

Шаг за шагом ...

Условие

Задание 9-3. Конечная бесконечность

1.1 «Шаг за шагом ...» Рассмотрим линейную электрическую цепь из резисторов R и $2R$, составленную из одинаковых повторяющихся звеньев (Рис. 1).

Интересно, что сопротивление R_∞^* такой цепи будет конечным даже при бесконечном числе звеньев ($n \rightarrow \infty$).

Пусть R_n – сопротивление конечной линейной цепи при n ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$) звеньях. Назовем *относительной погрешностью оценки* R_∞^* величину $\varepsilon_n = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n}$, выраженную в процентах.

Найдите сопротивления одного звена R_1 данной цепи, её двух звеньев R_2 , а также относительную погрешность ε_1 оценки R_∞^* . Далее проделайте такую же процедуру с R_2 и R_3 , найдите ε_2 . Продолжайте данную процедуру шаг за шагом до тех пор, пока относительная погрешность ε_n оценки R_∞^* не станет меньше одного процента ($\varepsilon_n < 1,0\%$). При каком значении n это произошло? Чему равно R_n ?

1.2 «Линейная бесконечность» Найдите точное значение сопротивления R_∞^* всей бесконечной линейной цепочки (Рис. 1).

1.3 «Плоская бесконечность» Из резисторов R и $2R$ на плоскости собрана бесконечная электрическая цепь AZ (Рис. 2), некоторые части которой стерты (затонированы). Известно, что данная цепь обладает следующим свойством: сопротивление R_{AB} первого звена цепи равно сопротивлению R_{AC} её двух первых звеньев, которое, в свою очередь, равно сопротивлению R_{AD} первых трех звеньев цепи и т.д. (до бесконечности). Восстановите стертые (затонированные) участки цепи на рисунке. Найдите сопротивление $R_\infty^{**} = R_{AZ}$ восстановленной вами бесконечной плоской цепи.

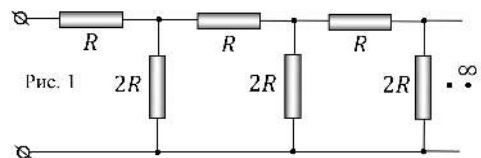


Рис. 1

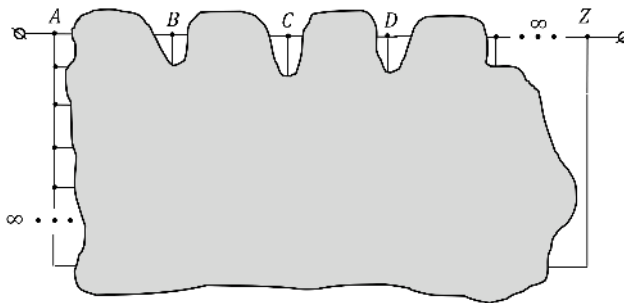


Рис. 2

9 класс. Теоретический тур. Вариант 1.

Решение

Задание 9-3. Конечная бесконечность

1.1 «Шаг за шагом ...» Рассмотрим линейную электрическую цепь из резисторов R и $2R$, составленную из одинаковых повторяющихся звеньев (Рис. 1).

Интересно, что сопротивление R_∞^* такой цепи будет конечным даже при бесконечном числе звеньев ($n \rightarrow \infty$).

Пусть R_n – сопротивление конечной линейной цепи при n ($n = 1, 2, 3, \dots, \infty$) звеньях. Назовем *относительной погрешностью оценки* R_∞^* величину $\varepsilon_n = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n}$, выраженную в процентах.

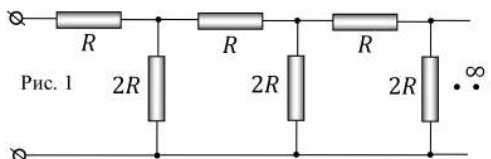


Рис. 1

Найдите сопротивления одного звена R_1 данной цепи, её двух звеньев R_2 , а также относительную погрешность ε_1 оценки R_∞^* . Далее сделайте такую же процедуру с R_2 и R_3 , найдите ε_2 . Продолжайте данную процедуру шаг за шагом до тех пор, пока относительная погрешность ε_n оценки R_∞^* не станет меньше одного процента ($\varepsilon_n < 1,0\%$). При каком значении n это произошло? Чему равно R_n ?

1.2 «Линейная бесконечность» Найдите точное значение сопротивления R_∞^* всей бесконечной линейной цепочки (Рис. 1).

1.3 «Плоская бесконечность» Из резисторов R и $2R$ на плоскости собрана бесконечная электрическая цепь AZ (Рис. 2), некоторые части которой стерты (затонированы). Известно, что данная цепь обладает следующим свойством: сопротивление R_{AB} первого звена цепи равно сопротивлению R_{AC} её двух первых звеньев, которое, в свою очередь, равно сопротивлению R_{AD} первых трех звеньев цепи и т.д. (до бесконечности). Восстановите стертые (затонированные) участки цепи на рисунке. Найдите сопротивление $R_\infty^{**} = R_{AZ}$ восстановленной вами бесконечной плоской цепи. Решение:

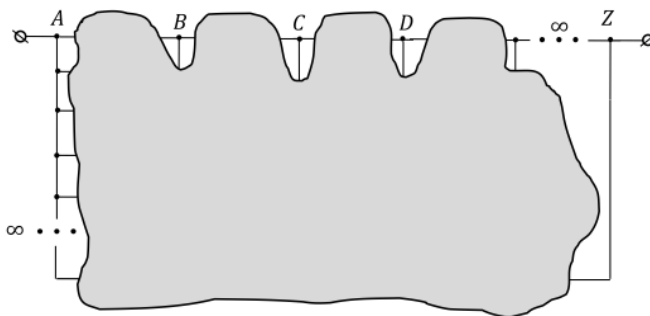
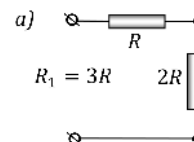
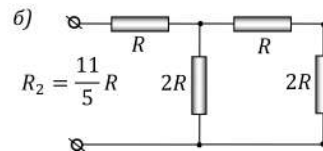


Рис. 2



Задание 9-3. «Конечная бесконечность»

1.1 «Шаг за шагом ...» Для реализации первого шага предложенного алгоритма найдем сопротивления одного звена R_1 (Рис. 01, а)) и двух звеньев R_2 (Рис. 01, б))



$$R_1 = R + 2R = 3R, \quad (1)$$

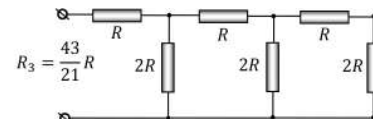
$$R_2 = R + \frac{2R \cdot R_1}{2R + R_1} = R + \frac{2R \cdot 3R}{2R + 3R} = \left(1 + \frac{6}{5}\right) R = \frac{11}{5} R = 2\frac{1}{5} R. \quad (2)$$

Тогда для первого шага ($n = 1$) в рамках предложенной схемы оценки R_∞^* относительная погрешность равна

$$\varepsilon_1 = \frac{R_1 - R_2}{R_1} = \frac{3 - \frac{11}{5}}{3} = \frac{4}{15} = 27\% . \quad (3)$$

Поскольку ε_1 существенно больше одного процента $\varepsilon_1 \gg 1\%$, то продолжим процедуру далее.

Для второго шага ($n = 2$) вычислим сопротивление трех звеньев цепи (Рис. 02) с учетом того, что сопротивление двух звеньев R_2 мы уже знаем

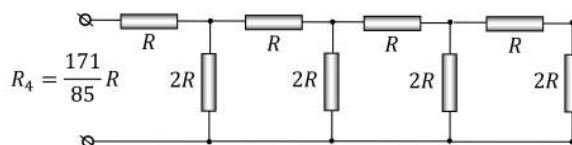


$$R_3 = R + \frac{2R \cdot R_2}{2R + R_2} = R + \frac{2R \cdot \frac{11R}{5}}{2R + \frac{11R}{5}} = \left(1 + \frac{22}{21}\right) R = \frac{43}{21} R = 2\frac{1}{21} R, \quad (4)$$

Следовательно

$$\varepsilon_2 = \frac{R_2 - R_3}{R_2} = \frac{\frac{11}{5} - \frac{43}{21}}{\frac{11}{5}} = \frac{16}{231} = 6,9\% . \quad (5)$$

Хотя тенденция и наметилась, но продолжаем процедуру далее, поскольку $\varepsilon_2 > 1\%$. Для третьего ($n = 3$) шага вычислим сопротивление R_4 четырех звеньев цепи с учетом (4) (Рис. 03) и правил вычисления батарей резисторов



$$R_4 = R + \frac{2R \cdot R_3}{2R + R_3} = R + \frac{2R \cdot \frac{43}{21} R}{2R + \frac{43}{21} R} = \left(1 + \frac{86}{85}\right) R = \frac{171}{85} R = 2\frac{1}{85} R. \quad (6)$$

Тогда

$$\varepsilon_3 = \frac{R_3 - R_4}{R_3} = \frac{\frac{43}{21} - \frac{171}{85}}{\frac{43}{21}} = \frac{64}{3655} = 1,8\% , \quad (7)$$

т.е. осталось совсем немного, поскольку погрешность оценки близка к одному проценту. На четвертом шаге ($n = 4$) нам потребуется также вычислить R_5 (с учетом (6))

$$R_5 = R + \frac{2R \cdot R_4}{2R + R_4} = R + \frac{2R \cdot \frac{171}{85} R}{2R + \frac{171}{85} R} = \left(1 + \frac{342}{341}\right) R = \frac{683}{341} R = 2\frac{1}{341} R. \quad (8)$$

Соответственно, для ε_4 получим

$$\varepsilon_4 = \frac{R_4 - R_5}{R_4} = \frac{\frac{171}{85} - \frac{683}{341}}{\frac{171}{85}} = \frac{256}{58311} = 0,44\% . \quad (9)$$

Это победа! Таким образом, уже на четвертом шаге ($n = 4$) мы получили оценку R_∞^* с неплохой точностью (менее одного процента!)

$$R_{\infty}^* \approx R_n = R_4 = \frac{171}{85}R = 2\frac{1}{85}R = 2,012 R . \quad (10)$$

Интересно, что на следующем (пятом) шаге (от школьников не требуется!) погрешность составит совсем малую величину (сотые доли процента!)

$$\varepsilon_5 = \frac{R_5 - R_6}{R_5} = \frac{\frac{683}{341} - \frac{2730}{1364}}{\frac{683}{341}} = \frac{1}{1366} = 0,073\% ,$$

так что результат $R_5 = \frac{683}{341}R = 2\frac{1}{341}R = 2,00293R$ уже предельно близок к точному значению R_{∞}^* .

Анализируя полученные результаты R_n , делаем «осторожное предположение», что все они монотонно стремятся к значению $R_{\infty}^* = 2R$, поскольку по мере роста n целая часть дроби перестала меняться, а дробная часть продолжала уменьшаться. :)

1.2 «Линейная бесконечность» Для прямого расчета $R_{\infty}^* = R_{\infty}$ используется метод «отбрасывания одного звена» или, как шутят олимпиадники, «метод песчинки». (Если от кучи песка отнять песчинку, то все равно останется куча. Если от бесконечности отнять единицу, то останется бесконечность. :))

Отсечем от схемы первое звено по линии AB (Рис. 04, а)). Электрическая цепь правее линии AB по-прежнему содержит бесконечное число повторяющихся звеньев («принцип песчинки»), т.е. её сопротивление будет равно R_{∞} . Следовательно, схему можно перерисовать так, как показано на Рис. 04, б). Тогда по правилам расчета электрических сопротивлений получаем

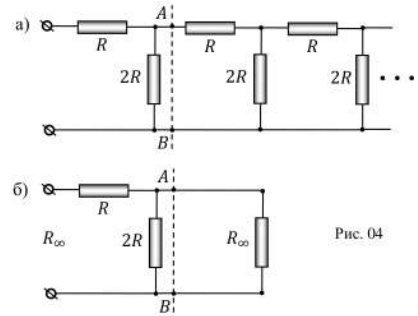


Рис. 04

$$R_{\infty} = R + \frac{2R \cdot R_{\infty}}{2R + R_{\infty}} . \quad (11)$$

Из (11) после преобразований получаем квадратное уравнение относительно R_{∞}

$$R_{\infty}^2 - R_{\infty}R - 2R^2 = 0 , \quad (12)$$

решения которого имеют вид

$$\begin{aligned} R_{\infty 1} &= \frac{R + \sqrt{9R^2}}{2} = 2R \\ R_{\infty 2} &= \frac{R - \sqrt{9R^2}}{2} = -R \end{aligned} . \quad (13)$$

Второй (отрицательный) корень отбрасываем, поскольку он не имеет физического смысла – сопротивление по определению положительно. Таким образом, сопротивление данной бесконечной цепочки действительно конечно и равно

$$R_{\infty}^* = 2R. \quad (14)$$

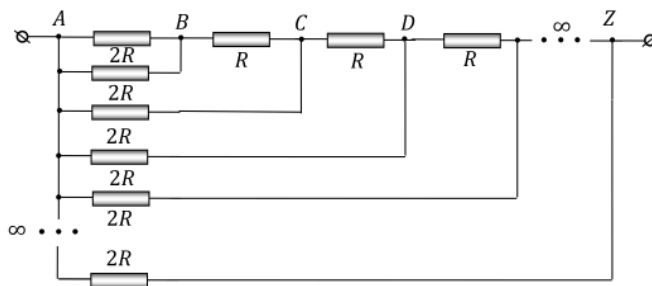
Если вдуматься, то ничего удивительного здесь нет, поскольку последовательное соединение большого числа резисторов увеличивает сопротивление цепи (до бесконечности), а параллельное – уменьшает (до нуля). Вот и получилась у них «боевая ничья». :)

1.3 «Плоская бесконечность» При параллельном соединении двух одинаковых резисторов их общее сопротивление уменьшается в два раза, а при последовательном – увеличивается в такое же количество раз.

Удачно комбинируя такие соединения, можно собрать схему с указанными в условии свойствами, т.е. получить «постоянное» сопротивление плоской бесконечной цепи при добавлении следующего звена.

Один из возможных вариантов представлен на Рис. 05.

Понятно, что сопротивление такой бесконечной цепи на плоскости просто равно сопротивлению ее первого звена



$$R_{\infty}^{**} = R_{AZ} = R_{AB} = R. \quad (15)$$