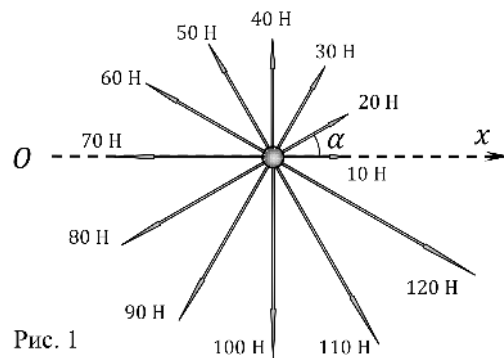


маленькая

Условие

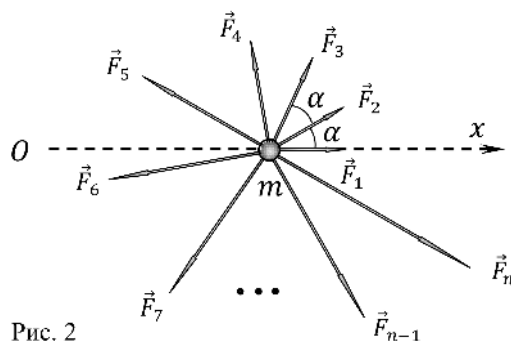
Задание 9-1. Прогрессивная динамика



В данном задании действие силы тяжести не учитывать. Внимание! Рисунки носят качественный характер: реальные пропорции сил на них не соблюдены.

1.1 На материальную точку массой $m = 23,2$ кг действуют двенадцать сил (Рис. 1), расположенных в одной плоскости, самая «маленькая» из которых равна $F_1 = 10$ Н и направлена вдоль оси Ox . Известно, что каждая следующая сила больше предыдущей на $\Delta F = 10$ Н и повернута на угол $\alpha = 30^\circ$ (см. Рис. 1). Найдите ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки.

1.2 Рассмотрим общий случай. Пусть на материальную точку массой m (Рис. 2) действует система из n сил ($\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \dots; \vec{F}_{n-1}; \vec{F}_n$), расположенных в одной плоскости на одинаковом угловом расстоянии $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг от друга. Известно, что модуль F_{i+1} каждой следующей силы больше модуля F_i предыдущей на ΔF . Найдите ускорение $\vec{a}_2$ материальной точки.



1.3 Используя общее выражение, полученное для $\vec{a}_2$ в предыдущем пункте, вычислите ускорение $\vec{a}_1$ для первого пункта задачи.

9 класс. Теоретический тур. Вариант 1.

Решение

Задание 9-1. Прогрессивная динамика

В данном задании действие силы тяжести не учитывать. Внимание! Рисунки носят качественный характер: реальные пропорции сил на них не соблюдены.

1.1 На материальную точку массой $m = 23,2$ кг действуют двенадцать сил (Рис. 1), расположенных в одной плоскости, самая «маленькая» из которых равна $F_1 = 10$ Н и направлена вдоль оси Ox . Известно, что каждая следующая сила больше предыдущей на $\Delta F = 10$ Н и повернута на угол $\alpha = 30^\circ$ (см. Рис. 1). Найдите ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки.

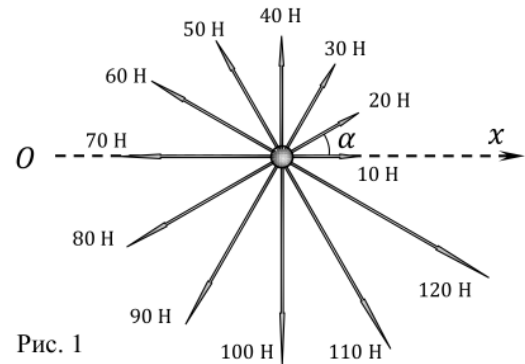


Рис. 1

1.2 Рассмотрим общий случай. Пусть на материальную точку массой m (Рис. 2) действует система из n сил $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3; \dots; \vec{F}_{n-1}; \vec{F}_n)$, расположенных в одной плоскости на одинаковом угловом расстоянии $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг от друга. Известно, что модуль F_{i+1} каждой следующей силы больше модуля F_i предыдущей на ΔF . Найдите ускорение $\vec{a}_2$ материальной точки.

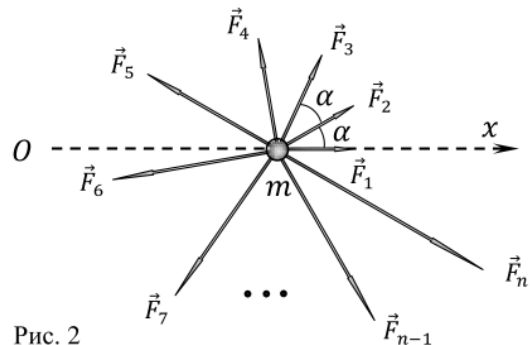


Рис. 2

1.3 Используя общее выражение, полученное для $\vec{a}_2$ в предыдущем пункте, вычислите ускорение $\vec{a}_1$ для первого пункта задачи.

Решение:

Задание 9-1. Прогрессивная динамика

1.1 Прямой метод решения предполагает нахождение проекции каждой силы на соответствующую ось и дальнейшее суммирование проекций по каждой из осей.

Однако задачу можно решить проще (и короче!) если заметить, что в данной системе разность противоположных по направлению сил (70 Н и 10 Н, 80 Н и 20 Н и т.д.) попарно остается постоянной и равной $F_0 = 60$ Н.

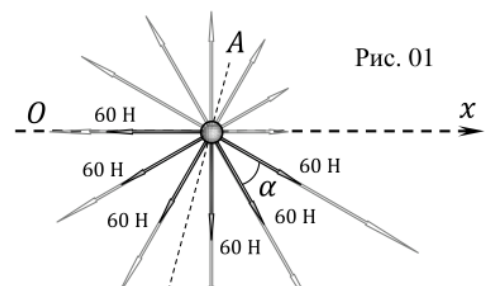


Рис. 01

Это обстоятельство позволяет упростить систему до шести симметричных сил с модулем F_0 (Рис. 01), сумма которых будет направлена вдоль оси симметрии AB и равна

$$F = 2F_0(\cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ). \quad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона, ускорение $\vec{a}_1$ материальной точки будет также направлено вдоль прямой AB (под углом $\beta = 105^\circ$ к оси Ox) и равно

$$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{2F_0(\cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ)}{m}. \quad (2)$$

Расчет по (2) с точностью до двух значащих цифр дает

$$a_1 = \frac{2 \cdot 60 \cdot (\cos 15^\circ + \cos 45^\circ + \cos 75^\circ)}{23,2} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \{9,992336134\}^1 = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) \quad (3)$$

Интересно, что значение (3) для a_1 «совпало» со значением g , используемом на централизованном тестировании ($\odot$), хотя в этом задании мы его не учитывали

$$a_1 = g_{\text{цт}} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

1.2 По определению равнодействующая $\vec{F}$ равна сумме всех сил, действующих на материальную точку

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_{n-1} + \vec{F}_n. \quad (4)$$

Заметим, что модули сил, действующих на материальную точку, образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Следовательно, для модуля силы F_n справедлива формула

$$F_n = F_1 + (n - 1)\Delta F. \quad (5)$$

Кроме того, при арифметической прогрессии для любых соседних членов F_{i+1} и F_i выполняется равенство

$$F_{i+1} - F_i = \Delta F = \text{const}. \quad (6)$$

Для практического использования свойства (6) на векторной диаграмме выполним три шага (Рис. 02). Шаг первый: поменяем направление каждого вектора $\vec{F}_i$ на противоположное (т.е. умножим каждый вектор на (-1) , при этом он поворачивается на 180°).

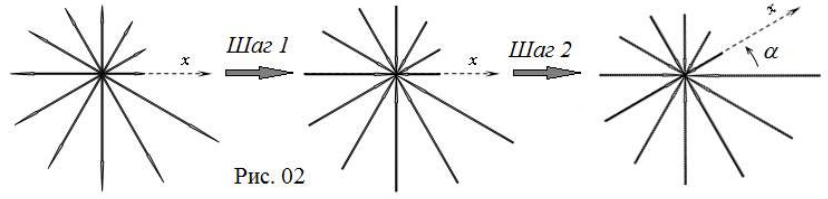


Рис. 02

Шаг второй: повернём обращенную систему сил как целое на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ против часовой стрелки (См. Рис. 02).

¹ — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

Шаг третий: наложим полученную после двух шагов систему сил на исходную систему сил так, чтобы их центры совпали. При этом вектор $(-\vec{F}_1)$ попадет на вектор $\vec{F}_2$, вектор $(-\vec{F}_2)$ попадет на вектор $\vec{F}_3$ и т.д., а вот вектор $(-\vec{F}_n)$ попадет на начальный вектор $\vec{F}_1$.

Из (6) следует, что после суммирования наложенных векторов получится система из $(n-1)$ равных по модулю векторов ΔF , повернутых на угол α друг относительно друга, и вектор $(F_1 - F_n)$, параллельный оси Ox (Рис. 03). Вектор $(F_1 - F_n)$ можно представить как

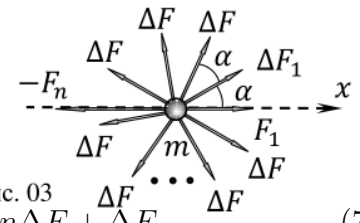


Рис. 03

$$F_1 - F_n = F_1 - (F_1 + (n-1)\Delta F) = -(n-1)\Delta F = -n\Delta F + \Delta F. \quad (7)$$

По правилу многоугольника теперь сумма n одинаковых по модулю векторов ΔF , повернутых на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ друг относительно друга, равна нулю. Следовательно, согласно (7), после наложения двух систем «останется» только вектор $-n\Delta F$, направленный против оси Ox .

Изобразим на векторной диаграмме (Рис. 04) все сказанное: отложим вектор $\vec{F}$, далее $(-\vec{F})$ после первого шага, далее $\vec{F}^*$ после второго шага. Их сумма (третий шаг) должна давать вектор $(-n\Delta F)$, отмеченный пунктиром.

По правилу сложения векторов получаем равнобедренный векторный треугольник (см. Рис. 04), из которого можем записать

$$n\Delta F = 2F \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \implies F = \frac{n\Delta F}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (8)$$

где F – модуль равнодействующей силы.

Интересно, что модуль F равнодействующей не зависит от F_1 , а определяется только разностью ΔF арифметической прогрессии и количеством n ее членов. Это и понятно, по тому же правилу многоугольника векторная сумма всех членов F_1 равна нулю.

Напомним, что для задания вектора $\vec{F}$ помимо модуля (8) необходимо также обязательно определить и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол β , образованный искомым вектором $\vec{F}$ с осью Ox , (см. Рис. 04).

Из равнобедренного треугольника сил, учитывая, что $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ и углы при основании равны, найдем

$$\beta = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} = \frac{n+2}{2n} \pi . \quad (9)$$

Выражения (8) и (9) полностью задают искомый вектор $\vec{F}$, приложенный к материальной точке (где $n \geq 2$).

Для модуля ускорения a_2 материальной точки окончательно получаем

$$a_2 = \frac{F}{m} = \frac{n\Delta F}{2m \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} , \quad (10)$$

причем вектор $\vec{a}_2$ будет направлен под углом

$$\beta = \frac{n+2}{2n} \pi \quad (11)$$

к оси Ox ($n \geq 2$).

1.3 Для вычислений с использованием (10) и (11) из условия задачи найдем необходимые параметры: $n = 12$; $\Delta F = 10$ Н . После подстановки получаем

$$a_1 = \frac{12 \cdot 10}{2 \cdot 23,2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) = \{9,992336134\} = 10 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right) , \quad (12)$$

$$\beta = \frac{12+2}{2 \cdot 12} \pi = \frac{7}{12} \pi = 105^\circ . \quad (13)$$

Сравнивая (12) и (13) с (2) и (3), не только испытываешь чувство удовлетворения (физика – наука точная!), но и понимаешь, насколько труднее получить общее решение по сравнению с частным, отдельным случаем. Но это всегда гораздо престижнее... :)

