорению тела, угол закручивания пружины – координате тела, суммарный момент инерции стержня и грузов – массе тела. 2) Эксперименты в частях 2 и 3 можно выполнять «одновременно». 3) Масса каждого груза  $m_{\Gamma} = 50,0$  г

## Часть 2. Эксперимент. Горизонтальные крутильные колебания

**2.1** Измерьте длину проволоки  $L$ . **2.2** Исследуйте зависимость периода горизонтальных крутильных колебаний от расстояния между центрами грузов  $T(l)$  экспериментально. Результаты представьте таблично. Кратко опишите как вы измеряли период. **2.3** Линеаризируйте уравнение (6). Укажите какие величины в полученном вами линеаризованном уравнении будут аналогичны величинам  $y$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $x$  в линейном уравнении  $y = b + ax$  (7). **2.4** Постройте график линеаризованной зависимости  $T(l)$ . **2.5** На основе результатов эксперимента определите период горизонтальных крутильных колебаний, когда  $l \rightarrow 0$ . Вычислите погрешности. **2.6** На основе результатов эксперимента определите модуль кручения пружины  $k$ . Вычислите погрешности. **2.7** На основе результатов эксперимента определите массу стержня  $m_c$ . Вычислите погрешности.

## Часть 3. Эксперимент. Вертикальные крутильные колебания

**3.1** Исследуйте зависимость периода вертикальных крутильных колебаний от расстояния между центрами грузов  $T(l)$  экспериментально. Результаты представьте таблично. **3.2** Какая из приведенных ниже зависимостей  $T(l)$  при вертикальных крутильных колебаниях будет выполняться:

$$T = 2\pi \sqrt{b_1 + a_1 l^2} \quad (8)$$

или

$$T = 2\pi \sqrt{b_2 + a_2 l} \quad (9)$$

Здесь  $b_1$ ,  $a_1$ ,  $b_2$ ,  $a_2$  некоторые константы. **3.3** На основе результатов эксперимента определите среднее значение периода вертикальных крутильных колебаний, когда  $l \rightarrow 0$ . Погрешности в данном пункте вычислять не нужно.

## Задача 11\_2. Крутильные колебания (решение)

### Часть 1. Теоретическая

1.1 Момент инерции двух грузов, относительно оси пружины

$$J_{\Gamma} = 2m_{\Gamma} \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{m_{\Gamma} l^2}{2}. \quad (10)$$

Учитывая (3) и (4), суммарный момент инерции грузов и стержня:

$$J = \frac{m_{\Gamma} l^2}{2} + \frac{1}{12} m_c L^2. \quad (11)$$

1.2 Подставляя (1) в (2), получим:

$$J\varepsilon = -k\varphi, \quad (12)$$

откуда

$$J\varepsilon + k\varphi = 0, \quad (13)$$

$$\varepsilon + \frac{k}{J}\varphi = 0. \quad (14)$$

Используя аналогию, указанную в подсказке, сравним (14) с уравнением гармонических колебаний

$$a_x + \omega^2 x = 0, \quad (15)$$

Для горизонтальных крутильных колебаний получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{J}}. \quad (16)$$

Период таких колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}, \quad (17)$$

подставляя (11) в (17), получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}m_{\Gamma}l^2 + \frac{1}{12}m_cL^2}{k}}. \quad (6)$$

## Часть 2. Эксперимент. Горизонтальные крутильные колебания

2.1  $L = (86,0 \pm 0,1)$  см.

2.2 Измеряем время 10-и оборотов шарика по окружности  $\Delta\tau$ . Период находим как

$$T = \frac{\Delta\tau}{10}. \quad (18)$$

Таблица 1. Зависимость  $T(l)$  при горизонтальных крутильных колебаниях

| $\Delta\tau, c$ | $l, \text{см}$ | $T, c$ |
|-----------------|----------------|--------|
| 29,65           | 6,5            | 2,97   |
| 31,53           | 9,6            | 3,15   |
| 37,46           | 17,5           | 3,75   |
| 39,38           | 19,5           | 3,94   |
| 42,89           | 23,1           | 4,29   |
| 52,95           | 31,7           | 5,30   |
| 57,89           | 36,0           | 5,79   |
| 65,20           | 41,5           | 6,52   |
| 73,38           | 48,5           | 7,34   |
| 82,10           | 54,5           | 8,21   |
| 86,80           | 58,7           | 8,68   |
| 90,22           | 61,1           | 9,02   |
| 97,17           | 66,6           | 9,72   |
| 107,70          | 74,0           | 10,77  |

2.3 Возведём обе части уравнения (6) в квадрат, получим:

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{\frac{1}{2}m_{\Gamma}l^2 + \frac{1}{12}m_cL^2}{k}, \quad (19)$$

откуда

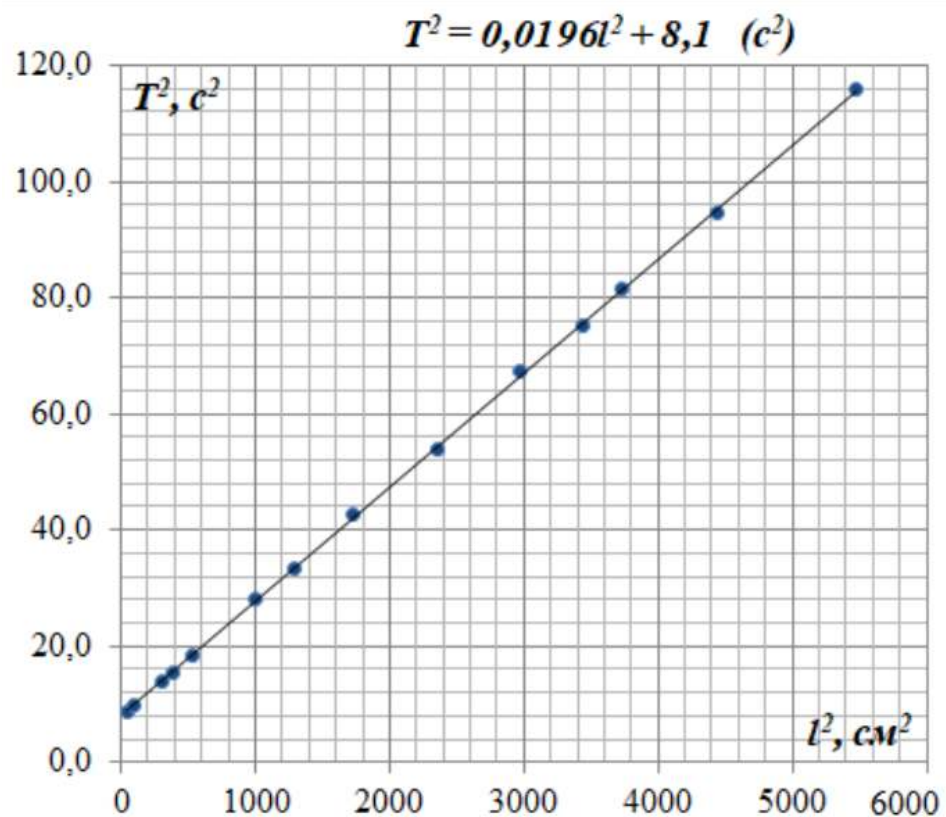
$$T^2 = \frac{\pi^2}{3k}m_cL^2 + \frac{2\pi^2}{k}m_{\Gamma}l^2, \quad (20)$$

Сравнивая (20) с уравнением  $y = b + ax$  (7) видим, что

$$T^2 \rightarrow y, \quad \frac{\pi^2}{3k}m_cL^2 \rightarrow b, \quad \frac{2\pi^2}{k}m_{\Gamma} \rightarrow a, \quad l^2 \rightarrow x. \quad (21)$$

2.4 Определим значения  $T^2$  и  $l^2$ .

|                                   |                                                     |                                 |                                                                           |
|-----------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| Таблица 2. Зависимость $T^2(l^2)$ |                                                     |                                 | График 1. Зависимость $T^2(l^2)$ при горизонтальных крутильных колебаниях |
|                                   | $l^2, \text{см}^2$                                  | $T^2, \text{с}^2$               | $T^2 = 0,0196l^2 + 8,1 \text{ (с}^2\text{)}$                              |
|                                   | 42                                                  | 8,82                            |                                                                           |
|                                   | 92                                                  | 9,92                            |                                                                           |
|                                   | 306                                                 | 14,1                            |                                                                           |
|                                   | 380                                                 | 15,5                            |                                                                           |
|                                   | 534                                                 | 18,4                            |                                                                           |
|                                   | 1005                                                | 28,1                            |                                                                           |
|                                   | 1296                                                | 33,5                            |                                                                           |
|                                   | 1722                                                | 42,5                            |                                                                           |
|                                   | 2352                                                | 53,9                            |                                                                           |
|                                   | 2970                                                | 67,4                            |                                                                           |
|                                   | 3446                                                | 75,3                            |                                                                           |
|                                   | 3733                                                | 81,4                            |                                                                           |
|                                   | 4436                                                | 94,5                            |                                                                           |
|                                   | 5476                                                | 116,0                           |                                                                           |
| сред                              | 1985                                                | 47,1                            |                                                                           |
| дисп                              | 2917801                                             | 1125                            |                                                                           |
| ковар                             |                                                     | 57283                           |                                                                           |
| N                                 | $\langle a \rangle, \frac{\text{с}^2}{\text{см}^2}$ | $\langle b \rangle, \text{с}^2$ |                                                                           |
| 14                                | 0,0196                                              | 8,1                             |                                                                           |
|                                   | $\Delta a$                                          | $\Delta b$                      |                                                                           |
|                                   | 0,0002                                              | 0,4                             |                                                                           |
| коррел                            | 0,9998                                              |                                 |                                                                           |



2.5 Используя (20) и (21), получим, что при  $l \rightarrow 0$

$$T = \sqrt{b}. \quad (22)$$

Используя МНК (можно использовать ПГО), находим:

$$b = (8,1 \pm 0,4)c^2,$$

$$\langle T \rangle = \sqrt{\langle b \rangle} = \sqrt{8,1} = 2,8c.$$

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta b}{\langle b \rangle} = \frac{0,4c^2}{8,1c^2} = 0,049 = 4,9\%, \quad (23)$$

$$\varepsilon_T = \frac{\varepsilon_b}{2} = \frac{0,049}{2} = 0,025 = 2,5\%, \quad (24)$$

$$\Delta T = \varepsilon_T \cdot \langle T \rangle = 0,025 \cdot 2,8c = 0,07c = 0,1c. \quad (25)$$

Так как последняя значащая цифра в среднем значении периода  $\langle T \rangle$  находится в разряде десятых, то абсолютную погрешность необходимо принять  $\Delta T = 0,1c$ .

$$T = \langle T \rangle \pm \Delta T = (2,8 \pm 10)c$$

**2.6** Используя (20) и (21), получим:

$$k = \frac{2\pi^2}{a} m_\Gamma. \quad (26)$$

Используя МНК, находим:

$$a = (1,96 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \frac{c^2}{\text{см}^2} = (1,96 \pm 0,02) \cdot 10^2 \frac{c^2}{\text{м}^2},$$

$$\langle k \rangle = \frac{2\pi^2}{\langle a \rangle} \langle m_\Gamma \rangle = \frac{2 \cdot 3,14159^2}{1,96 \cdot 10^2 \frac{c^2}{\text{м}^2}} \cdot 5,00 \cdot 10^{-2} \text{кг} = 5,04 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}, \quad (27)$$

$$\varepsilon_k = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_\Gamma}{\langle m_\Gamma \rangle}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,02 \cdot 10^2 \frac{c^2}{\text{м}^2}}{1,96 \cdot 10^2 \frac{c^2}{\text{м}^2}}\right)^2 + \left(\frac{0,1\Gamma}{50,0\Gamma}\right)^2} = 0,011 = 1,1\%, \quad (28)$$

$$\Delta k = \varepsilon_k \cdot \langle k \rangle = 0,011 \cdot 5,04 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}} = 0,06 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}. \quad (29)$$

$$k = \langle k \rangle \pm \Delta k = (5,04 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$$

**2.7** Используя (20) и (21), получим:

$$m_c = \frac{3kb}{\pi^2 L^2}, \quad (30)$$

$$\langle m_c \rangle = \frac{3\langle k \rangle \langle b \rangle}{\pi^2 \langle L \rangle^2} = \frac{3 \cdot 5,04 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \cdot 8,1 \text{с}^2}{3,14159^2 \cdot (0,860 \text{м})^2} = 16,8 \cdot 10^{-3} \text{кг} = 16,8 \text{г},$$

$$\varepsilon_{m_c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{\langle k \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta L}{\langle L \rangle}\right)^2}, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{m_c} = \sqrt{\left(\frac{0,06 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}}{5,04 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}}\right)^2 + \left(\frac{0,4 \text{с}^2}{8,1 \text{с}^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,1 \text{см}}{86,0 \text{см}}\right)^2} = 0,051 = 5,1\%,$$

$$\Delta m_c = \varepsilon_{m_c} \cdot \langle m_c \rangle = 0,051 \cdot 16,8 \text{г} = 0,9 \text{г}, \quad (32)$$

$$m_c = \langle m_c \rangle \pm \Delta m_c = (16,8 \pm 0,9) \text{г}.$$

### Часть 3. Эксперимент. Вертикальные крутильные колебания

#### 3.1

**Таблица 3.** Зависимость  $T(l)$  при вертикальных крутильных колебаниях

| 1                      | 2              | 3             | 4                  | 5                 |
|------------------------|----------------|---------------|--------------------|-------------------|
| $\Delta\tau, \text{с}$ | $l, \text{см}$ | $T, \text{с}$ | $l^2, \text{см}^2$ | $T^2, \text{с}^2$ |
| 10,70                  | 7,5            | 1,07          | 56                 | 1,14              |
| 13,38                  | 13,5           | 1,34          | 182                | 1,80              |
| 16,11                  | 20,0           | 1,61          | 400                | 2,59              |
| 18,48                  | 23,2           | 1,85          | 538                | 3,42              |
| 21,96                  | 37,0           | 2,20          | 1369               | 4,84              |
| 24,10                  | 43,0           | 2,41          | 1849               | 5,81              |
| 25,55                  | 48,5           | 2,56          | 2352               | 6,55              |
| 26,26                  | 58,7           | 2,63          | 3446               | 6,92              |
| 28,41                  | 63,5           | 2,84          | 4032               | 8,07              |
| 29,23                  | 69,5           | 2,92          | 4830               | 8,53              |
| 29,50                  | 75,5           | 2,95          | 5700               | 8,70              |

**3.2** Линеаризируем уравнения (8) и (9). Возведя их в квадрат, получим:

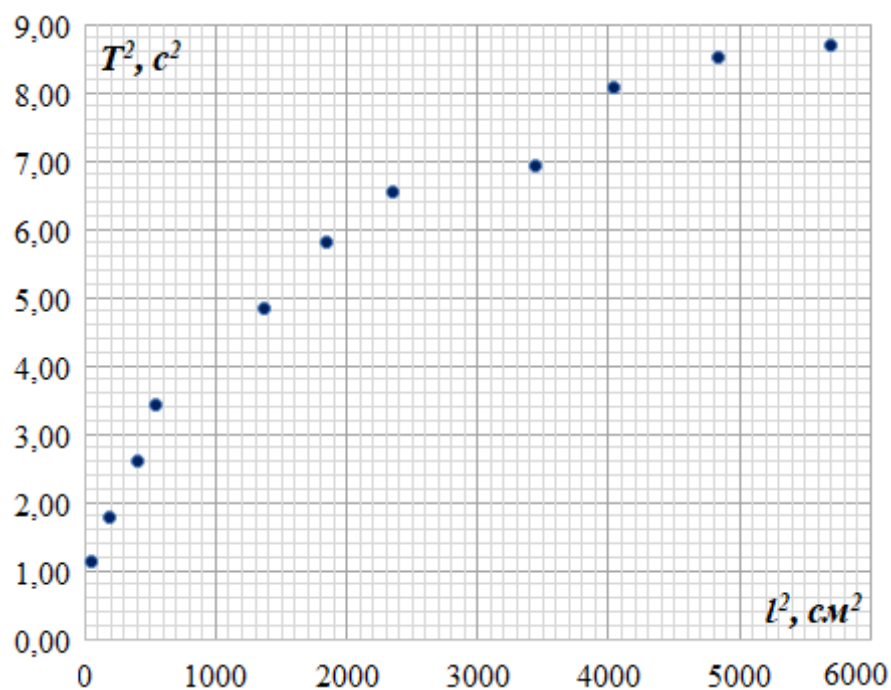
$$T^2 = 4\pi^2 b_1 + 4\pi^2 a_1 l^2 \quad (33)$$

и

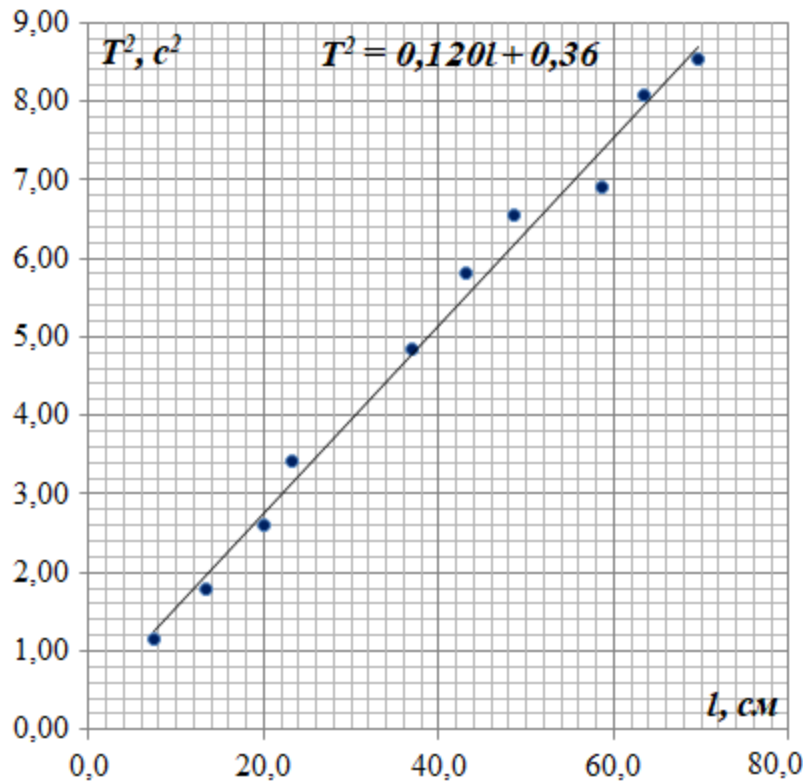
$$T^2 = 4\pi^2 b_2 + 4\pi^2 a_2 l. \quad (34)$$

Вычислим значения  $l^2$  и  $T^2$  (колонки 4 и 5 таблицы 3). Построим графики зависимостей  $T^2(l^2)$  и  $T^2(l)$ .

**График 2.** Зависимость  $T^2(l^2)$  при вертикальных крутильных колебаниях



**График 3.** Зависимость  $T^2(l)$  при вертикальных крутильных колебаниях



Как видим из графиков, экспериментальные точки легли вблизи некоторой усредняющей прямой в случае зависимости  $T^2(l)$ . В случае зависимости  $T^2(l^2)$  экспериментальные точки не ложатся вблизи прямой. Следовательно, при

вертикальных крутильных колебаниях, для применяемой экспериментальной установки справедливо уравнение (9). **Необязательное дополнение.** Так как в нашем случае оказалась справедливо уравнение (9), то это означает, что при вертикальных крутильных колебаниях наша установка «работает» как физический маятник. Такое может наблюдаться, когда модуль упругости при изгибе значительно меньше эффективной "гравитационной жёсткости". В противном случае, если модуль упругости при изгибе значительно больше эффективной "гравитационной жёсткости" будет справедливо уравнение (8).

**3.3** Используя (34), получим, что при  $l \rightarrow 0$

$$T^2 = 4\pi^2 b_2. \quad (35)$$

То есть  $T^2$  равно свободному слагаемому в уравнении (34).

Используя МНК, находим:

$$\langle T \rangle^2 = 0,36c^2,$$

$$\langle T \rangle = 0,60c.$$