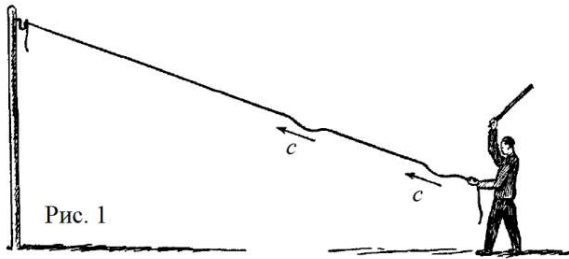


-2. Звук и Гук

Условие

Задание 11-2. Звук и Гук



Из простых опытов (Рис. 1) следует, что механические взаимодействия (и звук в том числе) передаются в упругой среде (пространстве) от точки к точке не мгновенно, а переносятся упругими волнами с конечной скоростью c ($c < \infty$) за некоторый конечный промежуток времени.

Интуитивно понятно, что скорость распространения упругих волн (звука) в данной среде определяется такими её механическими характеристиками, как упругость и инертность.

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс распространения упругих волн (звука) на достаточно простых моделях.

Рассмотрим однородный упругий стержень (Рис. 2) начальной длиной l и площадью поперечного сечения S , к свободному концу которого приложили силу $\vec{F}$.

Под действием силы $\vec{F}$ стержень удлинится (деформируется) на некоторую величину dl ($dl > 0$), называемую абсолютной деформацией образца (см. Рис. 2).

При деформации стержня в нем возникает обратная сила упругости $\vec{F}_y$, которая стремится скомпенсировать действие внешней силы $\vec{F}$.

Согласно закону Гука, проекция силы упругости F_y , возникшая в стержне, при малых деформациях ($dl \ll l$) есть

$$F_y = -kdl = F, \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости стержня.

Коэффициент упругости k стержня зависит как от его «геометрии», так и от упругих свойств его материала

$$k = E \frac{S}{l}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга (упругости) материала, из которого изготовлен стержень.

Модуль Юнга материала является табличным данным и измеряется в $[E] = \text{Па} = \text{Н/м}^2$.

Действия силы тяжести и сил трения и сопротивления в данной задаче не учитывать.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: молярная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, молярная масса воздуха $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, скорость звука в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ равна $c = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, уравнение адиабаты: $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M}$, для двухатомного газа (воздуха) $\gamma = 1,4$, ξ – греческая буква «кси».

Часть 1. Скорость звука в упругом стержне

Пусть упругий стержень AB налетает по нормали со скоростью v на очень жесткую (недеформируемую) неподвижную стенку (Рис. 3). Плотность материала стержня ρ , его модуль Юнга (упругости) равен E .

Сразу после механического контакта со стенкой по стержню (от стенки) начинает бежать продольная волна сжатия (возмущения) со скоростью звука c (см. Рис. 3).

При этом к некоторому моменту времени деформированной оказывается лишь часть DB стержня, до которой успела дойти волна упругого возмущения (см. Рис. 3). Будем считать, что частицы стержня в этой области (DB) уже остановились ($v = 0$) под действием сил упругости.

Заметим, что в этот же момент времени другие частицы стержня (в его «дальней» части AD) «как ни в чем не бывало» продолжают движение вперед (к стенке) с прежней скоростью v (см. Рис. 3).

1.1 Методом размерностей получите формулу для скорости звука $c = c(E, \rho)$ в упругом стержне (с точностью до безразмерного коэффициента ξ), в зависимости его модуля упругости (Юнга) E и плотности ρ .

1.2 Найдите скорость звука c в упругом стержне, рассмотрев изменение импульса стержня в процессе его столкновения с недеформируемой стенкой. Установите значение безразмерного коэффициента ξ .

1.3 Найдите силу давления F_d стержня на недеформируемую стенку в процессе удара (во время контакта стержня со стеной).

Часть 2. Звук и Лаплас

Скорость звука в газах впервые была рассчитана И. Ньютоном в его знаменитой работе «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Однако результат мастера оказался сильно заниженным, и более ста лет причина данной «несстыковки» оставалась неясной...

Лишь в 1816 г. известный французский математик Пьер Симон де Лаплас исправил «неточность» Ньютона, который считал, звук распространяется «изотермически». Лаплас построил адиабатную модель распространения звука и получил блестящее совпадение теории и практики!

Для построения модели Лапласа необходимо выяснить: какая величина играет роль модуля Юнга E для газов?

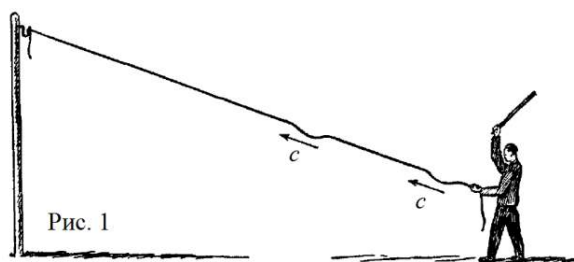
Рассмотрим идеальный газ под давлением p_0 в неподвижной гладкой трубе AB длиной l и площадью поперечного сечения S , запертый подвижным герметичным поршнем D (Рис. 5).

1. Приложим к подвижному поршню силу F , сжимающую идеальный газ (Рис. 6). Пусть под действием этой силы поршень сместился влево на малое dl ($dl \ll l$), а давление газа увеличилось до значения $(p_0 + dp)$, причем $dp \ll p$. Используя (1) и (2), выразите модуль Юнга E газа внутри трубы через величины (dp, dV, V) , где $dV = Sdl$ есть изменение объема газа под действием силы, а $V = Sl$ – начальный объем газа. 2. Примем во внимание тот факт,

что при распространении волн (в том числе и звуковых) отсутствует перенос вещества. Иными словами масса выделенного объема газа в процессе его деформации (сжатия или растяжения) остается постоянной ($m = \rho V = \text{const}$) при малых изменениях объема dV и плотности $d\rho$ газа. Используя ранее полученные результаты, докажете универсальную формулу для скорости звука в газах (и жидкостях) в виде $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, где dp – изменение давления газа при его уплотнении (разрежении), а $d\rho$ – соответствующее этому изменение плотности газа. 3. Согласно предположению Лапласа процесс распространения звука в газе следует считать адиабатическим ($pV^\gamma = \text{const}$, $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M}$). Получите формулу Лапласа для скорости звука c_L в газах. 4. По формуле Лапласа вычислите скорость звука c_L в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$.

Решение

Задание 11-2. Звук и Гук



Из простых опытов (Рис. 1) следует, что механические взаимодействия (и звук в том числе) передаются в упругой среде (пространстве) от точки к точке не мгновенно, а переносятся упругими волнами с конечной скоростью c ($c < \infty$) за некоторый конечный промежуток времени.

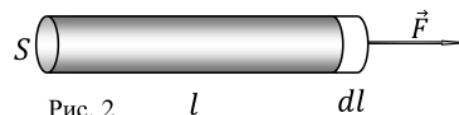
Интуитивно понятно, что скорость распространения упругих волн (звука) в данной среде опреде-

ляется такими её механическими характеристиками, как упругость и инертность.

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс распространения упругих волн (звука) на достаточно простых моделях.

Рассмотрим однородный упругий стержень (Рис. 2) начальной длиной l и площадью поперечного сечения S , к свободному концу которого приложили силу $\vec{F}$.

Под действием силы $\vec{F}$ стержень удлинится (деформируется) на некоторую величину dl ($dl > 0$), называемую абсолютной деформацией образца (см. Рис. 2).



При деформации стержня в нем возникает обратная сила упругости $\vec{F}_y$, которая стремится скомпенсировать действие внешней силы $\vec{F}$.

Согласно закону Гука, проекция силы упругости F_y , возникшая в стержне, при малых деформациях ($dl \ll l$) есть

$$F_y = -kdl = F, \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости стержня.

Коэффициент упругости k стержня зависит как от его «геометрии», так и от упругих свойств его материала

$$k = E \frac{S}{l}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга (упругости) материала, из которого изготовлен стержень.

Модуль Юнга материала является табличным данным и измеряется в $[E] = \text{Па} = \text{Н/м}^2$.

Действия силы тяжести и сил трения и сопротивления в данной задаче не учитывать.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: молярная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, молярная масса воздуха $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, скорость звука в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ равна $c = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, уравнение адиабаты: $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M}$, для двухатомного газа (воздуха) $\gamma = 1,4$, ξ – греческая буква «кси».

Часть 1. Скорость звука в упругом стержне

Пусть упругий стержень AB налетает по нормали со скоростью v на очень жесткую (недеформируемую) неподвижную стенку (Рис. 3). Плотность материала стержня ρ , его модуль Юнга (упругости) равен E .

Сразу после механического контакта со стенкой по стержню (от стенки) начинает бежать продольная волна сжатия (возмущения) со скоростью звука c (см. Рис. 3).

При этом к некоторому моменту времени деформированной оказывается лишь часть DB стержня, до которой успела пройти волна упругого возмущения (см. Рис. 3). Будем считать, что частицы стержня в этой области (DB) уже остановились ($v = 0$) под действием сил упругости.

Заметим, что в этот же момент времени другие частицы стержня (в его «дальней» части AD) «как ни в чем не бывало» продолжают движение вперед (к стенке) с прежней скоростью v (см. Рис. 3).

1.1 Методом размерностей получите формулу для скорости звука $c = c(E, \rho)$ в упругом стержне (с точностью до безразмерного коэффициента ξ), в зависимости его модуля упругости (Юнга) E и плотности ρ .

1.2 Найдите скорость звука c в упругом стержне, рассмотрев изменение импульса стержня в процессе его столкновения с недеформируемой стенкой. Установите значение безразмерного коэффициента ξ .

1.3 Найдите силу давления F_d стержня на недеформируемую стенку в процессе удара (во время контакта стержня со стеной).

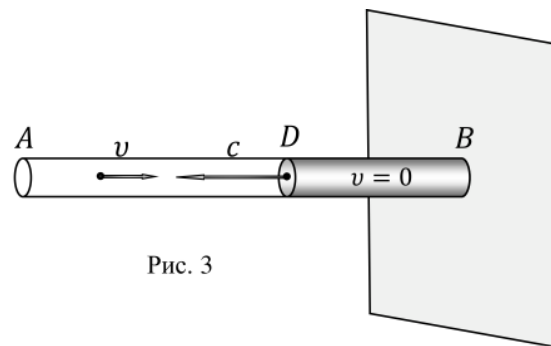


Рис. 3

Часть 2. Звук и Лаплас

Скорость звука в газах впервые была рассчитана И. Ньютоном в его знаменитой работе «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Однако результат мастера

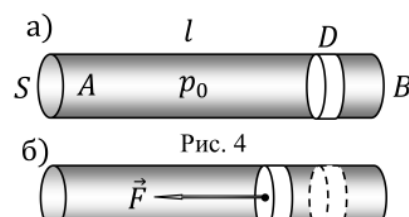


Рис. 4

оказался сильно заниженным, и более ста лет причина данной «нестыковки» оставалась неясной. . .

Лишь в 1816 г. известный французский математик Пьер Симон де Лаплас исправил «неточность» Ньютона, который считал, что звук распространяется «изотермически». Лаплас построил адиабатную модель распространения звука и получил блестящее совпадение теории и практики!

Для построения модели Лапласа необходимо выяснить: какая величина играет роль модуля Юнга E для газов?

Рассмотрим идеальный газ под давлением p_0 в неподвижной гладкой трубе AB длиной l и площадью поперечного сечения S , запертый подвижным герметичным поршнем D (Рис. 4, а)).

1. Приложим к подвижному поршню силу F , сжимающую идеальный газ (Рис. 4, б)). Пусть под действием этой силы поршень сместился влево на малое dl ($dl \ll l$), а давление газа увеличилось до значения $(p_0 + dp)$, причем $dp \ll p$. Используя (1) и (2), выразите модуль Юнга E газа внутри трубы через величины (dp, dV, V) , где $dV = Sdl$ есть изменение объема газа под действием силы, а $V = Sl$ – начальный объем газа. 2. Примем во внимание тот факт, что при распространении волн (в том числе и звуковых) отсутствует перенос вещества. Иными словами масса выделенного объема газа в процессе его деформации (сжатия или растяжения) остается постоянной ($m = \rho V = const$) при малых изменениях объема dV и плотности $d\rho$ газа. Используя ранее полученные результаты, докажите универсальную формулу для скорости звука в газах (и жидкостях) в виде $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, где dp – изменение давления газа при его уплотнении (разрежении), а $d\rho$ – соответствующее этому изменению плотности газа. 3. Согласно предположению Лапласа процесс распространения звука в газе следует считать адиабатическим ($pV^\gamma = const$, $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M}$). Получите формулу Лапласа для скорости звука c_L в газах. 4. По формуле Лапласа вычислите скорость звука c_L в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$.

2. Возможные решения:

1. Часть 1. Скорость звука в упругом стержне

1. Учитывая размерности модуля Юнга $[E] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$ и плотности $\rho = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ из них можно составить только одну «композицию», имеющую размерность скорости: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Следовательно, с точностью до некоторого безразмерного коэффициента ξ искомую формулу для скорости звука в стержне можно записать как

$$c = \xi \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1)$$

1. Рассмотрим столкновение стержня с воображаемой недеформируемой стеной. При этом за время dt остановилась часть стержня длиной $l = cdt$ (куда добежал звук). Соответственно, за промежуток времени dt погашен импульс dp этого же участка стержня длиной $l = d\Delta t$.

Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме

$$dp = Fdt. \quad (2)$$

Погашенный импульс можно выразить как

$$dp = dm v = \rho S l v = \rho S (c dt) v, \quad (3)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, v – скорость стержня.

Согласно закону Гука

$$F = k dl = E \frac{S}{l} dl = E \frac{S}{l} (v dt). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем

$$\rho S (c dt) v = E \frac{S}{l} (v dt) dt = E \frac{S}{c dt} (v dt) dt. \quad (5)$$

Из (5) получаем искомую формулу для скорости продольных упругих волн в упругом стержне

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (1), находим значение неизвестного безразмерного коэффициента

$$\xi = 1. \quad (7)$$

Следовательно, нам повезло, и методом размерностей мы сразу определили точную формулу для скорости звука в упругом стержне.

1. Сила давления стержня на стену в процессе удара (во время контакта) найдется из (2) как

$$F_d = \frac{dp}{dt} = \frac{\rho S (c dt) v}{dt} = \rho S c v = v S \sqrt{\rho E}. \quad (8)$$

Часть 2. Звук и Лаплас

2.1 Силу F можно представить, с одной стороны как силу упругости ($-k dl$), а с другой – как изменение силы давления газа ($dp S$)

$$F = -k dl = dp S, \quad (9)$$

где $k = E \frac{S}{l}$ – коэффициент упругости «газовой пружины».

Из (9) получим

$$E \frac{S}{l} dl = -dp S \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{l}{dl} dp = -\frac{V}{dV} dp = -V \frac{dp}{dV}. \quad (10)$$

2.2 Подставляя (10) в (6), получаем для скорости звука в газе

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{-V \frac{dp}{dV}}{\rho}} = \sqrt{-\frac{V}{\rho} \frac{dp}{dV}}. \quad (11)$$

Поскольку при распространении звука переноса вещества нет, то для некоторого выделенного объема сплошной среды должно выполняться равенство

$$m = \rho V = (\rho + d\rho)(V + dV). \quad (12)$$

Из (12) найдем (пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка)

$$d\rho V + \rho dV = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -\rho \frac{dV}{d\rho}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (11), получаем

$$c = \sqrt{-\frac{V}{\rho} \frac{dp}{dV}} = \sqrt{-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dV} \left(-\rho \frac{dV}{d\rho}\right)} = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \quad (14)$$

2.3 Запишем уравнение адиабатного процесса уравнение адиабаты $pV^\gamma = \text{const}$ ($\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M}$, для двухатомных 1,4).

Уравнение адиабаты можно привести к виду

$$\gamma p dV + V dp = 0. \quad (15)$$

Поскольку плотность тела $\rho \sim \frac{1}{V}$, то можем записать, что

$$d\rho \sim -\frac{dV}{V^2}. \quad (16)$$

Соответственно, (15) можно переписать в виде

$$\gamma p d\rho - \rho dp = 0. \quad (17)$$

Из (17) получим, что для адиабатического процесса

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}. \quad (18)$$

С учетом (18) из (14) получаем формулу Лапласа для скорости звука в воздухе, выведенную им в 1816 г.

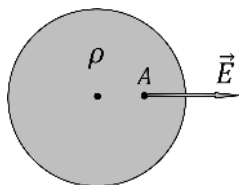
$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}. \quad (19)$$

2.4 Из (19) для воздуха ($M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$) при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ получаем значение скорости звука

$$c = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 8,31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}}} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = \{342,8462006\} = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right). \quad (20)$$

Полученный результат находится в превосходном согласии с данными эксперимента для воздуха (343 м/с) при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$.

11-3. Заряженный шар



В электродинамике часто рассматривается напряженность $\vec{E}$ электростатического поля диэлектрического шара (Рис.1) радиуса R в вакууме, равномерно заряженного по всему объему V с постоянной объёмной плотностью заряда ρ ($\rho = \text{const}$).

Объёмная плотность заряда представляет собой заряд единицы объема диэлектрика $\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}$, т.е. имеет размерность $[\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$.

Если заряды распределены по поверхности S (например, проводника), то говорят о поверхностной плотности заряда $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$, которая имеет размерность $[\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$. Поверхностная плотность заряда σ представляет собой электрический заряд единицы площади рассматриваемой поверхности.

В отличие от проводников, внутри которых поле равно нулю ($\vec{E} = \vec{0}$), поле $\vec{E}$ такого шара отлично от нуля внутри шара, например в точке A (см. Рис. 1).

В данной задаче вам предстоит описать поле заряженного шара и рассмотреть его некоторые приложения.

Для описания электростатических полей удобно использовать *телесный угол*. Телесный угол (Ω) – часть пространства, ограниченная лучами, выходящими из некоторой точки O (Рис. 2).

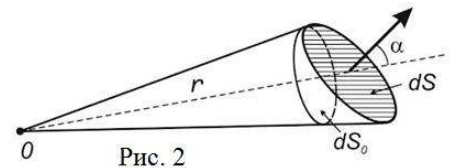


Рис. 2

Единицей измерения телесного угла является стерadian («стерео радиан»): $[\Omega] = \text{стр.}$ По аналогии с плоским углом, в качестве меры телесного угла берется безразмерное отношение площади вырезанного сферического сегмента к квадрату радиуса описанной окружности. Для малых телесных углов справедлива формула

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S_{\perp}}{r^2} = \frac{\Delta S \cos \alpha}{r^2}. \quad (2)$$

Диполем называется система из двух электрических зарядов, одинаковых по величине, но разных по знаку ($+q; -q$). Заряды находятся на малом фиксированном расстоянии l (плечо диполя, $l \ll R$) друг от друга (Рис. 3).

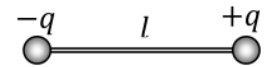


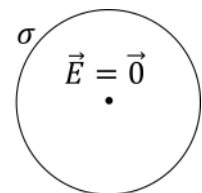
Рис. 3

Действиями силы тяжести и сил трения и сопротивления в данной задаче пренебречь.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$; объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; $\pi = 3,14$.

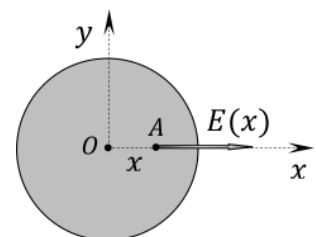
Часть 1. Поле шара

При вычислении напряженности $\vec{E}$ электростатического поля «сложных» заряженных систем достаточно часто используется принцип суперпозиции электрических полей более «простых» систем, поля которых хорошо известны.



1. Рассмотрим тонкую сферу (Рис. 4) некоторого радиуса R , равномерно заряженную с поверхностной плотностью σ ($\sigma = \text{const} > 0$). Докажите, что для такой сферы, равномерно заряженной по поверхности, напряженность $\vec{E}$ электростатического поля внутри неё ($x < R$) равна нулю ($\vec{E} = \vec{0}$) в любой точке.

2. Рассмотрим диэлектрический шар (Рис. 5) некоторого радиуса R , равномерно заряженный с положительной объемной плотностью ρ ($\rho = \text{const} > 0$). Найдите зависимость $E(x)$ проекции на ось Ox напряженности электростатического поля внутри ($x < R$) такого шара, равномерно заряженного по всему объему, как функцию расстояния x от его центра O . Укажите максимальное значение E_0 полученной зависимости на данном интервале. 3. Найдите зависимость $E(x)$ проекции на ось Ox напряженности электростатического поля вне такого шара ($x > R$), равномерно заряженного по всему объему, как функцию расстояния x от его центра O . Укажите

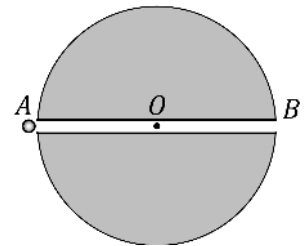


максимальное значение полученной зависимости на данном интервале и сравните его с E_0 . 4. Для построения суммарного графика полученных зависимостей введем безразмерные величины: для напряженности $E^* = E(x)/E_0$, для расстояния $x^* = x/R$. Заполните Таблицу 1 и на выданном Бланке 1 постройте график зависимости $E^*(x^*)$.

Часть 2. Пролет в шаре

Рассмотрим далее неподвижный равномерно заряженный по объему диэлектрический шар, поле которого вы описали в пунктах **1.2 – 1.4**. Предположим, что вдоль диаметра шара просверлен достаточно тонкий канал AB (Рис. 6), через который в направлении от A к B могут свободно пролетать небольшие заряженные объекты.

1. Частицу массой m , с отрицательным зарядом $(-q)$, удерживают в точке A на оси Ox на расстоянии R от центра шара (см. Рис. 6). В некоторый момент времени ($t = 0$) частицу отпускают, и под действием электростатического поля $\vec{E}$ шара она начинает двигаться. Через какой промежуток времени t_1 частица окажется на противоположном конце диаметра в точке B ? 2. Какую максимальную скорость v_1 разовьет частица при движении? В какой точке траектории она будет достигаться?



3. С каким максимальным ускорением a_1 будет двигаться частица при своём движении? В каких точках траектории оно будет достигаться? 4. Диполь, состоящий из двух шариков массой m каждый, удерживают в точке A (Рис. 7) на оси Ox на расстоянии R от центра шара. Заряды шариков равны по модулю q . В некоторый момент времени ($t = 0$) диполь отпускают, и под действием электростатического поля $\vec{E}$ шара он начинает втягиваться в шар. Укажите знаки заряда каждого из шариков (ближнего к шару и дальнего).

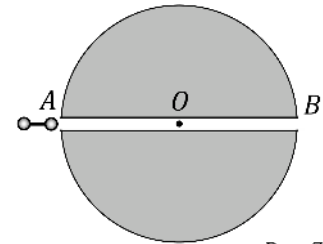


Рис. 7

Через какой промежуток времени t_2 диполь окажется на противоположном конце диаметра в точке B ? 5. Какую максимальную скорость v_2 разовьет диполь при движении? В какой точке траектории она будет достигаться? 6. Какое максимальное ускорение a_2 разовьет диполь при движении? В какой точке траектории оно будет достигаться?

Возможные решения:

Часть 1. Поле шара

1. Рассмотрим произвольную точку A внутри заряженной сферы, не совпадающую с её центром (Рис. 8). Построим малые вертикальные (т.е. равные) телесные углы $\Delta\Omega$ с вершиной в точке A .

Эти телесные углы вырежут на поверхности сферы площадки различных площадей $\Delta S_1 = \Delta\Omega \cdot r_1^2$ и $\Delta S_2 = \Delta\Omega \cdot r_2^2$. Соответственно, электрические заряды этих площадок будут $\sigma\Delta S_1$ и $\sigma\Delta S_2$.

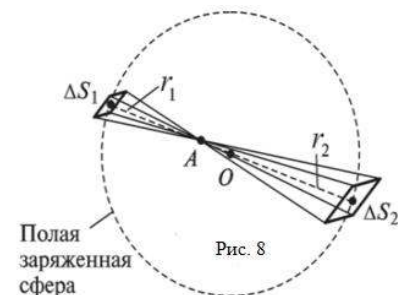


Рис. 8

Векторы напряженностей, создаваемые этими зарядами, взаимно противоположны и их отношение, согласно закону Кулона

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \Delta S_2}{r_2^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \Delta S_1}{r_1^2}} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Delta\Omega} = 1. \quad (1)$$

Следовательно, согласно (1), сумма этих векторов равна нулю, поскольку они равны по модулю и противоположны по направлению

Аналогичное свойство будет справедливо и для любой пары малых вертикальных телесных углов $\Delta\Omega$, повернутых на некоторый плоский угол α относительно прямой OA (Рис. 2).

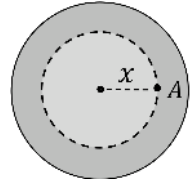
$$\frac{\Delta E_2}{\Delta E_1} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \Delta S_2}{r_2^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \Delta S_1}{r_1^2}} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\Omega}{\cos \alpha}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta\Omega}{\cos \alpha}} = 1. \quad (2)$$

Таким образом, разбивая всю поверхность сферы на подобные пары и суммируя по ним, получаем сумму большого количества «нулей». Это говорит о том, что в любой внутренней точке равномерно заряженной по поверхности сферы напряженность электростатического поля равна нулю.

Интересно, что (1) и (2) справедливы только для кулоновских полей ($\sim \frac{1}{r^2}$), напряженность которых убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до точечного заряда. Иными словами, если бы в знаменателе закона Кулона был куб расстояния ($\sim \frac{1}{r^3}$), то данное свойство было бы уже несправедливо.

1. Проведем внутри равномерно заряженного шара сферу радиуса x (Рис. 9). Эта сфера делит заряженный шар на две области по отношению к точке A : внутреннюю ($r < x$) и внешнюю ($r > x$).

Внешняя область шара представляет собой широкий сферический слой, который можно разбить на достаточно тонкие (бесконечно тонкие) равномерно заряженные сферы.



Согласно предыдущему пункту задачи, эти сферы не создают электростатического поля «внутри себя», т.е. далее их можно исключить из рассмотрения при рассмотрении напряженности поля в точке A .

Таким образом, приходим к выводу, что электростатическое поле в точке A создается только внутренними зарядами, попавшими в заряженный шарик радиусом x .

Согласно закону Кулона получим

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(x)}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho V}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi x^3}{x^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} x. \quad (3)$$

Как следует из (3), напряженность электростатического поля внутри шара возрастает прямо пропорционально расстоянию x от его центра. Следовательно, максимальное значение напряженности поля внутри шара будет достигаться на его поверхности (при $x = R$)

$$E_0 = E(R) = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}. \quad (4)$$

1. Электростатическое поле вне шара совпадает с полем точечного заряда, находящимся в центре шара. Следовательно, в данном случае

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho V}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{x^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{x^2} = E_0 \frac{R^2}{x^2}. \quad (5)$$

Как следует из (5), максимальное значение $E(x)$ вне шара также достигается при $x = R$, т.е. опять же на его поверхности

$$E_{\max} = E(R) = E_0 \frac{R^2}{x^2} = E_0. \quad (6)$$

Как видим, (4) и (6) совпадают, а это значит, что в точке $x = R$ функция зависимости $E(x)$ (и ее график!) не будет испытывать разрыва, т.е. будет непрерывной. График любой непрерывной функции можно нарисовать «одним движением», не отрывая карандаша от бумаги. Например, с параболой это получится, а вот с гиперболой – уже нет.

Заметим, что силовые линии поля шара вне шара никак не отличаются от силовых линий такого же точечного заряда, находящегося в его центре.

1. При построении графика функции удобно использовать безразмерные координаты, поскольку они значительно упрощают расчеты и при этом «сохраняют» характер и особенности исследуемой функции.

В нашем случае безразмерное расстояние (приведенная длина) $x^* = x/R$ изменяется в интервале $0 \leq x^* \leq 3$.

Приведенная напряженность E^* поля шара для интервала внутри него ($0 \leq x^* \leq 1$) соответствует графику прямой пропорциональности

$$E^*(x^*) = \frac{E(x)}{E_0} = \frac{\frac{\rho}{3\epsilon_0}x}{\frac{\rho R}{3\epsilon_0}} = \frac{x}{R} = x^*. \quad (7)$$

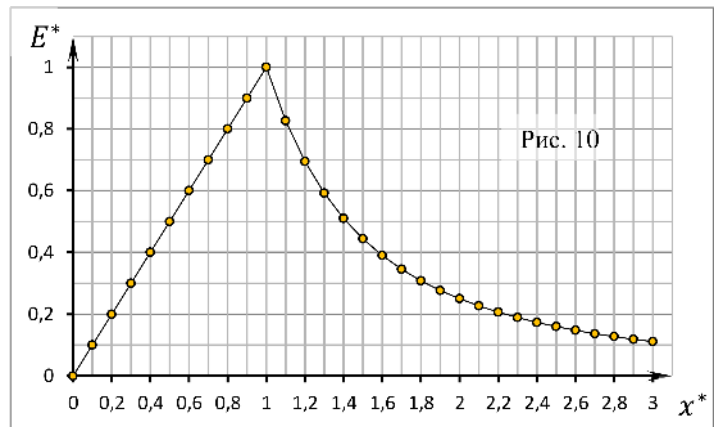
Вне шара ($1 \leq x^* \leq 3$) получаем обратно-квадратичную зависимость, соответствующую закону Кулона

$$E^*(x^*) = \frac{E(x)}{E_0} = \frac{E_0 \frac{R^2}{x^2}}{E_0} = \frac{1}{(x^*)^2} = \frac{1}{(x^*)^2}. \quad (8)$$

Вычисляем на инженерном калькуляторе и заполняем Таблицу 1.

Таблица 1. Расчет зависимости $E^*(x^*)$

	x^*
0,0	
0,1	
0,2	
0,3	
0,4	
0,5	
0,6	
0,7	
0,8	
0,9	

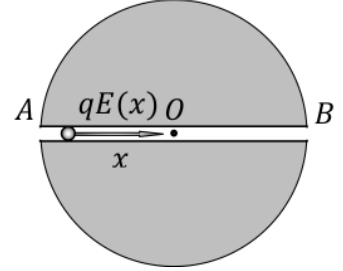


E^*	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	
x^*	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
E^*	1	0,826	0,694	0,592	0,510	0,444	0,391	0,346	0,309	0,277	
x^*	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
E^*	0,250	0,227	0,207	0,189	0,174	0,160	0,148	0,137	0,128	0,119	0,111

График итоговой зависимости предоставлен на Рис. 10.

Часть 2. Пролет в шаре

2.1 Рассмотрим движение заряженной частицы в канале (Рис. 11). Поскольку ее заряд отрицательный, а заряд шара положительный (по условию), то поле шара будет втягивать частицу в канал.



Пусть частица находится на расстоянии x от центра шара (см. Рис. 11), тогда второй закон Ньютона примет вид

$$ma = -qE(x) = -\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}x, \quad (9)$$

где a – проекция ускорения частицы.

Учитывая, что ускорение $a(t)$ есть вторая производная от координаты по времени $a(t) = \ddot{x}(t)$, перепишем (9) в виде

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{q\rho}{3\varepsilon_0}x(t). \quad (10)$$

Далее получаем

$$\ddot{x}(t) + \frac{q\rho}{3\varepsilon_0 m}x(t) = \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (11)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}$.

Мы получили уравнение гармонических колебаний (11) с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}. \quad (12)$$

Таким образом, согласно (12) отрицательно заряженная частица будет совершать гармонические колебания с периодом T и с положением равновесия в центре шара.

В точке B на другом конце диаметра она окажется через промежуток времени, равный половине периода колебаний

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{3m\varepsilon_0}{q\rho}}. \quad (13)$$

2.2 При гармонических колебаниях максимальная скорость осциллятора достигается при прохождении им положения равновесия. Это означает, что его максимальная скорость частицы будет достигаться в центре шара (точке O).

Поскольку колебания гармонические с амплитудой $A=R$, то максимальная скорость частицы при этом равна

$$v_1 = \omega R = R\sqrt{\frac{q\rho}{3m\varepsilon_0}}. \quad (14)$$

2.3 Максимальное ускорение a_1 заряженной частицы достигается в точках действия максимальной силы, т.е. в точках остановки при максимальном удалении от центра заряженного шара. Следовательно,

$$a_1 = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{\frac{q\rho R}{3\epsilon_0}}{m} = \frac{q\rho R}{3\epsilon_0 m}. \quad (15)$$

2.4 Как следует из (3), напряженность электрического поля внутри однородно заряженного шара

$$E(x) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} x. \quad (16)$$

На диполь в электрическом поле действует равнодействующая двух кулоновских сил, приложенных к каждому из его зарядов в различных направлениях.

Для втягивания диполя в шар (Рис. 12) дальний от центра его заряд должен быть отрицательным (там поле сильнее!). Соответственно, ближний заряд диполя – положительным.

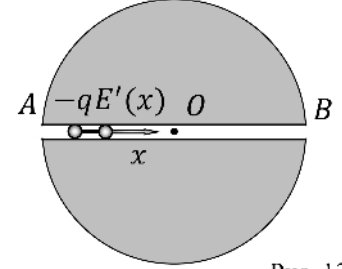


Рис. 12

В таком случае искомая равнодействующая двух сил Кулона будет равна (см. Рис. 12)

$$F(x) = q(E(x+l) - E(x)) = qE'(x)l = \frac{ql\rho}{3\epsilon_0} = const, \quad (17)$$

где q – модуль заряда каждого из шариков.

Таким образом, согласно (17) диполь будет разгоняться до центра шара с постоянным ускорением a

$$a = \frac{F(x)}{2m} = \frac{ql\rho}{6m\epsilon_0} = const, \quad (18)$$

Особо следует обсудить пролет диполя через центр шара. В течение этого промежутка времени шарики диполя будут находиться по разные стороны от центра заряженного шара, поэтому возникает вопрос о справедливости выражения для силы (17).

Покажите самостоятельно, что в данном случае сила (17) также будет оставаться постоянной, поскольку даже при таком расположении шариков, при зависимости (16) поля от координаты сумма проекций сил не меняется. Таким образом, диполь пересечет центр шара также равноускоренно с ускорением (18).

После пролета диполем центра шара проекция напряженности поля шара меняет свой знак, так как поле всегда направлено от центра. Однако и шарики диполя теперь «меняются» ролями – дальним становится положительный шарик!

Это обстоятельство (минус на минус дает плюс!) сохраняет направление результирующей силы, действующей на диполь, т.е. «после центра шара» он продолжает ускоряться в том же направлении с прежним ускорением.

Следовательно, можно рассмотреть прохождение всего диаметра d шара как «одно целое» равноускоренное движение

$$d = 2R = \frac{at_2^2}{2} = \frac{ql\rho t_2^2}{12m\epsilon_0}. \quad (19)$$

Из (20) находим время пролёта диполем диаметра шара

$$t_2 = \sqrt{\frac{24m\epsilon_0 R}{ql\rho}} = 2\sqrt{\frac{6m\epsilon_0 R}{ql\rho}}. \quad (20)$$

2.5 Поскольку движение диполя равноускоренное, то его максимальная скорость v_2 достигается в конце движения, т.е. в точке B . Следовательно,

$$v_2 = at_2 = \frac{ql\rho}{6m\varepsilon_0} \bullet 2\sqrt{\frac{6m\varepsilon_0 R}{ql\rho}} = 2\sqrt{\frac{ql\rho R}{6m\varepsilon_0}}. \quad (21)$$

2.6 При равноускоренном движении ускорение диполя во всех точках одинаково. Следовательно, его ускорение максимальное «во всех точках» и равно начальному ускорению

$$a_2 = a = \frac{ql\rho}{6m\varepsilon_0}. \quad (22)$$

Контактный телефон для вопросов и консультаций в день проведения олимпиады:

+375 29 766 12 87.