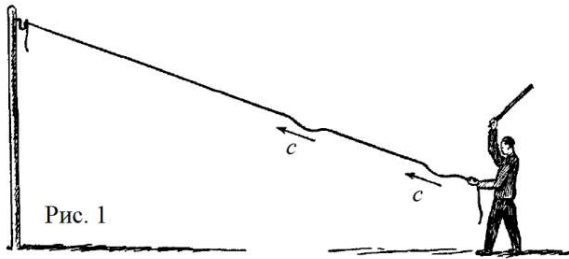


-3. Звук и Гук

Условие

Задание 10-3. Звук и Гук



Из простых опытов (Рис. 1) следует, что механические взаимодействия (и звук в том числе) передаются в упругой среде (пространстве) от точки к точке не мгновенно, а переносятся упругими волнами с конечной скоростью c ($c < \infty$) за некоторый конечный промежуток времени.

Интуитивно понятно, что скорость распространения упругих волн (звука) в данной среде определяется такими её механическими характеристиками, как упругость и инертность.

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс распространения упругих волн (звука) на достаточно простых моделях.

Рассмотрим однородный упругий стержень (Рис. 2) начальной длиной l и площадью поперечного сечения S , к свободному концу которого приложили силу $\vec{F}$.

Под действием силы $\vec{F}$ стержень удлинится (деформируется) на некоторую величину Δl ($\Delta l > 0$), называемую абсолютной деформацией образца (см. Рис. 2).

При деформации стержня в нем возникает обратная сила упругости $\vec{F}_y$, которая стремится скомпенсировать действие внешней силы $\vec{F}$.

Согласно закону Гука, проекция силы упругости F_y , возникшая в стержне, при малых деформациях ($\Delta l \ll l$) есть

$$F_y = -k\Delta l = F, \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости стержня.

Коэффициент упругости k стержня зависит как от его «геометрии», так и от упругих свойств его материала

$$k = E \frac{S}{l}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга (упругости) материала, из которого изготовлен стержень.

Модуль Юнга материала является табличным данным и измеряется в $[E] = \text{Па} = \text{Н/м}^2$.

Действия силы тяжести и сил трения и сопротивления в данной задаче не учитывать.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: молярная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, молярная масса воздуха $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, скорость звука в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ равна $c = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, ξ – греческая буква «кси».

Часть 1. Скорость звука в упругом стержне

Пусть упругий стержень AB налетает по нормали со скоростью v на очень жесткую (недеформируемую) неподвижную стенку (Рис. 3). Плотность материала стержня ρ , его модуль Юнга (упругости) равен E .

Сразу после механического контакта со стенкой по стержню (от стенки) начинает бежать продольная волна сжатия (возмущения) со скоростью звука c (см. Рис. 3).

При этом к некоторому моменту времени деформированной оказывается лишь часть DB стержня, до которой успела дойти волна упругого возмущения (см. Рис. 3). Будем считать, что частицы стержня в этой области (DB) уже остановились ($v = 0$) под действием сил упругости.

Заметим, что в этот же момент времени другие частицы стержня (в его «дальней» части AD) «как ни в чем не бывало» продолжают движение вперед (к стенке) с прежней скоростью v (см. Рис. 3).

1.1 Методом размерностей получите формулу (с точностью до безразмерного коэффициента ξ) для скорости звука $c = c(E, \rho)$ в упругом стержне в зависимости его модуля упругости (Юнга) E и плотности ρ .

1.2 Выведите скорость звука в упругом стержне, рассмотрев изменение импульса стержня в процессе столкновения с недеформируемой стенкой. Установите значение безразмерного коэффициента ξ .

1.3 Найдите силу давления F_d стержня на стену, действующую в процессе удара (во время контакта стержня со стеной).

Часть 2. Звук и Ньютон

Скорость звука в газах впервые была рассчитана И. Ньютоном в его знаменитой работе «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Для этого ему необходимо было установить: какая величина играет роль модуля Юнга E для газов?

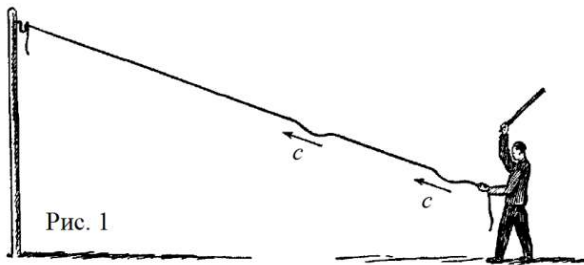
Рассмотрим идеальный газ под давлением p_0 в неподвижной гладкой трубе AB длиной l и площадью поперечного сечения S , запертый подвижным герметичным поршнем D (Рис. 5, а)).

1. Приложим к подвижному поршню силу F , сжимающую идеальный газ (Рис. 5,б)). Пусть под действием этой силы поршень сместился влево на Δl ($\Delta l \ll l$), а давление газа увеличилось до значения $(p_0 + \Delta p)$, причем $\Delta p \ll p$. Используя (1) и (2), выразите модуль Юнга E газа внутри трубы через величины $(\Delta p, \Delta V, V)$, где $\Delta V = S\Delta l$ есть изменение объема газа под действием силы, а $V = Sl$ – начальный объем газа. 2. Примем во внимание, что при распространении волн (в том числе и звуковых) отсутствует перенос вещества, т.е. масса выделенного объема газа в процессе сжатия (растяжения) остается постоянной ($m = \rho V = \text{const}$) при малых изменениях объема ΔV и плотности $\Delta \rho$ газа. Используя ранее полученные результаты, докажете универсальную формулу для скорости звука в газах (и жидкостях) в виде $c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$, где Δp – изменение давления газа при его сжатии (разрежении), а $\Delta \rho$ – соответствующее

этому изменение плотности газа. 3. Согласно предположению Ньютона процесс распространения звука в газе можно считать изотермическим ($T = \text{const}$). Получите формулу Ньютона для скорости звука в газах. 4. По формуле Ньютона вычислите скорость звука в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$. Сравните полученное значение с приведёнными данными. В чем, по Вашему мнению, «ошибся» Ньютон?

Решение

Задание 10-3. Звук и Гук



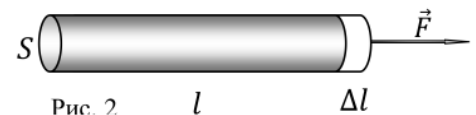
Из простых опытов (Рис. 1) следует, что механические взаимодействия (и звук в том числе) передаются в упругой среде (пространстве) от точки к точке не мгновенно, а переносятся упругими волнами с конечной скоростью c ($c < \infty$) за некоторый конечный промежуток времени.

Интуитивно понятно, что скорость распространения упругих волн (звука) в данной среде определяется такими её механическими характеристиками, как упругость и инертность.

В рамках данного задания вам предстоит более подробно разобрать процесс распространения упругих волн (звука) на достаточно простых моделях.

Рассмотрим однородный упругий стержень (Рис. 2) начальной длиной l и площадью поперечного сечения S , к свободному концу которого приложили силу $\vec{F}$.

Под действием силы $\vec{F}$ стержень удлинится (деформируется) на некоторую величину Δl ($\Delta l > 0$), называемую абсолютной деформацией образца (см. Рис. 2).



При деформации стержня в нем возникает обратная сила упругости $\vec{F}_y$, которая стремится скомпенсировать действие внешней силы $\vec{F}$.

Согласно закону Гука, проекция силы упругости F_y , возникшая в стержне, при малых деформациях ($\Delta l \ll l$) есть

$$F_y = -k\Delta l = F, \quad (1)$$

где k – коэффициент упругости стержня.

Коэффициент упругости k стержня зависит как от его «геометрии», так и от упругих свойств его материала

$$k = E \frac{S}{l}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга (упругости) материала, из которого изготовлен стержень.

Модуль Юнга материала является табличным данным и измеряется в $[E] = \text{Па} = \text{Н/м}^2$.

Действия силы тяжести и сил трения и сопротивления в данной задаче не учитывать.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: молярная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$, молярная масса воздуха $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$, скорость звука в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ равна $c = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$, ξ – греческая буква «кси».

Часть 1. Скорость звука в упругом стержне

Пусть упругий стержень AB налетает по нормали со скоростью v на очень жесткую (недеформируемую) неподвижную стенку (Рис. 3). Плотность материала стержня ρ , его модуль Юнга (упругости) равен E .

Сразу после механического контакта со стенкой по стержню (от стенки) начинает бежать продольная волна сжатия (возмущения) со скоростью звука c (см. Рис. 3).

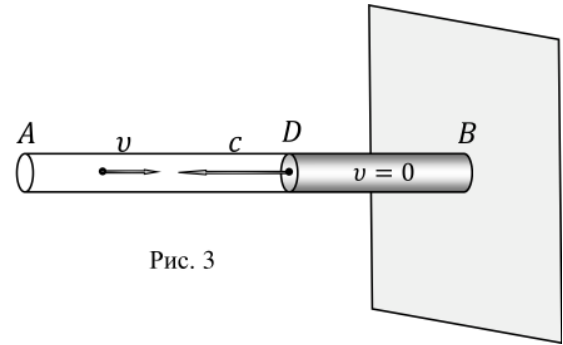


Рис. 3

При этом к некоторому моменту времени деформированной оказывается лишь часть DB стержня, до которой успела дойти волна упругого возмущения (см. Рис. 3). Будем считать, что частицы стержня в этой области (DB) уже остановились ($v = 0$) под действием сил упругости.

Заметим, что в этот же момент времени другие частицы стержня (в его «дальней» части AD) «как ни в чем не бывало» продолжают движение вперед (к стенке) с прежней скоростью v (см. Рис. 3).

1.1 Методом размерностей получите формулу (с точностью до безразмерного коэффициента ξ) для скорости звука $c = c(E, \rho)$ в упругом стержне в зависимости его модуля упругости (Юнга) E и плотности ρ .

1.2 Выведите скорость звука в упругом стержне, рассмотрев изменение импульса стержня в процессе столкновения с недеформируемой стенкой. Установите значение безразмерного коэффициента ξ .

1.3 Найдите силу давления F_d стержня на стену, действующую в процессе удара (во время контакта стержня со стеной).

Часть 2. Звук и Ньютон

Скорость звука в газах впервые была рассчитана И. Ньютоном в его знаменитой работе «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Для этого ему необходимо было установить: какая величина играет роль модуля Юнга E для газов?

Рассмотрим идеальный газ под давлением p_0 в неподвижной гладкой трубе AB длиной l и площадью поперечного сечения S , запертый подвижным герметичным поршнем D (Рис. 5, а)).

1. Приложим к подвижному поршню силу F , сжимающую идеальный газ (Рис. 5, б)). Пусть под действием этой силы

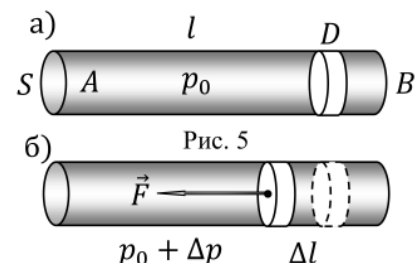


Рис. 5

поршень сместился влево на Δl ($\Delta l \ll l$), а давление газа увеличилось до значения $(p_0 + \Delta p)$, причем $\Delta p \ll p$. Используя (1) и (2), выразите модуль Юнга E газа внутри трубы через величины $(\Delta p, \Delta V, V)$, где $\Delta V = S\Delta l$ есть изменение объема газа под действием силы, а $V = Sl$ – начальный объем газа. 2. Примем во внимание, что при распространении волн (в том числе и звуковых) отсутствует перенос вещества, т.е. масса выделенного объема газа в процессе сжатия (растяжения) остается постоянной ($m = \rho V = \text{const}$) при малых изменениях объема ΔV и плотности $\Delta \rho$ газа. Используя ранее полученные результаты, докажите универсальную формулу для скорости звука в газах (и жидкостях) в виде $c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$, где Δp – изменение давления газа при его сжатии (разрежении), а $\Delta \rho$ – соответствующее этому изменению плотности газа. 3. Согласно предположению Ньютона процесс распространения звука в газе можно считать изотермическим ($T = \text{const}$). Получите формулу Ньютона для скорости звука в газах. 4. По формуле Ньютона вычислите скорость звука в воздухе при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$. Сравните полученное значение с приведёнными данными. В чем, по Вашему мнению, «ошибся» Ньютон?

2. Возможные решения:

1. Часть 1. Скорость звука в упругом стержне

1. Учитывая размерности модуля Юнга $[E] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$ и плотности $\rho = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ из них можно составить только одну «композицию», имеющую размерность скорости: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Следовательно, с точностью до некоторого безразмерного коэффициента ξ искомую формулу для скорости звука в стержне можно записать как

$$c = \xi \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (1)$$

1. Рассмотрим столкновение стержня с воображаемой недеформируемой стеной. При этом за время Δt остановилась часть стержня длиной $l = c\Delta t$ (куда добежал звук). Соответственно, за промежуток времени Δt погашен импульс Δp этого же участка стержня длиной $l = c\Delta t$.

Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме

$$\Delta p = F\Delta t. \quad (2)$$

Погашенный импульс можно выразить как

$$\Delta p = \Delta mv = \rho S l v = \rho S (c\Delta t) v, \quad (3)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, v – скорость стержня.

Согласно закону Гука

$$F = k\Delta l = E \frac{S}{l} \Delta l = E \frac{S}{l} (v\Delta t). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем

$$\rho S (c\Delta t) v = E \frac{S}{l} (v\Delta t) \Delta t = E \frac{S}{c\Delta t} (v\Delta t) \Delta t. \quad (5)$$

Из (5) получаем искомую формулу для скорости продольных упругих волн в упругом стержне

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6)$$

Сравнивая (6) и (1), находим значение неизвестного безразмерного коэффициента

$$\xi = 1 . (7)$$

Следовательно, нам повезло, и методом размерностей мы сразу определили точную формулу для скорости звука в упругом стержне.

1. Сила давления стержня на стену в процессе удара (во время контакта) найдется из (2) как

$$F_d = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\rho S (c \Delta t) v}{\Delta t} = \rho S c v = v S \sqrt{\rho E}. (8)$$

Часть 2. Звук и Ньютон

2.1 Силу F можно представить, с одной стороны как силу упругости $(-k\Delta l)$, а с другой – как изменение силы давления газа $(\Delta p S)$

$$F = -k\Delta l = \Delta p S, (9)$$

где $k = E \frac{S}{l}$ – коэффициент упругости «газовой пружины».

Из (9) получим

$$E \frac{S}{l} \Delta l = -\Delta p S \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{l}{\Delta l} \Delta p = -\frac{V}{\Delta V} \Delta p = -V \frac{\Delta p}{\Delta V}. (10)$$

2.2 Подставляя (10) в (6), получаем для скорости звука в газе

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{-V \frac{\Delta p}{\Delta V}}{\rho}} = \sqrt{-\frac{V}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta V}}. (11)$$

Знак «-» под корнем в (11) вызывает опасения лишь «на первый взгляд». Действительно, если, например, давление газа увеличивается ($\Delta p > 0$), то его объем будет уменьшаться ($\Delta V < 0$). Таким образом, подкоренное выражение “автоматически” останется положительным.

Поскольку при распространении звука переноса вещества нет, то для некоторого выделенного объема сплошной среды должно выполняться равенство

$$m = \rho V = (\rho + \Delta \rho)(V + \Delta V). (12)$$

Из (12) найдем (пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка)

$$\Delta \rho V + \rho \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = -\rho \frac{\Delta V}{\Delta \rho}. (13)$$

Подставляя (13) в (11), получаем

$$c = \sqrt{-\frac{V}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta V}} = \sqrt{-\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta V} \left(-\rho \frac{\Delta V}{\Delta \rho}\right)} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}. (14)$$

2.3 Запишем уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона–Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT, (15)$$

где M – молярная масса газа, R – молярная газовая постоянная.

Выразим из (15) плотность газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. (16)$$

Возьмем приращения от обеих частей (14) при изотермическом процессе ($T = const$)

$$\Delta\rho = \frac{M}{RT} \Delta p . \quad (17)$$

Тогда отношение соответствующих приращений равно

$$\frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \frac{RT}{M} . \quad (18)$$

С учетом (18) из (14) получаем формулу Ньютона для скорости звука в газе

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta\rho}} = \sqrt{\frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} . \quad (19)$$

2.4 Из (19) для воздуха ($M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$) при температуре $t^\circ = 20^\circ\text{C}$ получаем значение скорости звука

$$c = \sqrt{\frac{8.31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}}} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = 290 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) . \quad (20)$$

Поскольку скорость звука при такой температуре $c = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$, то погрешность формулы Ньютона составляет величину порядка 15%. Причина такого значительного расхождения теории и эксперимента более ста лет оставалась непонятной.

Лишь в начале XIX века Лаплас установил, что просчет Ньютона заключался в том, что он считал процесс распространения звука *изотермическим*, тогда как он относится к *адиабатическим* процессам (уравнение адиабатного процесса было получено Пуассоном «только» в 1823 году). Ньютон же опирался на закон Бойля-Мариотта, открытый его современниками еще во второй половине XVII века.

Уточненная формула для адиабатного процесса ($pV^\gamma = \text{const}$) находится в превосходном согласии (!) с данными эксперимента для воздуха ($\gamma = 1,4$)

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 343 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) . \quad (21)$$

Тем не менее, даже «неточный» вывод Ньютоном формулы для скорости звука сыграл существенную роль в формировании общего подхода к описанию волновых процессов в сплошных средах.

Контактный телефон для вопросов и консультаций в день проведения олимпиады:

+375 29 766 12 87