

1. Конический маятник

Условие

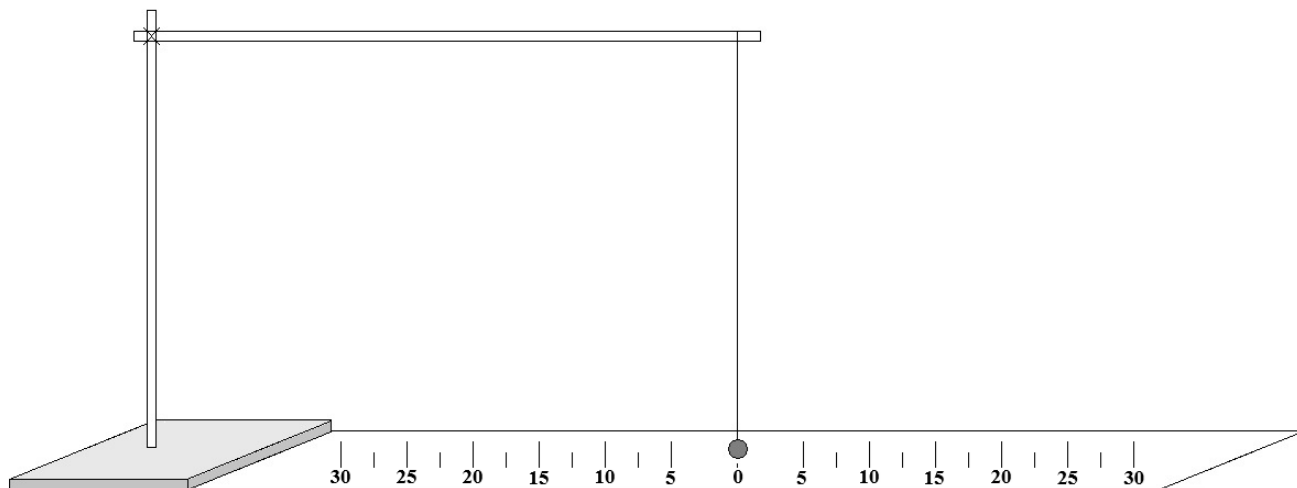
Задача 10_1. Конический маятник

В данной задаче конический маятник — это маленький стальной шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити и совершающий равномерное движение по окружности в горизонтальной плоскости. Нить при этом описывает поверхность конуса.

В данной задаче Вам предстоит исследовать зависимость периода обращения шарика по окружности от её радиуса при движении с постоянной по модулю скоростью. *Внимание!* Ускорение свободного падения* g в данной задаче считается неизвестным.

Оборудование: экспериментальная установка (рис. 1, основные деления на бумажной полосе нанесены через 5,0 см), электронный секундомер с памятью 10-и этапов.

Рисунок 1



Часть 0. Наблюдения (не оценивается)

В 9-ом классе вы проделывали подобный эксперимент на одной из лабораторных работ. Возьмитесь большим и указательным пальцем за нить вблизи её крепления к горизонтальному стержню. Приведите маятник во вращательное движение. Старайтесь чтобы траектория шарика была близка к окружности, и чтобы шарик слева и справа от отметки нуль проходил на одинаковом расстоянии. Отпустите нить и наблюдайте за движением шарика. Если при проведении исследования Вам будет недостаточно меток, нанесённых на бумажную полосу, то вы можете нанести дополнительные метки.

Часть 1. Теоретическая

Введём обозначения: T – период обращения шарика по окружности, l – расстояние от точки

подвеса до центра шарика, g – ускорение свободного падения, β – угол между вертикалью и нитью во время движения шарика по окружности,

R – радиус окружности, по которой движется шарик. Иные необходимые величины введите и опишите самостоятельно.

1.1 Сделайте схематический рисунок при движении конического маятника. Обозначьте силы, действующие на шарик и другие необходимые вектора. 1.2 Покажите, что зависимость $T(\beta)$ периода обращения шарика T от угла между вертикалью и нитью β во время движения шарика описывается уравнением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \beta}{g}}. \quad (1)$$

1.3 Получите уравнение зависимости $T(R)$ периода обращения шарика T от радиуса окружности, по которой движется шарик R .

Часть 2. Эксперимент и анализ

2.1 Исследуйте зависимость $T(R)$ экспериментально. Результаты представьте таблично. (*Повторные измерения в таблицу записывать не нужно*). Кратко опишите как вы измеряли период. 2.2 Линеаризируйте уравнение, полученное вами в п.1.3. Укажите какие величины в полученном вами линеаризованном уравнении будут аналогичны величинам y , b , k , x в линейном уравнении $y = b + kx$ (*). 2.3 Постройте график линеаризованной зависимости $T(R)$. 2.4 На основе результатов эксперимента определите период обращения конического маятника, когда $R \rightarrow 0$. Вычислите погрешности.

Часть 3. Вычисления значений констант

Используя результаты части 2, вычислите (*не забудьте о погрешностях*): 3.1 Ускорение свободного падения g . 3.2 Определите радиус окружности, по которой должен двигаться шарик, и угол между нитью и вертикалью, когда $T \rightarrow 0$.

Решение

Задача 10_1. Конический маятник

В данной задаче конический маятник — это маленький стальной шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити и совершающий равномерное движение по окружности в горизонтальной плоскости. Нить при этом описывает поверхность конуса.

В данной задаче Вам предстоит исследовать зависимость периода обращения шарика по окружности от её радиуса при движении с постоянной по модулю скоростью. *Внимание!* Ускорение свободного падения* g в данной задаче считается неизвестным.

Оборудование: экспериментальная установка (рис. 1, основные деления на бумажной полосе нанесены через 5,0 см), электронный секундомер с памятью 10-и этапов.

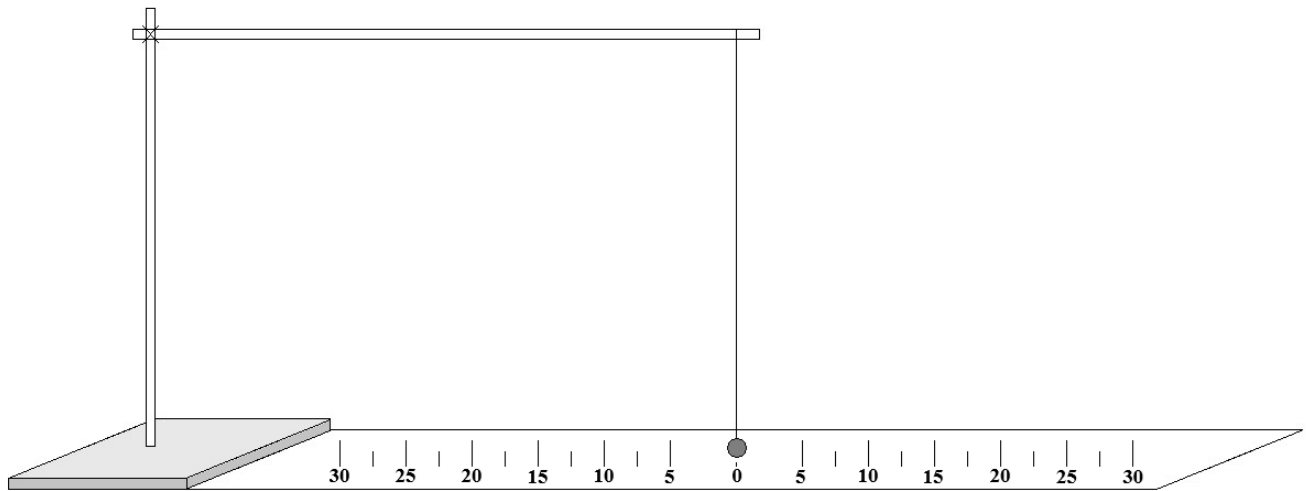


Рисунок 1

Часть 0. Наблюдения (не оценивается)

В 9-ом классе вы проделывали подобный эксперимент на одной из лабораторных работ. Возьмитесь большим и указательным пальцем за нить вблизи её крепления к горизонтальному стержню. Приведите маятник во вращательное движение. Старайтесь чтобы траектория шарика была близка к окружности, и чтобы шарик слева и справа от отметки нуль проходил на одинаковом расстоянии. Отпустите нить и наблюдайте за движением шарика. Если при проведении исследования Вам будет недостаточно меток, нанесённых на бумажную полосу, то вы можете нанести дополнительные метки.

Часть 1. Теоретическая

Введём обозначения: T – период обращения шарика по окружности, l – расстояние от точки подвеса до центра шарика, g – ускорение свободного падения, β – угол между вертикалью и нитью во время движения шарика по окружности,

R – радиус окружности, по которой движется шарик. Иные необходимые величины введите и опишите самостоятельно.

1.1 Сделайте схематический рисунок при движении конического маятника. Обозначьте силы, действующие на шарик и другие необходимые вектора. 1.2 Покажите, что зависимость $T(\beta)$ периода обращения шарика T от угла между вертикалью и нитью β во время движения шарика описывается уравнением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \beta}{g}}. \quad (1)$$

1.3 Получите уравнение зависимости $T(R)$ периода обращения шарика T от радиуса окружности, по которой движется шарик R .

Часть 2. Эксперимент и анализ

2.1 Исследуйте зависимость $T(R)$ экспериментально. Результаты представьте таблично. (Повторные измерения в таблицу записывать не нужно). Кратко опишите как вы измеряли период. 2.2 Линеаризируйте уравнение, полученное вами в п.1.3. Укажите какие величины в полученном вами линеаризованном уравнении будут аналогичны величинам y , b , k , x в линейном уравнении $y = b + kx$ (*). 2.3 Постройте график линеаризованной зависимости $T(R)$. 2.4 На основе результатов эксперимента определите период обращения конического маятника, когда $R \rightarrow 0$. Вычислите погрешности.

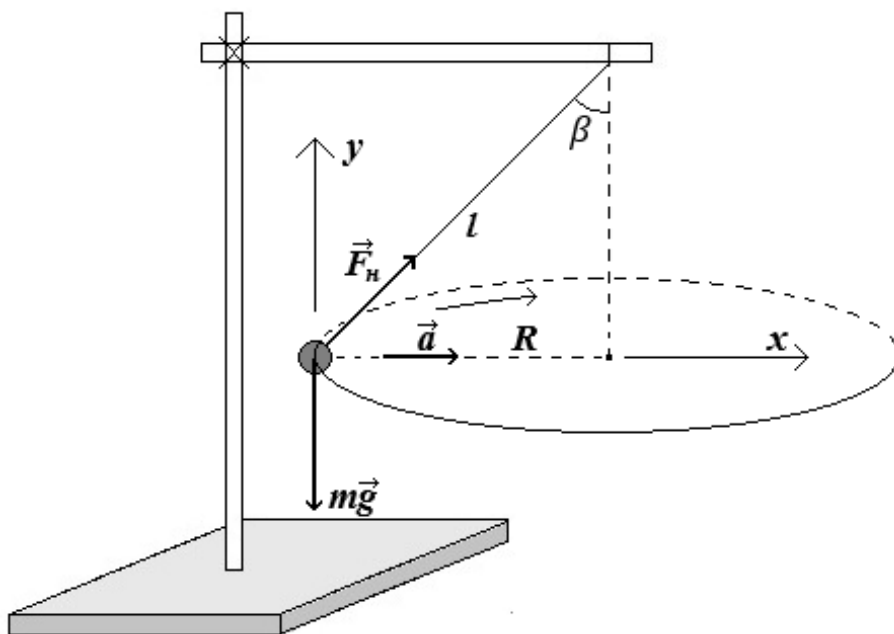
Часть 3. Вычисления значений констант

Используя результаты части 2, вычислите (не забудьте о погрешностях): 3.1 Ускорение свободного падения g . 3.2 Определите радиус окружности, по которой должен двигаться шарик, и угол между нитью и вертикалью, когда $T \rightarrow 0$.

Задача 10_1. Конический маятник (решение)

Часть 1. Теоретическая

1.1



1.2 Запишем второй закон Ньютона в проекции на оси координат:

$$x) \quad ma = F_{\text{н}} \sin \beta \quad (2), \quad y) \quad 0 = F_{\text{н}} \cos \beta - mg \quad (3).$$

Из (3) получим:

$$F_{\text{н}} = \frac{mg}{\cos \beta}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) и сокращая на массу шарика m , получим:

$$a = \frac{g}{\cos \beta} \sin \beta. \quad (5)$$

Центростремительное ускорение шарика представим как

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{4\pi^2}{T^2} l \sin \beta. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} l \sin \beta = \frac{g}{\cos \beta} \sin \beta. \quad (7)$$

После несложных преобразований из (7) получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \beta}{g}}. \quad (1)$$

1.3 Выразим $\cos \beta$ через $\sin \beta$, используя основное тригонометрическое тождество, получим:

$$\cos \beta = \sqrt{1 - (\sin \beta)^2}, \quad (8)$$

$\sin \beta$ представим как

$$\sin \beta = \frac{R}{l}. \quad (9)$$

Делая подстановку (9) $\rightarrow$ (8) $\rightarrow$ (1), получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \sqrt{1 - \left(\frac{R}{l}\right)^2}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt[4]{1 - \left(\frac{R}{l}\right)^2}. \quad (10)$$

Часть 2. Эксперимент и анализ

2.1 Измеряем время 10-и оборотов шарика по окружности с R , см T , с $\Delta\tau$. Период находим как

$$T = \frac{\Delta\tau}{10}. \quad (11)$$

Таблица 1. Зависимость $T(R)$		
$\Delta\tau$, с	R , см	T , с
13,19	5,0	1,32
13,13	7,5	1,31
13,06	10,0	1,31
12,95	12,5	1,30
12,90	15,0	1,29
12,78	17,5	1,28
12,53	20,0	1,25
12,27	22,5	1,23
12,11	25,0	1,21
11,76	27,5	1,18
11,42	30,0	1,14

2.2 Возведём обе части уравнения (10) в четвёртую степень, получим:

$$T^4 = \frac{16\pi^4 l^2}{g^2} \left(1 - \left(\frac{R}{l} \right)^2 \right). \quad (12)$$

После раскрытия скобок и сокращения на l^2 , получим:

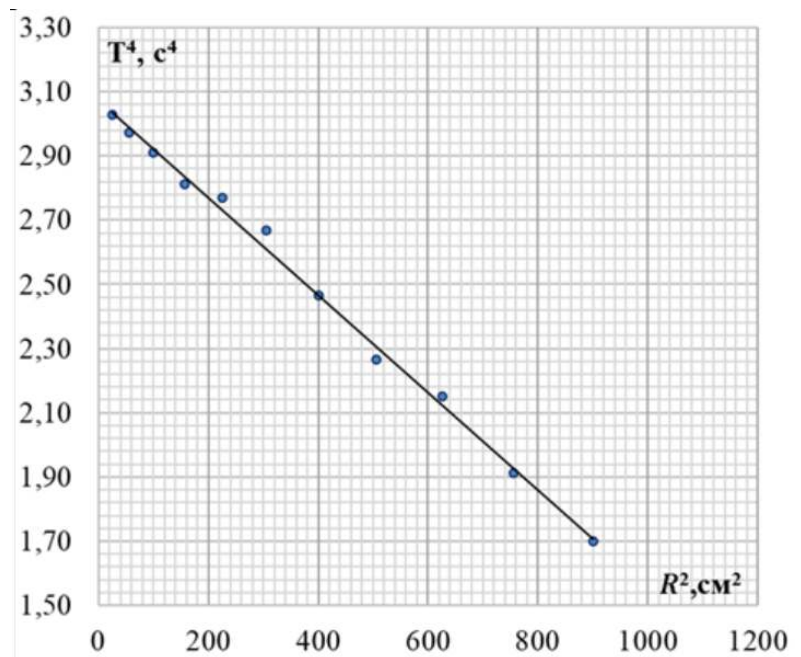
$$T^4 = \frac{16\pi^4 l^2}{g^2} - \frac{16\pi^4}{g^2} R^2. \quad (13)$$

Сравнивая (13) с уравнением $y = b + kx$ видим, что

$$T^4 \rightarrow y, \quad \frac{16\pi^4 l^2}{g^2} \rightarrow b, \quad -\frac{16\pi^4}{g^2} \rightarrow k, \quad R^2 \rightarrow x. \quad (14)$$

2.3 Определим значения T^4 и R^2 .

Таблица 2.	График. Зависимость $T^4(R^2)$	
**Зависимость $T^4(R^2)$ **		
R^2 , см ²	T^4 , с ⁴	
25	3,03	
56	2,97	
100	2,91	
156	2,81	
225	2,77	
306	2,67	
400	2,46	
506	2,27	
625	2,15	
756	1,91	
900	1,70	
сред	369	2,51
дисп	$7,96 \cdot 10^4$	0,184
ковар		-121
N	$\langle k \rangle$	$\langle b \rangle$
11	$-1,52 \cdot 10^{-3}$	3,07
	Δk	Δb
	$0,06 \cdot 10^{-3}$	0,03
коррел	0,998	



2.4 Используя (13) и (14), получим, что при $R \rightarrow 0$

$$T = \sqrt[4]{b}. \quad (15)$$

Используя МНК (можно использовать ПГО), находим:

$$b = (3,07 \pm 0,03)c^4,$$

$$\langle T \rangle = \sqrt[4]{\langle b \rangle} = \sqrt[4]{3,07c^4} = 1,32c.$$

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta b}{\langle b \rangle} = \frac{0,03c^4}{3,07c^4} = 0,0098 = 0,98\%, \quad (16)$$

$$\varepsilon_T = \frac{\varepsilon_b}{4} = \frac{0,0098}{4} = 0,0025 = 0,25\%, \quad (17)$$

$$\Delta T = \varepsilon_T \cdot \langle T \rangle = 0,0025 \cdot 1,32c = 0,004c. \quad (18)$$

Так как последняя значащая цифра в среднем значении периода $\langle T \rangle$ находится в разряде сотых, то абсолютную погрешность необходимо принять $\Delta T = 0,01c$.

$$T = \langle T \rangle \pm \Delta T = (1,32 \pm 0,01)c$$

Часть 3. Вычисления значений констант

3.1 Используя (13) и (14), получим:

$$g = \frac{4\pi^2}{\sqrt{-k}}. \quad (19)$$

Используя МНК, находим:

$$k = -(1,52 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \frac{c^4}{\text{см}^2},$$

$$\langle g \rangle = \frac{4 \cdot 3,14159^2}{\sqrt{-(-1,52 \cdot 10^{-3}) \frac{c^4}{\text{см}^2}}} = 1013 \frac{\text{см}}{c^2} = 10,1 \frac{\text{м}}{c^2}.$$

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta k}{|\langle k \rangle|} = \frac{0,06 \cdot 10^{-3} \frac{c^4}{\text{см}^2}}{1,52 \cdot 10^{-3} \frac{c^4}{\text{см}^2}} = 0,040 = 4,0\%, \quad (20)$$

$$\varepsilon_g = \frac{\varepsilon_k}{2} = \frac{0,040}{2} = 0,020 = 2,0\%, \quad (21)$$

$$\Delta g = \varepsilon_g \cdot \langle g \rangle = 0,020 \cdot 10,1 \frac{\text{м}}{c^2} = 0,2 \frac{\text{м}}{c^2}, \quad (22)$$

$$g = \langle g \rangle \pm \Delta g = (10,1 \pm 0,2) \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

3.2

Если $T \rightarrow 0$, то и $T^4 \rightarrow 0$. Подставляя в (13) $T^4 = 0$, получим:

$$R = l. \quad (23)$$

Следовательно:

$$\beta = 90^\circ.$$

Используя (13) и (14), получим:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle g \rangle}{4\pi^2} \sqrt{\langle b \rangle} = \frac{10,1 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}{4 \cdot 3,14159^2} \cdot \sqrt{3,07 \text{с}^4} = 0,448 \text{М}. \quad (24)$$

$$\varepsilon_l = \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{2\langle b \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta g}{\langle g \rangle}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,03 \text{с}^4}{2 \cdot 3,07 \text{с}^4}\right)^2 + \left(\frac{0,2 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}{10,1 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}\right)^2} = 0,021 = 2,1\%, \quad (25)$$

$$\Delta l = \varepsilon_l \cdot \langle l \rangle = 0,021 \cdot 0,448 \text{М} = 0,010 \text{М}, \quad (26)$$

$$l = \langle l \rangle \pm \Delta l = (0,448 \pm 0,010) \text{М}.$$