

-3. Прогрессивная электростатика

Условие

Задание 11-3. Прогрессивная электростатика

В современной физике широко распространены различные векторные методы решения прикладных задач. Наглядность и простота векторной алгебры, векторных диаграмм позволяют эффективно и эффективно справляться с задачами различной степени сложности.

В качестве примера рассмотрим электростатическую систему из n одинаковых маленьких положительно заряженных шариков, расположенных в вакууме в вершинах правильного n – угольника (Рис. 1).

Расстояние от центра O правильного многоугольника до любой из его вершин равно R .

Угол α между соседними радиусами, проведенными из точки O к любым соседним вершинами правильного n – угольника, обозначим через α (см. Рис. 1).

Величины электрических зарядов (q_i) шариков занумеруем по часовой стрелке в том же порядке, что и шарика ($q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$) (см. Рис. 1).

Далее будем рассматривать различные варианты прогрессий, которые образуют электрические заряды (q_i) шариков и напряженности $\vec{E}_i$ электростатических полей, создаваемых ими в центре O правильного многоугольника.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $R = 1,52$ м, $q_0 = 151$ нКл, $\pi = 3,14$.

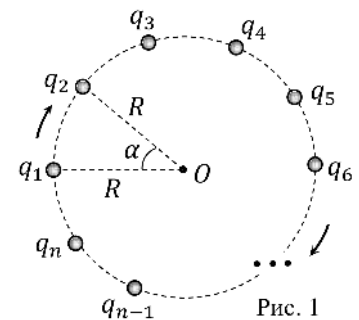


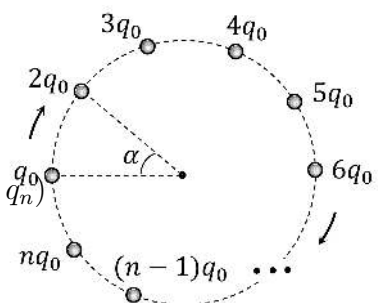
Рис. 1

Часть 1. Арифметическая электростатика

1.1 Пусть в вершинах правильного n – угольника находятся одинаковые заряды q_0 , т.е. все $q_i = q_0$. Методом «мысленного поворота» найдите напряженность $\vec{E}_1$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

1.2 Пусть теперь электрические заряды шариков ($q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$) образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = q_1 = q_0$ и разностью $d = q_0$ (Рис. 2). Получите формулу для напряженности $\vec{E}_2$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

1.3 Вычислите $\vec{E}_2$ для правильного многоугольника, у которого вектор $\vec{E}_2$ «нацелен» на третью вершину, в которой находится заряд $3q_0$.



Часть 2. Геометрическая электростатика

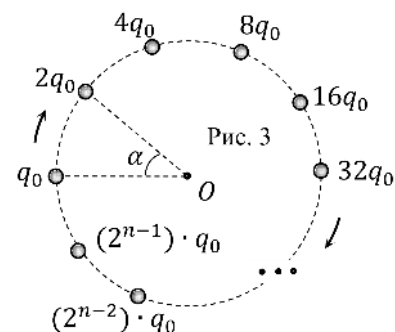
В этой части задачи величины электрических зарядов $(q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n)$ шариков в вершинах правильного n – угольника образуют геометрическую прогрессию (Рис. 3) с первым членом $b_1 = q_1 = q_0$ и знаменателем $q = 2$.

2.1 Найдите напряженность $\vec{E}_0$ электростатического поля, создаваемого первым (наименьшим) зарядом $q_1 = q_0$ в центре O правильного многоугольника.

2.2 Выведите формулу для напряженности $\vec{E}_3$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

11 класс. Теоретический тур. Вариант I.

2.3 Вычислите $\vec{E}_3$ для правильного многоугольника, у которого вектор $\vec{E}_3$ перпендикулярен вектору $\vec{E}_0$.



Решение

Задание 11-3. Прогрессивная электростатика

В современной физике широко распространены различные векторные методы решения прикладных задач. Наглядность и простота векторной алгебры, векторных диаграмм позволяют эффективно и эффективно справляться с задачами различной степени сложности.

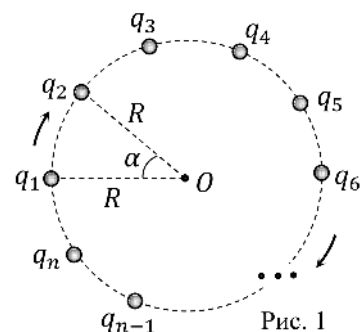
В качестве примера рассмотрим электростатическую систему из n одинаковых маленьких положительно заряженных шариков, расположенных в вакууме в вершинах правильного n – угольника (Рис. 1).

Расстояние от центра O правильного многоугольника до любой из его вершин равно R .

Угол α между соседними радиусами, проведенными из точки O к любым соседним вершинам правильного n – угольника, обозначим через α (см. Рис. 1).

Величины электрических зарядов (q_i) шариков занумеруем по часовой стрелке в том же порядке, что и шарики $(q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n)$ (см. Рис. 1).

Далее будем рассматривать различные варианты прогрессий, которые образуют электрические заряды (q_i) шариков и напряженности $\vec{E}_i$ электростатических полей, создаваемых ими в центре O правильного многоугольника.



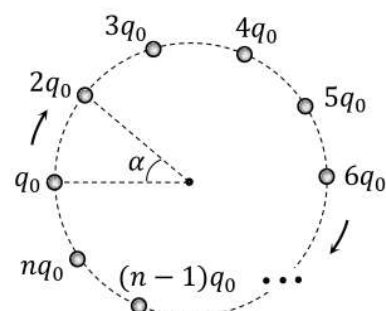
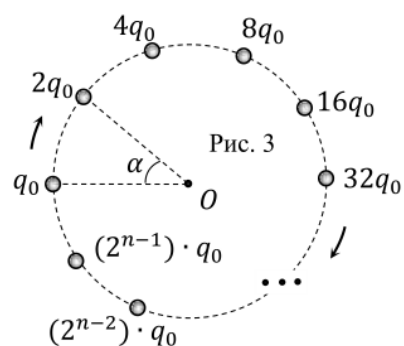
Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, $R = 1,52$ м, $q_0 = 151$ нКл, $\pi = 3,14$.

Часть 1. Арифметическая электростатика

1.1 Пусть в вершинах правильного n – угольника находятся одинаковые заряды q_0 , т.е. все $q_i = q_0$. Методом «мысленного поворота» найдите напряженность $\vec{E}_1$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

1.2 Пусть теперь электрические заряды шариков ($q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$) образуют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = q_1 = q_0$ и разностью $d = q_0$ (Рис. 2). Получите формулу для напряженности $\vec{E}_2$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

1.3 Вычислите $\vec{E}_2$ для правильного многоугольника, у которого вектор $\vec{E}_2$ «нацелен» на третью вершину, в которой находится заряд $3q_0$.



Часть 2. Геометрическая электростатика

В этой части задачи величины электрических зарядов ($q_1; q_2; q_3; \dots; q_{n-1}; q_n$) шариков в вершинах правильного n – угольника образуют геометрическую прогрессию (Рис. 3) с первым членом $b_1 = q_1 = q_0$ и знаменателем $q = 2$.

2.4 Найдите напряженность $\vec{E}_0$ электростатического поля, создаваемого первым (наименьшим) зарядом $q_1 = q_0$ в центре O правильного многоугольника.

2.5 Выведите формулу для напряженности $\vec{E}_3$ электростатического поля, создаваемого всеми зарядами, в центре O правильного многоугольника.

2.6 Вычислите $\vec{E}_3$ для правильного многоугольника, у которого вектор $\vec{E}_3$ перпендикулярен вектору $\vec{E}_0$.

Возможное решение:

Часть 1. Арифметическая электростатика

1.1 Суть метода «мысленного поворота» фактически полностью «изложена» в его названии: рассмотрим поворот всей системы одинаковых зарядов «как целого» (Рис. 01) в любом направлении (например, по часовой стрелке) на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ (или кратный ему).

Поскольку электростатическое поле является центральным, то вектор напряженности точечного заряда всегда направлен вдоль прямой, проходящей через данный заряд.

Это значит, что искомый вектор напряженности $\vec{E}_1$ системы тоже «жёстко связан» с рассматриваемой системой зарядов. Следовательно, при повороте системы зарядов он также повернётся в плоскости рисунка на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.

Таким образом, при подобном «мысленном повороте» вектор напряженности поля поменяет свое направление, т.е. вектор $\vec{E}_1$ изменится.

Но с другой стороны, в силу симметрии данной системы зарядов, при таком повороте каждый заряд «перейдет» в соседний, т.е. с точки зрения «стороннего наблюдателя» в системе ничего не изменится (!), поскольку все заряды одинаковые. Следовательно, вектор $\vec{E}_1$ при таком повороте не изменится!

Мы пришли к логическому противоречию, следовательно, что-то предположили неверно. На самом деле данное противоречие возникло лишь потому, что обычно у вектора есть длина, и «по умолчанию» мы считали его ненулевым, т.е.

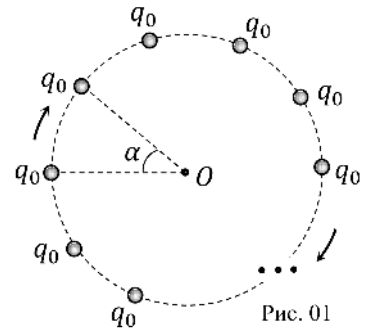


Рис. 01

$$\vec{E}_1 \neq \vec{0}. \quad (1)$$

«Разрешить» полученное противоречие можно только предположив обратное, что

$$\vec{E}_1 = \vec{0}. \quad (2)$$

Иными словами, можно считать, что нулевой вектор направлен «куда угодно», поскольку его модуль равен нулю. Говоря более строго, с нулевым вектором не связывают никакого направления в пространстве, т.е. он сонаправлен (и перпендикулярен!) любому ненулевому вектору.

Таким образом, при одинаковых зарядах в вершинах произвольного правильного многоугольника напряженность $\vec{E}_1$ электростатического поля в его центре O равна нулю.

Заметим, что и другие методы (например, суммирование векторов по правилу многоугольника) приводят к такому же результату (2), но именно метод «мысленного поворота» содержит неявную подсказку нашим юным олимпийцам для выполнения следующего пункта задачи.

1.2 Поскольку шарики маленькие, то будем считать заряды (q_i) точечными. Как следует из закона Кулона, напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q_i в точке пространства с радиус-вектором $\vec{r}_i$

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}. \quad (3)$$

Согласно (3), поле пропорционально заряду, т.е. больший заряд даёт больший вклад в результирующее (суммарное) поле. Это значит, что вклад последних (больших) зарядов арифметической прогрессии в общее поле будет наиболее значительным.

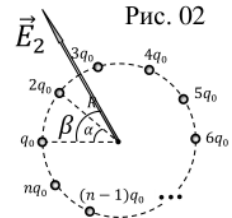
Для нахождения напряжённости $\vec{E}_2$ электростатического поля, создаваемого системой точечных зарядов в центре многоугольника, по принципу суперпозиции полей необходимо просуммировать напряжённости полей от каждого из зарядов системы

$$\vec{E}_2 = \sum_i \vec{E}_i = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_{n-1} + \vec{E}_n, \quad (4)$$

где индекс суммирования i меняется «по всем зарядам» арифметической прогрессии от единицы до n .

В отличие от предыдущего пункта задачи сумма (4) уже не будет равна нулю ($\vec{E}_2 \neq \vec{0}$), поскольку теперь векторы $\vec{E}_i$ будут иметь «различную длину» из-за возрастания зарядов в вершинах многоугольника.

Иными словами искомый вектор $\vec{E}_2$ (Рис. 02) обязательно будет иметь и модуль E_2 , и некоторое направление в плоскости рисунка, которое можно задать, например, углом β , образуемым данным вектором с «нижним» радиусом.

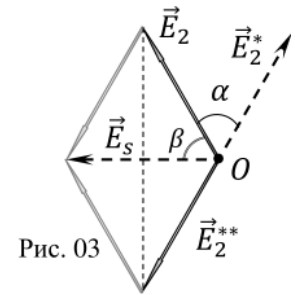


Как известно, при арифметической прогрессии каждый следующий член больше предыдущего на одну и ту же величину, соответственно, разность между ними остаётся постоянной. Это соображение и положим в основу модернизированного «метода поворота» для вычисления $\vec{E}_2$.

Вынесем вектор $\vec{E}_2$ на отдельную векторную диаграмму (Рис. 03). Мысленно повернём систему зарядов на угол α по часовой стрелке вокруг точки O — при этом вектор $\vec{E}_2$ на диаграмме также повернётся на угол α в том же направлении и перейдёт в положение $\vec{E}_2^*$, отмеченное пунктиром (см. Рис. 03).

Если же теперь поменять знаки всех зарядов (сделать их отрицательными), то вектор $\vec{E}_2^*$, согласно (3), также поменяет своё направление на противоположное (повернётся на угол 180° и перейдёт в положение $\vec{E}_2^{**}$ на векторной диаграмме (см. Рис. 03)). Понятно, что при таких преобразованиях модули векторов $\vec{E}_2^*$ и $\vec{E}_2^{**}$ останутся равными модулю искомого вектора $\vec{E}_2$

$$E_2 = E_2^* = E_2^{**}. \quad (5)$$



Далее наложим систему «повёрнутых и изменённых» зарядов на исходную систему зарядов. Тогда в центре O многоугольника, согласно принципу суперпозиции полей, суммарная напряжённость $\vec{E}_s$ электростатического поля (см. Рис. 03) будет равна сумме двух векторов

$$\vec{E}_s = \vec{E}_2 + \vec{E}_2^{**}. \quad (6)$$

Однако, с другой стороны (Рис. 04), при такой процедуре во всех точках (за исключением первой!) по

правилам арифметической прогрессии останется только «по одному» заряду q_0 .

В первой же точке системы окажется суммарный заряд $(1 - n)q_0$, который является «совокупностью» зарядов q_0 (старого) и $(-nq_0)$, «пришедшего» в эту точку при повороте.

Таким образом, в полученной «наложенной» системе (см. Рис. 04) во всех вершинах многоугольника теперь находится по заряду q_0 (согласно пункту 1.1 поле такой системы равно нулю), и в первой точке «появился» заряд $(-nq_0)$.

Следовательно, суммарное поле $\vec{E}_s$ такой «наложенной» системы зарядов в центре O многоугольника совпадает с полем отрицательного заряда $(-nq_0)$, находящегося в первой точке цепочки, т.е.

$$E_s = \frac{nq_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (7)$$

С другой стороны из равнобедренного треугольника напряженностей (см. Рис. 03) получим

$$E_s = 2E_2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow E_2 = \frac{E_s}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (8)$$

Из (7) и (8) получаем искомое значение

$$E_2 = \frac{nq_0}{8\pi\epsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{nq_0}{8\pi\epsilon_0 R^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{n}{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} E_0, \quad (9)$$

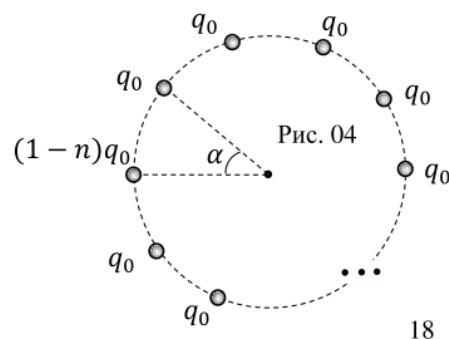
где $E_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ есть напряженность поля, создаваемого в центре многоугольника первым (наименьшим) зарядом.

Для задания вектора $\vec{E}_2$ помимо его модуля (9) необходимо определить также и его направление в плоскости рисунка. На практике для этого достаточно найти угол, образуемый данным вектором с какой либо осью или отрезком.

В нашем случае удобно найти угол β , образованный искомым вектором $\vec{E}_2$ с радиусом, проведенным из центра O многоугольника к первому заряду (см. Рис. 03).

Из равнобедренного треугольника напряженностей, учитывая равенство углов при основании, найдем

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{n-2}{2n} \pi. \quad (10)$$



Выражения (9) и (10) полностью задают искомый вектор $\vec{E}_2$, приложенный в точке O (центре правильного n -угольника, где $n \geq 2$).

Интересно, что при $n = 2$ «правильный многоугольник» представляет собой два заряда q_0 и $2q_0$, находящиеся на концах диаметра окружности (т.е. с точки зрения математики его «не существует», т.к. класс правильных многоугольников начинается с правильного треугольника ($n = 3$)). Но, несмотря на это, формулы (9) и (10) дают правильные физические результаты ($E_2 = E_0$, $\beta = 0$)!

1.3 Для вычислений с использованием (9) и (10) необходимо знать количество вершин n правильного многоугольника.

Из Рис. 02 следует, что для того, чтобы вектор $\vec{E}_2$ проходил (был «нацелен») через третью вершину многоугольника, угол φ должен удовлетворять условию

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \frac{n-2}{2n}\pi = 2\frac{2\pi}{n} \Rightarrow n = 10. \quad (11)$$

Следовательно, искомый правильный многоугольник является правильным десятиугольником ($n = 10$). В таком случае

$$\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} = 0,628 \text{ рад} = 36,0^\circ. \quad (12)$$

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_2 = \frac{10 \cdot 151 \times 10^{-9}}{8 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \times 10^{-12} (1,52)^2 \times \sin\left(\frac{6,28}{10}\right)} \frac{\text{В}}{\text{м}} = \{5003,785076\}^1 = 5,00 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}} = 5,00 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}, \quad (13)$$

$$\beta = \frac{10-2}{2 \cdot 10}\pi = \frac{2\pi}{5} = 1,26 \text{ рад} = 72,0^\circ. \quad (14)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).

Часть 2. Геометрическая электростатика

2.1 Из-за малости заряженных шариков можно считать все заряды в вершинах многоугольника точечными.

Как следует из закона Кулона, первый заряд цепочки $q_1 = q_0$ создает в центре O многоугольника напряженность электростатического поля

$$E_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \{587,972293\} = 588 \frac{\text{В}}{\text{м}}, \quad (15)$$

причем вектор $\vec{E}_0$ направлен вдоль радиуса описанной окружности от заряда q_1 к центру O многоугольника (Рис. 05).

2.2 Как известно, при геометрической прогрессии каждый ее следующий член больше предыдущего члена в одно и то же число раз. Соответственно, если умножить все члены геометрической прогрессии на ее знаменатель q , то ее первый член b_1 перейдет во второй b_2 , второй b_2 – в третий b_3 и т.д. При этом вся цепочка «сдвинется» на один шаг влево (Рис. 05).

Это соображение и положим в основу следующего модернизированного «метода поворота» для вычисления напряжённости $\vec{E}_3$ электростатического поля, создаваемого данной системой электрических зарядов.

Умножим все заряды системы на 2 (т.е. на знаменатель q геометрической прогрессии) и повернем систему на угол $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ так, чтобы каждый заряд «перешел» в соседнюю позицию (Рис. 06).

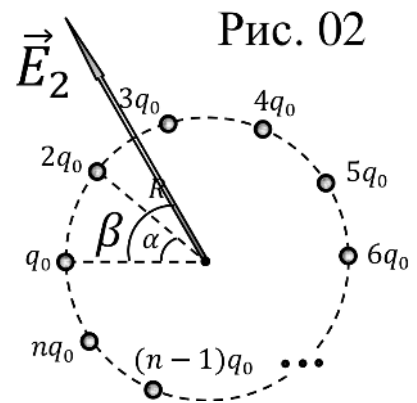


Рис. 02

$\vec{E}_3^*$ ее новой
ал $2E_3$) и также
о положения, что

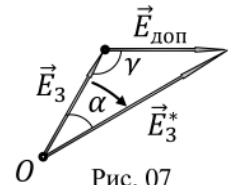


Рис. 07

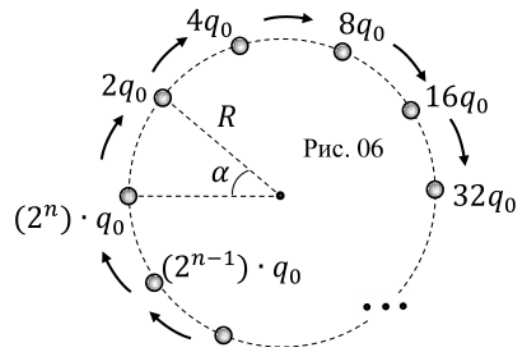


Рис. 06

Понятно, что после такого «искусственного» преобразования и поворота системы зарядов вектор $\vec{E}_3^*$ ее новой напряженности поля также удвоился по модулю (стал $2E_3$) и также повернулся на угол α относительно своего начального положения, что удобно изобразить на векторной диаграмме (Рис. 07).

— ¹ — здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

С другой стороны, как следует из Рис. 06, «сторонний наблюдатель» отметит, что после такой операции все заряды (за исключением первого) не изменились и «остались на своих местах». Только в первой вершине правильного многоугольника «исчез» заряд q_0 , но «появился» новый заряд $(2^n) \cdot q_0$.

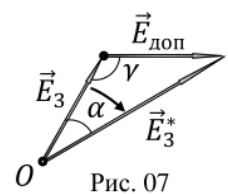


Рис. 07

Но мы можем считать, что в первой вершине многоугольника одновременно находятся два заряда: первый заряд q_0 , а второй $(2^n - 1) \cdot q_0$. Тогда можно сказать, что старая система зарядов «осталась» на месте, но в ее первой точке появился дополнительный заряд $(2^n - 1) \cdot q_0$.

Этот заряд создает в центре многоугольника дополнительную напряженность $\vec{E}_{\text{доп}}$ электростатического поля

$$\vec{E}_{\text{доп}} = (2^n - 1) \cdot \vec{E}_0. \quad (16)$$

Как следует из (16) вектор этой дополнительной напряженности поля направлен вдоль радиуса к центру O многоугольника (см. Рис. 07), т.е. так же, как и вектор $\vec{E}_0$.

Из векторного треугольника напряжённостей (Рис. 07) выразим итоговый вектор $\vec{E}_3^*$ и запишем теорему косинусов для стороны треугольника $\vec{E}_{\text{доп}}$ с учетом (16)

$$\vec{E}_3^* = \vec{E}_3 + \vec{E}_{\text{доп}}, \quad (17)$$

$$(E_{\text{доп}})^2 = (E_0 \cdot (2^n - 1))^2 = E_3^2 + 4E_3^2 - 2E_3(2E_3) \cos \alpha. \quad (18)$$

Из (18) находим искомое значение

$$E_3 = \frac{2^n - 1}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} E_0 = \{(15)\} = \frac{(2^n - 1) \cdot q_0}{4\pi\epsilon_0 R^2 \sqrt{5 - 4 \cos \left(\frac{2\pi}{n}\right)}}. \quad (19)$$

Для задания направления вектора $\vec{E}_3$ найдем по теореме синусов угол γ треугольника, противолежащий стороне $\vec{E}_3^*$

$$\frac{E_{\text{доп}}}{\sin \alpha} = \frac{E_3^*}{\sin \gamma} = \frac{2E_3}{\sin \gamma} \implies \sin \gamma = \frac{2E_3}{E_{\text{доп}}} \sin \alpha. \quad (20)$$

С учетом (16) и (19) окончательно получаем

$$\sin \gamma = \frac{2(2^n - 1)}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} E_0 \cdot \frac{\sin \alpha}{E_0 \cdot (2^n - 1)} = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} = \frac{2 \sin \left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\sqrt{5 - 4 \cos \left(\frac{2\pi}{n}\right)}}. \quad (21)$$

Выражения (19) и (21) полностью задают искомый вектор $\vec{E}_3$, приложенный в точке O (центре правильного n -угольника).

2.3 Для вычислений с использованием (19) и (21) необходимо знать количество вершин n правильного многоугольника.

Согласно условию, для искомого многоугольника $\vec{E}_3 \perp \vec{E}_0$, т.е. треугольник напряженностей (см. Рис. 7) – прямоугольный. Следовательно, в этом случае

$$\sin \gamma = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}. \quad (22)$$

Из (22) получаем квадратное уравнение относительно $\cos \alpha$, единственный корень которого

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ. \quad (23)$$

Из (23) находим число сторон n правильного многоугольника

$$n = \frac{2\pi}{\alpha} = 6, \quad (24)$$

т.е. в данном случае получается правильный шестиугольник.

Расчеты по найденным формулам (9) и (10) дают

$$E_3 = \frac{(2^6 - 1) \cdot 151 \times 10^{-9}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \times 10^{-12} \cdot (1,52)^2 \sqrt{5 - 4 \cos \left(\frac{6,28}{6} \right)}} = \{21392,91265\} = 21,4 \cdot 10^3 \left(\frac{\text{В}}{\text{м}} \right) = 21,4 \left(\frac{\text{кВ}}{\text{м}} \right). \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} = 1,57 \text{ рад} = 90,0^\circ. \quad (26)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по три значащие цифры, поскольку все данные условия приведены с тремя значащими цифрами (не путать с цифрами после запятой!).

