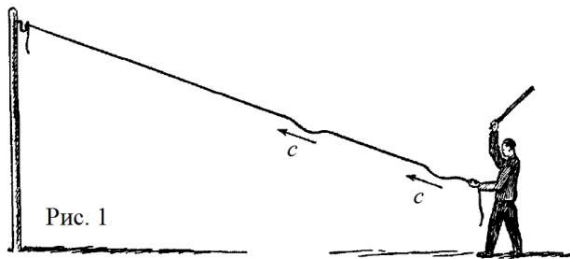


-2. Звук и Гук

Условие

Задание 11-2. Звук и Гук



Из простых опытов (Рис. 1) следует, что механические взаимодействия (и звук в том числе) передаются в упругой среде (пространстве) от точки к точке не мгновенно, а переносятся упругими волнами с конечной скоростью c ($c < \infty$) за некоторый конечный промежуток времени.

Интуитивно понятно, что скорость распространения упругих волн (звука) в данной среде определяется такими её механическими характеристиками, как упругость и инертность.

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс распространения упругих волн (звука) на достаточно простых моделях.

Рассмотрим однородный упругий стержень (Рис. 2) начальной длиной l и площадью поперечного сечения S , к свободному концу которого приложили силу $\vec{F}$.

Под действием силы $\vec{F}$ стержень удлинится (деформируется) на некоторую величину dl ($dl > 0$), называемую абсолютной деформацией образца (см. Рис. 2).

При деформации стержня в нем возникает обратная сила упругости $\vec{F}_y$, которая стремится скомпенсировать действие внешней силы $\vec{F}$.

Согласно закону Гука, проекция силы упругости F_y , возникшая в стержне, при малых деформациях ($dl \ll l$) есть

$$F_y = -kdl = F, \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости стержня.

Коэффициент упругости k стержня зависит как от его «геометрии», так и от упругих свойств его материала

$$k = E \frac{S}{l}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга (упругости) материала, из которого изготовлен стержень.

Модуль Юнга материала является табличным данным и измеряется в $[E] = \text{Па} = \text{Н/м}^2$.

Действия силы тяжести и сил трения и сопротивления в данной задаче не учитывать.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: молярная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, молярная масса воздуха $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, скорость звука в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ равна $c = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, уравнение адиабаты: $pV^\gamma = \text{const}$, где $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M}$, для двухатомного газа (воздуха) $\gamma = 1,4$, ξ – греческая буква «кси».

Часть 1. Скорость звука в упругом стержне

Пусть упругий стержень AB налетает по нормали со скоростью v на очень жесткую (недеформируемую) неподвижную стенку (Рис. 3). Плотность материала стержня ρ , его модуль Юнга (упругости) равен E .

Сразу после механического контакта со стенкой по стержню (от стенки) начинает бежать продольная волна сжатия (возмущения) со скоростью звука c (см. Рис. 3).

При этом к некоторому моменту времени деформированной оказывается лишь часть DB стержня, до которой успела дойти волна упругого возмущения (см. Рис. 3). Будем считать, что частицы стержня в этой области (DB) уже остановились ($v = 0$) под действием сил упругости.

Заметим, что в этот же момент времени другие частицы стержня (в его «дальней» части AD) «как ни в чем не бывало» продолжают движение вперед (к стенке) с прежней скоростью v (см. Рис. 3).

1.1 Методом размерностей получите формулу для скорости звука $c = c(E, \rho)$ в упругом стержне (с точностью до безразмерного коэффициента ξ), в зависимости его модуля упругости (Юнга) E и плотности ρ .

1.2 Найдите скорость звука c в упругом стержне, рассмотрев изменение импульса стержня в процессе его столкновения с недеформируемой стенкой. Установите значение безразмерного коэффициента ξ .

1.3 Найдите силу давления F_d стержня на недеформируемую стенку в процессе удара (во время контакта стержня со стеной).

Часть 2. Звук и Лаплас

Скорость звука в газах впервые была рассчитана И. Ньютоном в его знаменитой работе «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Однако результат мастера оказался сильно заниженным, и более ста лет причина данной «несстыковки» оставалась неясной...

Лишь в 1816 г. известный французский математик Пьер Симон де Лаплас исправил «неточность» Ньютона, который считал, звук распространяется «изотермически». Лаплас построил адиабатную модель распространения звука и получил блестящее совпадение теории и практики!

Для построения модели Лапласа необходимо выяснить: какая величина играет роль модуля Юнга E для газов?

Рассмотрим идеальный газ под давлением p_0 в неподвижной гладкой трубе AB длиной l и площадью поперечного сечения S , запертый подвижным герметичным поршнем D (Рис. 5).

1. Приложим к подвижному поршню силу F , сжимающую идеальный газ (Рис. 6). Пусть под действием этой силы поршень сместился влево на малое dl ($dl \ll l$), а давление газа увеличилось до значения $(p_0 + dp)$, причем $dp \ll p$. Используя (1) и (2), выразите модуль Юнга E газа внутри трубы через величины (dp, dV, V) , где $dV = Sdl$ есть изменение объема газа под действием силы, а $V = Sl$ – начальный объем газа. 2. Примем во внимание тот факт,

что при распространении волн (в том числе и звуковых) отсутствует перенос вещества. Иными словами масса выделенного объема газа в процессе его деформации (сжатия или растяжения) остается постоянной ($m = \rho V = \text{const}$) при малых изменениях объема dV и плотности $d\rho$ газа. Используя ранее полученные результаты, докажите универсальную формулу для скорости звука в газах (и жидкостях) в виде $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, где dp – изменение давления газа при его уплотнении (разрежении), а $d\rho$ – соответствующее этому изменение плотности газа.

3. Согласно предположению Лапласа процесс распространения звука в газе следует считать адиабатическим ($pV^\gamma = \text{const}$, $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M}$). Получите формулу Лапласа для скорости звука c_L в газах.

4. По формуле Лапласа вычислите скорость звука c_L в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$.