Республиканская физическая олимпиада 2024 год

(III этап)

Теоретический тур

Решения задач
9 класс
(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты их решений, конечно же, не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы физически обоснованы и приводят к правильным ответам, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших талантливых школьников!

Задание 9-1. Прогрессивная динамика

В данном задании действие силы тяжести не учитывать. Внимание! Рисунки носят качественный характер: реальные пропорции сил на них не соблюдены.

1.1 На материальную точку массой $m = 23{,}2$ кг действуют двенадцать сил (Рис. 1), расположенных в одной плоскости, самая «маленькая» из которых равна $F_1 = 10$ Н и направлена вдоль оси Ox. Известно, что каждая следующая сила больше предыдущей на $\Delta F = 10$ Н и повернута на угол $\alpha = 30°$ (см. Рис. 1). Найдите ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки.

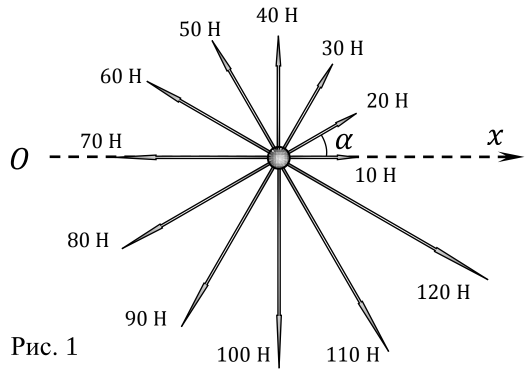


Рис. 1

1.2 Рассмотрим общий случай. Пусть на материальную точку массой m (Рис. 2) действует система из n сил ($\vec{F}_1$; $\vec{F}_2$; $\vec{F}_3$; …; $\vec{F}_{n-1}$; $\vec{F}_n$), расположенных в одной плоскости на одинаковом угловом расстоянии $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг от друга. Известно, что модуль F_{i+1} каждой следующей силы больше модуля F_i предыдущей на ΔF. Найдите ускорение $\vec{a}_2$ материальной точки.

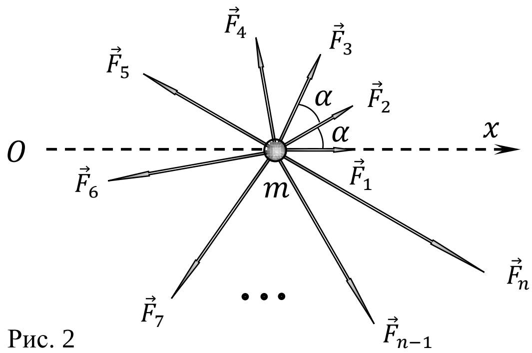


Рис. 2

1.3 Используя общее выражение, полученное для $\vec{a}_2$ в предыдущем пункте, вычислите ускорение $\vec{a}_1$ для первого пункта задачи.

Решение:

Задание 9-1. Прогрессивная динамика

1.1 Прямой метод решения предполагает нахождение проекции каждой силы на соответствующую ось и дальнейшее суммирование проекций по каждой из осей.

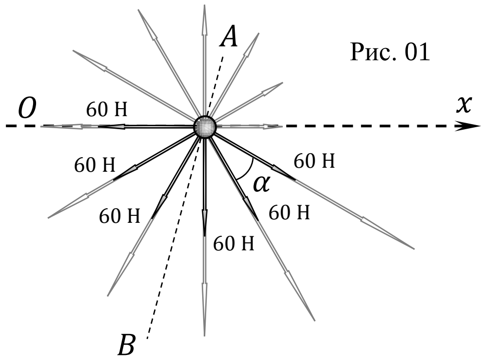


Рис. 01

Однако задачу можно решить проще (и короче!) если заметить, что в данной системе разность противоположных по направлению сил (70 Н и 10 Н, 80 Н и 20 Н и т.д.) попарно остается постоянной и равной $F_0 = 60$ Н.

Это обстоятельство позволяет упростить систему до шести симметричных сил с модулем F_0 (Рис. 01), сумма которых будет направлена вдоль оси симметрии AB и равна

$$F = 2F_0(\cos 15° + \cos 45° + \cos 75°)\ . \quad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки будет также направлено вдоль прямой AB (под углом $\beta = 105°$ к оси Ox) и равно

$$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{2F_0(\cos 15° + \cos 45° + \cos 75°)}{m}\ . \quad (2)$$

Расчет по (2) с точностью до двух значащих цифр дает

$$a_1 = \frac{2 \cdot 60 \cdot (\cos 15° + \cos 45° + \cos 75°)}{23{,}2}\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \{9{,}992336134\}^1 = 10\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) \quad (3)$$

Интересно, что значение (3) для a_1 «совпало» со значением g , используемом на централизованном тестировании (☺), хотя в этом задании мы его не учитывали

$$a_1 = \text{g}_{\text{цт}} = 10\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right).$$

1.2 По определению равнодействующая $\vec{F}$ равна сумме всех сил, действующих на материальную точку

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n\ . \quad (4)$$

Заметим, что модули сил, действующих на материальную точку, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Следовательно, для модуля силы F_n справедлива формула

$$F_n = F_1 + (n-1)\Delta F. \quad (5)$$

Кроме того, при арифметической прогрессии для любых соседних членов F_{i+1} и F_i выполняется равенство

$$F_{i+1} - F_i = \Delta F = \text{const}. \quad (6)$$

Для практического использования свойства (6) на векторной диаграмме выполним три шага (Рис. 02). Шаг первый: поменяем направление каждого вектора $\vec{F}_i$ на противоположное (т.е. умножим каждый вектор на (-1), при этом он поворачивается на 180°).

Шаг второй: повернём обращенную систему сил как целое на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки (См. Рис. 02).

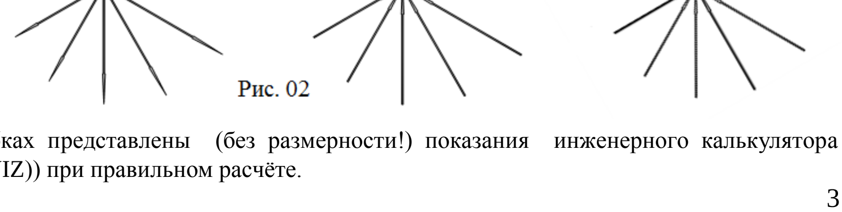


Рис. 02

[1] — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

Шаг третий: наложим полученную после двух шагов систему сил на исходную систему сил так, чтобы их центры совпали. При этом вектор $(-\vec{F}_1)$ попадет на вектор $\vec{F}_2$, вектор $(-\vec{F}_2)$ попадет на вектор $\vec{F}_3$ и т.д., а вот вектор $(-\vec{F}_n)$ попадет на начальный вектор $\vec{F}_1$.

Из (6) следует, что после суммирования наложенных векторов получится система из $(n-1)$ равных по модулю векторов ΔF, повернутых на угол α друг относительно друга, и вектор $(F_1 - F_n)$, параллельный оси Ox (Рис. 03). Вектор $(F_1 - F_n)$ можно представить как

$$F_1 - F_n = F_1 - (F_1 + (n-1)\Delta F) = -(n-1)\Delta F = -n\Delta F + \Delta F \ . \tag{7}$$

По правилу многоугольника теперь сумма n одинаковых по модулю векторов ΔF, повернутых на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг относительно друга, равна нулю. Следовательно, согласно (7), после наложения двух систем «останется» только вектор $-n\Delta F$, направленный против оси Ox.

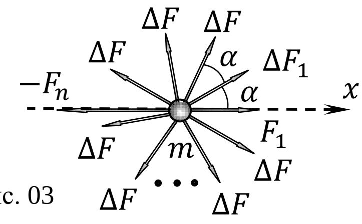


Рис. 03

Изобразим на векторной диаграмме (Рис. 04) все сказанное: отложим вектор $\vec{F}$, далее $\left(-\vec{F}\right)$ после первого шага, далее $\vec{F}^*$ после второго шага. Их сумма (третий шаг) должна давать вектор $(-n\Delta F)$, отмеченный пунктиром.

По правилу сложения векторов получаем равнобедренный векторный треугольник (см. Рис. 04), из которого можем записать

$$n\Delta F = 2F\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{n\Delta F}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,, \tag{8}$$

где F – модуль равнодействующей силы.

Интересно, что модуль F равнодействующей не зависит от F_1, а определяется только разностью ΔF арифметической прогрессии и количеством n ее членов. Это и понятно, по тому же правилу многоугольника векторная сумма всех членов F_1 равна нулю.

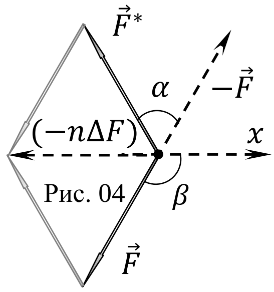


Рис. 04

Напомним, что для задания вектора $\vec{F}$ помимо модуля (8) необходимо также обязательно определить и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол β, образованный искомым вектором $\vec{F}$ с осью Ox, (см. Рис. 04).

Из равнобедренного треугольника сил, учитывая, что $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ и углы при основании равны, найдем

$$\beta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} = \frac{n+2}{2n}\pi\ . \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) полностью задают искомый вектор $\vec{F}$, приложенный к материальной точке (где $n \geq 2$).

Для модуля ускорения a_2 материальной точки окончательно получаем

$$a_2 = \frac{F}{m} = \frac{n\Delta F}{2m\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\,, \tag{10}$$

причем вектор $\vec{a}_2$ будет направлен под углом

$$\beta = \frac{n+2}{2n}\pi \tag{11}$$

к оси Ox ($n \geq 2$).

1.3 Для вычислений с использованием (10) и (11) из условия задачи найдем необходимые параметры: $n = 12$; $\Delta F = 10$ Н . После подстановки получаем

$$a_1 = \frac{12 \cdot 10}{2 \cdot 23{,}2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \{9{,}992336134\} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right), \tag{12}$$

$$\beta = \frac{12+2}{2 \cdot 12}\pi = \frac{7}{12}\pi = 105°. \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13) с (2) и (3), не только испытываешь чувство удовлетворения (физика – наука точная!), но и понимаешь, насколько труднее получить общее решение по сравнению с частным, отдельным случаем. Но это всегда гораздо престижнее… ☺

Задание 9-2. Двойное скольжение

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем: трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь.

1.1 «Шарик и параллелепипед» Небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к вертикальной стенке в точке O (Рис. 1), свисает с параллелепипеда размерами $a \times b$ (в плоскости рисунка), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Параллелепипед начинают двигать вправо с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найдите скорость $\vec{u}_1$ шарика в процессе его скольжения по вертикальной стенке параллелепипеда. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от параллелепипеда.

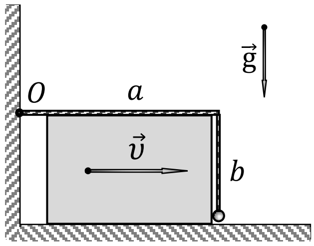
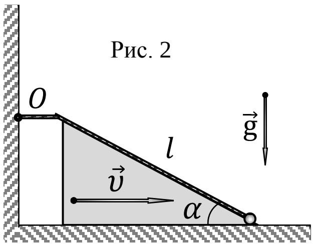
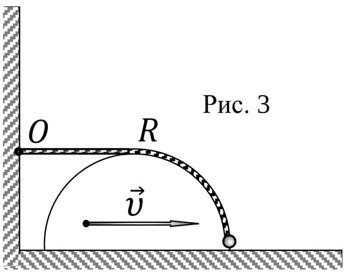


Рис. 1

1.2 «Шарик и наклонная плоскость» Усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик, привязанный легкой нерастяжимой нитью к стене, который лежит на наклонной плоскости (Рис. 2), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Наклонную плоскость начинают двигать вправо с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найдите скорость $\vec{u}_2$ шарика в процессе его скольжения по наклонной плоскости. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту α, ее длина l.

Рис. 2


1.3 «Шарик и полусфера» Еще более усложним задачу и рассмотрим небольшой шарик на легкой нерастяжимой нити, который лежит на полусфере (Рис. 3), слегка касаясь горизонтальной поверхности. Полусферу начинают двигать вправо с постоянной скоростью $\vec{v}$. Найдите скорость $\vec{u}_3\,(x)$ шарика в процессе его скольжения по полусфере в момент времени, когда полусфера сместилась на расстояние x $(x < R)$. Опишите его траекторию на этом участке движения, укажите её существенные параметры. Считайте, что в процессе движения шарик не отрывается от полусферы. Радиус полусферы R.

Рис. 3


Решение:

Задание 9-2. «Двойное скольжение»

1.1 «Шарик и параллелепипед» Поскольку движение параллелепипеда равномерное и прямолинейное, то логично предположить, что шарик также будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u}_1$ под некоторым углом α к горизонту.

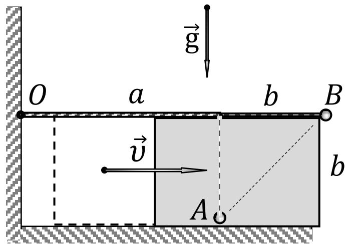


Рис. 01

В таком случае для нахождения скорости нет необходимости рассматривать малые промежутки времени Δt, а можно выбрать любой удобный конечный промежуток времени t.

Воспользуемся этим соображением и рассмотрим систему через промежуток времени t, когда параллелепипед сместился вправо на длину вертикальной стороны b (Рис. 01)

$$b = \upsilon t. \tag{1}$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по вертикальной стенке параллелепипеда до его вершины B (см. Рис. 01).

Следовательно, его перемещение AB (по модулю) составило гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника

$$AB = \sqrt{2}b. \tag{2}$$

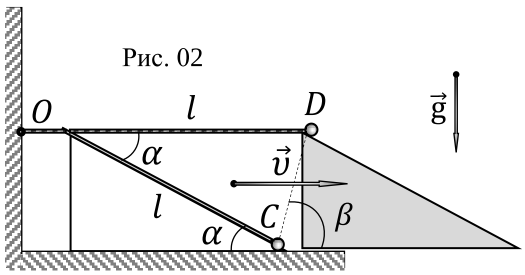
Соответственно, искомая скорость $\vec{u}_1$ шарика будет направлена вдоль гипотенузы AB (под углом $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ к горизонту) и равна по модулю

$$u_1 = \frac{AB}{t} = \frac{\sqrt{2}b}{b/\upsilon} = \upsilon\sqrt{2} = \sqrt{2}\upsilon. \tag{3}$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок AB, также направленный под углом $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ к горизонту, длиной

$$AB = b\sqrt{2} = \sqrt{2}b. \tag{4}$$

Как следует из (4), сторона a параллелепипеда не влияет на решение данной задачи – она может быть любой. Эта сторона параллелепипеда играет существенную роль только при рассмотрении дальнейшего движения системы. ☺

Рис. 02


1.2 «Шарик и наклонная плоскость» Применяя те же общие рассуждения, что и в предыдущем пункте, делаем вывод, что и в этом случае шарик будет двигаться равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u}_2$ под некоторым углом β к горизонту.

Соответственно, рассмотрим систему через промежуток времени t, когда наклонная плоскость сместился вправо на свою длину l (Рис. 02)

$$l = \upsilon t. \tag{5}$$

Поскольку нить нерастяжима, то при этом шарик поднялся по наклонной плоскости до ее вершины D (см. Рис. 02).

Следовательно, его перемещение CD (по модулю) составило основание равнобедренного треугольника с углом α при вершине

$$CD = 2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (6)$$

Соответственно, искомая скорость $\vec{u}_2$ шарика будет направлена вдоль основания CD равнобедренного треугольника под углом β к горизонту

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}. \quad (7)$$

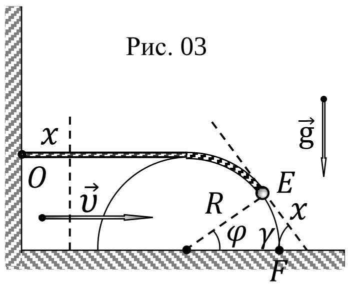
Модуль u_2 скорости $\vec{u}_2$ при этом будет

$$u_2 = \frac{CD}{t} = \frac{2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{l/v} = 2v\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (8)$$

Таким образом, траектория шарика будет представлять собой отрезок CD, направленный под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ к горизонту, длиной

$$CD = 2l\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right). \quad (9)$$

Интересно, что при $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$ из (8) и (9) получаем формулы (3) и (4) из предыдущего пункта, поскольку вертикальную стенку параллелепипеда можно считать «наклонной плоскостью» с прямым углом. Физика рулит! ☺



1.3 «Шарик и полусфера» Движение полусферы равномерное, следовательно, через промежуток времени t она пройдет по плоскости расстояние (Рис. 03)

$$x = vt. \quad (10)$$

В силу нерастяжимости нити шарик пройдет по полусфере такое же расстояние x и окажется в точке E (см. Рис. 03), причем длина дуги EF будет равна

$$\breve{EF} = x = vt = \varphi R. \quad (11)$$

Из (11) находим угол φ

$$\varphi = \frac{x}{R} = \frac{vt}{R}. \quad (12)$$

Проведем касательную к полусфере в точке нахождения шарика в данный момент времени (см. Рис. 03). Она будет образовывать с горизонтом угол γ, который равен

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi. \quad (13)$$

Для мгновенного движения шарика маленький участок полусферы можно считать прямым участком движущейся наклонной плоскости, составляющей такой же угол γ с горизонтом. А это значит, что можно воспользоваться формулами (7) и (8) из предыдущего пункта задачи для наклонной плоскости, в которые вместо угла α подставить угол $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Следовательно, модуль мгновенной скорости шарика u_3 будет равен

$$u_3(\varphi) = 2v\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2v\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2}\right) = 2v\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (14)$$

или

$$u_3(x) = 2v\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2R}\right), \quad (15)$$

или

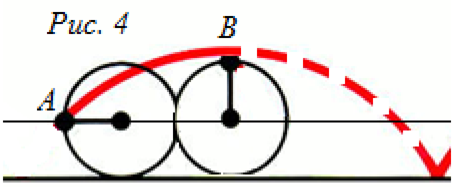
$$u_3(t) = 2v\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{vt}{2R}\right). \tag{16}$$

Скорость $\vec{u}_3$ в данный момент будет направлена под углом к горизонту

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2R} = \frac{\pi}{4} + \frac{vt}{2R}\,. \tag{17}$$

В частности, в момент начала движения $(\varphi = 0)$ угол $\delta = \frac{\pi}{4}$, при этом шарик находится у практически вертикальной стенки полусферы, т.е. как в первом пункте задачи (с параллелепипедом). И там, действительно, угол был 45 градусов.

В данном пункте (это несложно обосновать), траекторией движения шарика будет участок AB циклоиды (Рис. 4), т.е. кривой, которую описывает в пространстве точка на ободе кольца, катящегося без проскальзывания по горизонтальной поверхности.



Существенными параметрами циклоиды являются высота арки циклоиды $(h = 2R)$ и расстояние $(S = 2\pi R)$ между точками касания поверхности качения.

Задание 9-3. Конечная бесконечность

1.1 «Шаг за шагом …» Рассмотрим линейную электрическую цепь из резисторов R и $2R$, составленную из одинаковых повторяющихся звеньев (Рис. 1). Интересно, что сопротивление R_∞^* такой цепи будет конечным даже при бесконечном числе звеньев $(n \to \infty)$.

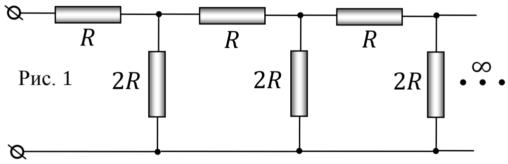


Рис. 1

Пусть R_n – сопротивление конечной линейной цепи при n $(n = 1,2,3, \dots, \infty)$ звеньях. Назовем *относительной погрешностью оценки* R_∞^* величину $\varepsilon_n = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n}$, выраженную в процентах.

Найдите сопротивления одного звена R_1 данной цепи, её двух звеньев R_2, а также относительную погрешность ε_1 оценки R_∞^*. Далее проделайте такую же процедуру с R_2 и R_3, найдите ε_2. Продолжайте данную процедуру шаг за шагом до тех пор, пока относительная погрешность ε_n оценки R_∞^* не станет меньше одного процента $(\varepsilon_n < 1{,}0\ \%)$. При каком значении n это произошло? Чему равно R_n?

1.2 «Линейная бесконечность» Найдите точное значение сопротивления R_∞^* всей бесконечной линейной цепочки (Рис. 1).

1.3 «Плоская бесконечность» Из резисторов R и $2R$ на плоскости собрана бесконечная электрическая цепь AZ (Рис. 2), некоторые части которой стерты (затонированы). Известно, что данная цепь обладает следующим свойством: сопротивление R_{AB} первого звена цепи равно сопротивлению R_{AC} её двух первых звеньев, которое, в свою очередь, равно сопротивлению R_{AD} первых трех звеньев цепи и т.д. (до бесконечности). Восстановите стертые (затонированные) участки цепи на рисунке. Найдите сопротивление $R_\infty^{**} = R_{AZ}$ восстановленной вами бесконечной плоской цепи.

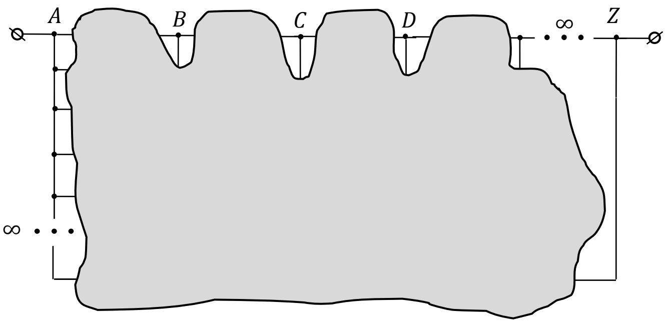


Рис. 2

Решение:

Задание 9-3. «Конечная бесконечность»

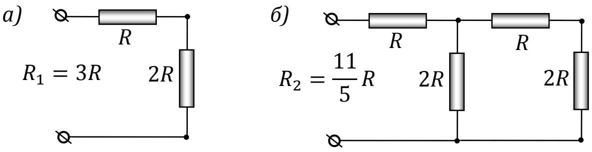


Рис. 01

1.1 «Шаг за шагом …» Для реализации первого шага предложенного алгоритма найдем сопротивления одного звена R_1 (Рис. 01, а)) и двух звеньев R_2 (Рис. 01, б))

$$R_1 = R + 2R = 3R\ , \tag{1}$$

$$R_2 = R + \frac{2R\cdot R_1}{2R+R_1} = R + \frac{2R\cdot 3R}{2R+3R} = \left(1+\frac{6}{5}\right)R = \frac{11}{5}R = 2\frac{1}{5}R\ . \tag{2}$$

Тогда для первого шага ($n = 1$) в рамках предложенной схемы оценки R_∞^* относительная погрешность равна

$$\varepsilon_1 = \frac{R_1 - R_2}{R_1} = \frac{3-\frac{11}{5}}{3} = \frac{4}{15} = 27\ \%\ . \tag{3}$$

Поскольку ε_1 существенно больше одного процента $\varepsilon_1 \gg 1\ \%$, то продолжим процедуру далее.

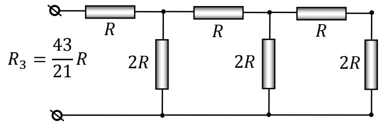


Рис. 02

Для второго шага ($n = 2$) вычислим сопротивление трех звеньев цепи (Рис. 02) с учетом того, что сопротивление двух звеньев R_2 мы уже знаем

$$R_3 = R + \frac{2R\cdot R_2}{2R+R_2} = R + \frac{2R\cdot\frac{11R}{5}}{2R+\frac{11R}{5}} = \left(1+\frac{22}{21}\right)R = \frac{43}{21}R = 2\frac{1}{21}R\ , \tag{4}$$

Следовательно

$$\varepsilon_2 = \frac{R_2 - R_3}{R_2} = \frac{\frac{11}{5}-\frac{43}{21}}{\frac{11}{5}} = \frac{16}{231} = 6{,}9\ \%\ . \tag{5}$$

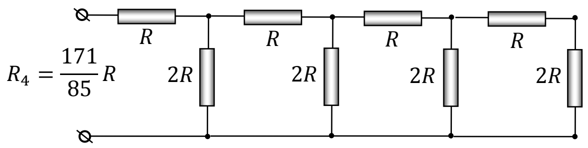


Рис. 03

Хотя тенденция и наметилась, но продолжаем процедуру далее, поскольку $\varepsilon_2 > 1\ \%$.

Для третьего ($n = 3$) шага вычислим сопротивление R_4 четырех звеньев цепи с учетом (4) (Рис. 03) и правил вычисления батарей резисторов

$$R_4 = R + \frac{2R\cdot R_3}{2R+R_3} = R + \frac{2R\cdot\frac{43}{21}R}{2R+\frac{43}{21}R} = \left(1+\frac{86}{85}\right)R = \frac{171}{85}R = 2\frac{1}{85}R\ . \tag{6}$$

Тогда

$$\varepsilon_3 = \frac{R_3 - R_4}{R_3} = \frac{\frac{43}{21}-\frac{171}{85}}{\frac{43}{21}} = \frac{64}{3655} = 1{,}8\ \%\ , \tag{7}$$

т.е. осталось совсем немного, поскольку погрешность оценки близка к одному проценту.

На четвертом шаге ($n = 4$) нам потребуется также вычислить R_5 (с учетом (6))

$$R_5 = R + \frac{2R\cdot R_4}{2R+R_4} = R + \frac{2R\cdot\frac{171}{85}R}{2R+\frac{171}{85}R} = \left(1+\frac{342}{341}\right)R = \frac{683}{341}R = 2\frac{1}{341}R\ . \tag{8}$$

Соответственно, для ε_4 получим

$$\varepsilon_4 = \frac{R_4 - R_5}{R_4} = \frac{\frac{171}{85} - \frac{683}{341}}{\frac{171}{85}} = \frac{256}{58311} = 0{,}44\ \% \ . \tag{9}$$

Это победа! Таким образом, уже на четвертом шаге ($n = 4$) мы получили оценку R_∞^* с неплохой точностью (менее одного процента!)

$$R_\infty^* \approx R_n = R_4 = \frac{171}{85} R = 2\frac{1}{85} R = 2{,}012\ R\ . \tag{10}$$

Интересно, что на следующем (пятом) шаге (от школьников не требуется!) погрешность составит совсем малую величину (сотые доли процента!)

$$\varepsilon_5 = \frac{R_5 - R_6}{R_5} = \frac{\frac{683}{341} - \frac{2730}{1364}}{\frac{683}{341}} = \frac{1}{1366} = 0{,}073\ \% \ ,$$

так что результат $R_5 = \frac{683}{341} = 2\frac{1}{341} R = 2{,}00293R$ уже предельно близок к точному значению R_∞^*.

Анализируя полученные результаты R_n, делаем «осторожное предположение», что все они монотонно стремятся к значению $R_\infty^* = 2R$, поскольку по мере роста n целая часть дроби перестала меняться, а дробная часть продолжала уменьшаться. ☺

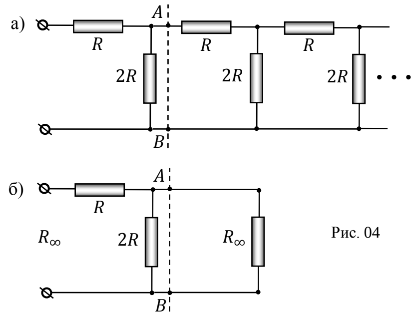


Рис. 04

1.2 «Линейная бесконечность» Для прямого расчета $R_\infty^* = R_\infty$ используется метод «отбрасывания одного звена» или, как шутят олимпиадники, «метод песчинки». (Если от кучи песка отнять песчинку, то все равно останется куча. Если от бесконечности отнять единицу, то останется бесконечность. ☺)

Отсечем от схемы первое звено по линии AB (Рис. 04, а)). Электрическая цепь правее линии AB по-прежнему содержит бесконечное число повторяющихся звеньев («принцип песчинки»), т.е. её сопротивление будет равно R_∞. Следовательно, схему можно перечертить так, как показано на Рис. 04, б). Тогда по правилам расчета электрических сопротивлений получаем

$$R_\infty = R + \frac{2R \cdot R_\infty}{2R + R_\infty}\ . \tag{11}$$

Из (11) после преобразований получаем квадратное уравнение относительно R_∞

$$R_\infty^2 - R_\infty R - 2R^2 = 0\ , \tag{12}$$

решения которого имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\infty 1} &= \frac{R + \sqrt{9R^2}}{2} = 2R \\ R_{\infty 2} &= \frac{R - \sqrt{9R^2}}{2} = -R \end{aligned}\ . \tag{13}$$

Второй (отрицательный) корень отбрасываем, поскольку он не имеет физического смысла – сопротивление по определению положительно. Таким образом, сопротивление данной бесконечной цепочки действительно конечно и равно

$$R_\infty^* = 2R. \tag{14}$$

Если вдуматься, то ничего удивительного здесь нет, поскольку последовательное соединение большого числа резисторов увеличивает сопротивление цепи (до бесконечности), а параллельное – уменьшает (до нуля). Вот и получилась у них «боевая ничья». ☺

1.3 «Плоская бесконечность» При параллельном соединении двух одинаковых резисторов их общее сопротивление уменьшается в два раза, а при последовательном – увеличивается в такое же количество раз.

Удачно комбинируя такие соединения, можно собрать схему с указанными в условии свойствами, т.е. получить «постоянное» сопротивление плоской бесконечной цепи при добавлении следующего звена.

Один из возможных вариантов представлен на Рис. 05.

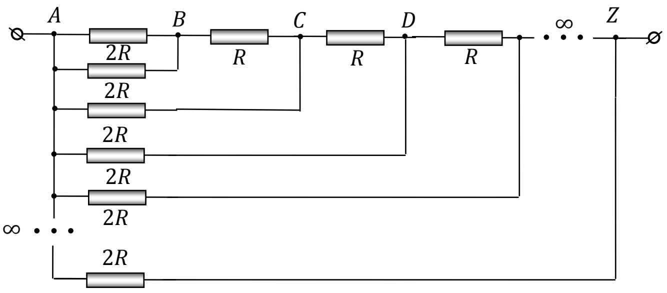


Рис. 05

Понятно, что сопротивление такой бесконечной цепи на плоскости просто равно сопротивлению ее первого звена

$$R_{\infty}^{**} = R_{AZ} = R_{AB} = R. \quad (15)$$