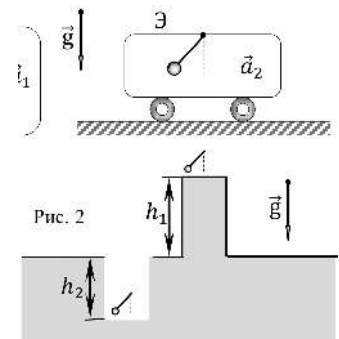


Разгон маятника

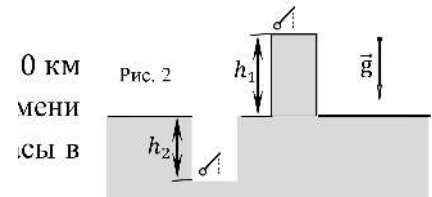
Условие

Задание 11-1. Гармоническая разминка

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем:* сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\pi = 3,14$, при малых x ($x \rightarrow 0$) справедливы приближенные формулы: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

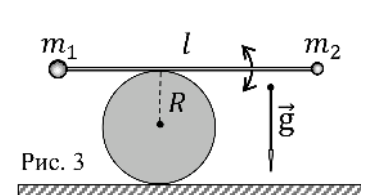


1.1 «Разгон маятника» Известно, что период колебаний математического маятника, подвешенного в лифте Л (Рис. 1), движущемся с ускорением $a_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$, и в электричке Э, движущейся с некоторым ускорением a_2 , один и тот же. Куда едет лифт? Чему равно ускорение a_2 электрички?



1.2 «Маятник в шахте» Известно, что на горе высотой $h_1 = 1,0 \text{ км}$ маятниковые часы (Рис. 2) начинают отставать на промежуток времени $\tau = 14 \text{ с}$ в сутки. На какую глубину h_2 необходимо опустить эти часы в шахту (см. Рис. 2), чтобы они шли также, как и на горе?

1.3 «Непостоянная планка» Небольшие шарики массами m_1 и m_2 закреплены на концах лёгкой жесткой тонкой планки длиной l . Планка с шариками покоится на поверхности неподвижного шероховатого горизонтального цилиндра радиусом R (Рис. 3). В положении равновесия планка горизонтальна и перпендикулярна оси цилиндра (на Рис. 3 показан вид со стороны торца цилиндра).



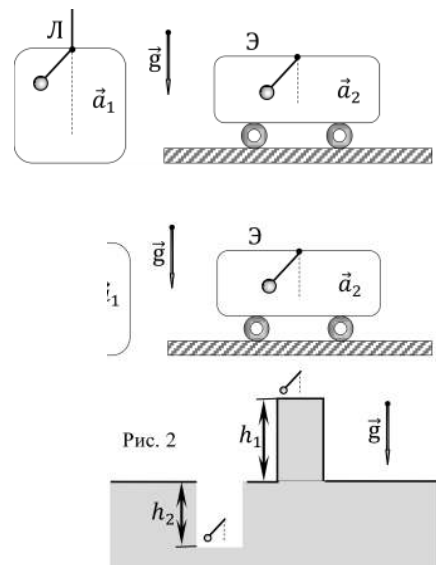
Планку, приподнимая один из шариков, поворачивают на малый угол, так, что она движется

по цилиндру без проскальзывания, и отпускают. После этого в системе начинаются колебания, в процессе которых планка движется в плоскости рисунка по поверхности цилиндра также без проскальзывания. Найдите период T малых колебаний планки с шариками. 11 класс. Теоретический тур. Вариант I.

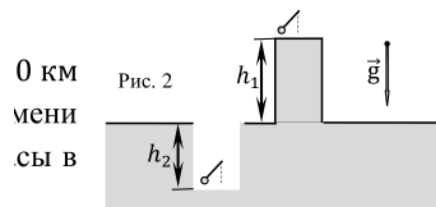
Решение

Задание 10-1. Гармоническая разминка

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем: сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $\pi = 3,14$, при малых x ($x \rightarrow 0$) справедливы приближенные формулы: $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

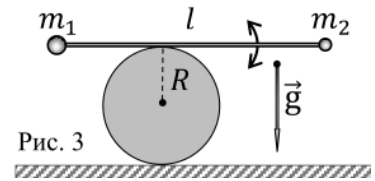


1.1 «Разгон маятника» Известно, что период колебаний математического маятника, подвешенного в лифте $Л$ (Рис. 1), движущемся с ускорением $a_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$, и в электричке $Э$, движущейся с некоторым ускорением a_2 , один и тот же. Куда едет лифт? Чему равно ускорение a_2 электрички?



1.2 «Маятник в шахте» Известно, что на горе высотой $h_1 = 1,0 \text{ км}$ маятниковые часы (Рис. 2) начинают отставать на промежуток времени $\tau = 14 \text{ с}$ в сутки. На какую глубину h_2 необходимо опустить эти часы в шахту (см. Рис. 2), чтобы они шли также, как и на горе?

1.3 «Непостоянная планка» Небольшие шарики массами m_1 и m_2 закреплены на концах лёгкой жесткой тонкой планки длиной l . Планка с шариками покоится на поверхности неподвижного шероховатого горизонтального цилиндра радиусом R (Рис. 3). В положении равновесия планка горизонтальна и перпендикулярна оси цилиндра (на Рис. 3 показан вид со стороны торца цилиндра).



Планку, приподнимая один из шариков, поворачивают на малый угол, так, что она движется по цилиндру без проскальзывания, и отпускают. После этого в системе начинаются колебания, в процессе которых планка движется в плоскости рисунка по поверхности цилиндра также без проскальзывания. Найдите период T малых колебаний планки с шариками.

Решение:

Задание 1. Гармоническая разминка

1.1 «Разгон маятника» При равномерном движении лифта или электрички в любом направлении (вверх – вниз или вправо – влево) период колебаний математического маятника, подвешенного к потолку, не изменится, поскольку все инерциальные системы отсчета (ИСО) эквивалентны (принцип относительности Галилея). Период колебаний такого маятника будет равен периоду колебаний «неподвижного» маятника длиной l , вычисленному по формуле Гюйгенса

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения.

При ускоренном движении лифта или электрички период колебаний T маятника можно найти по «модернизированной» формуле Гюйгенса через т.н. «эффективное ускорение» g^*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g^*}}. \quad (2)$$

В случае электрички (её ускорение a_2 горизонтально, не важно, в какую сторону) эффективное ускорение находится по теореме Пифагора

$$g^* = \sqrt{a^2 + g^2} = \sqrt{a_2^2 + g^2} > g. \quad (3)$$

Как следует из (2) и (3), в ускоренно движущейся электричке (не важно, разгон или торможение) период колебаний математического маятника всегда меньше, чем покоящегося.

При ускорении лифта вверх эффективное ускорение

$$g^* = g + a_1 > g, \quad (4)$$

а при ускорении вниз

$$g^* = g - a_1 < g. \quad (5)$$

Из сравнения (3), (4) и (5) получаем, что равенство периодов колебаний математического маятника в электричке и лифте может наблюдаться только при ускорении лифта вверх, когда

$$\sqrt{a_2^2 + g^2} = g + a_1. \quad (6)$$

Из (6) находим

$$a_2 = \sqrt{a_1(a_1 + 2g)} = 5,6 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

По правилам приближенных вычислений в окончательных расчётах сохраняем по две значащие цифры, поскольку «худшее» из данных условия задачи содержит две значащие цифры (не путать с цифрами после запятой!).

Подчеркнем, что (4) задает направление ускорения лифта (вверх), а в задаче спрашивается: куда он едет? Но за направление движения «отвечает» скорость лифта, а не его ускорение. Следовательно, ехать лифт при этом может «куда угодно»: как вверх (ускоряется), так и вниз (тормозится) – в обоих случаях ускорение будет направлено вверх. Таким образом, распространенный ответ «лифт едет вверх» является неполным, а строго говоря – неверным.

1.2 «Маятник в шахте» При подъёме в гору на малую высоту h (по сравнению с радиусом Земли) несколько уменьшается ускорение свободного падения g .

Действительно, из закона всемирного тяготения следует, что на поверхности Земли

$$g = G \frac{M}{R^2}, \quad (8)$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ — гравитационная постоянная, $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ и $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ — соответственно, масса и радиус Земли.

Соответственно, период колебаний маятника часов по формуле Гюйгенса будет равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot R^2}{GM}} = 2\pi R \sqrt{\frac{l}{GM}}. \quad (9)$$

При подъёме на высоту h расстояние до центра Земли увеличивается, следовательно

$$g(h) = G \frac{M}{(R+h)^2} = \frac{R^2}{(R+h)^2} g = \frac{1}{(1 + \frac{h}{R})^2} g. \quad (10)$$

Как следует из (10), только при $h = (\sqrt{2} - 1)R = 0,41R$, т.е. на высоте $h = 2639 \text{ км}$ над поверхностью Земли (глубокий космос!) ускорение свободного падения уменьшается в 2 раза (на 50%).

Таким образом, высоту $h_1 = 1,0$ км уверенно и с большой точностью можно считать малой, т.е. гораздо меньше радиуса Земли. В задаче не требуется, но преобразуем (10) для малых высот h ($h \ll R$) с учетом математической подсказки из условия задачи

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} = \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \approx 1 + (-2) \left(\frac{h}{R}\right) = 1 - \frac{2h}{R}, \quad (11)$$

тогда

$$g(h) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} g = \left(1 - \frac{2h}{R}\right) g. \quad (12)$$

С учетом (9) и (10), на высоте h над поверхностью земли период колебаний $T_1(h)$ математического маятника составит

$$T_1(h) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(h)}} = 2\pi \sqrt{\frac{l(R+h)^2}{GM}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cdot R^2}{GM}} \times \sqrt{\frac{(R+h)^2}{R^2}} = T_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right). \quad (13)$$

Поскольку у правильно идущих часов $T_0 = 1,00$ с, то для случая часов на горе получим

$$T_1(h) = T_0 \left(1 + \frac{h}{R}\right) = 1,000157 \text{ с}, \quad (14)$$

тогда за сутки ($24 \times 60 \times 60 = 86\,400$) они сделают N_1 качаний (меньше, чем на поверхности)

$$N_1 = \frac{24 \times 60 \times 60}{1,000157} = 86\,386. \quad (15)$$

Это и соответствует суточному отставанию на $\tau = 14$ с, приведенному в условии.

При опускании в шахту на глубину h ускорение свободного падения также уменьшается, но по линейному закону

$$g(h) = \left(1 - \frac{h}{R}\right) g. \quad (16)$$

Этот эффект связан с тем, что внешние (по отношению к текущему положению тела) слои Земли «перестают» притягивать тела, уменьшая тем самым «эффективную», т.е. гравитирующую массу Земли. Учет притяжения внутренних слоёв Земли и приводит к зависимости (16).

Соответственно, период колебаний $T_2(h)$ маятника в шахте на глубине h будет равен

$$T_2(h) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(h)}} = T_0 \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{h}{R}\right)}} = T_0 \left(1 - \frac{h}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx T_0 \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{h}{R}\right)\right) = T_0 \left(1 + \frac{h}{2R}\right). \quad (17)$$

Сравнивая (13) и (17), находим, что для одинакового замедления хода маятниковых часов на горе и в шахте необходимо выполнение условия равенства их периодов колебаний (время суточного отставания $\tau = 14$ с дано для справки, и для решения не потребовалось)

$$T_0 \left(1 + \frac{h_1}{R} \right) = T_0 \left(1 + \frac{h_2}{2R} \right) \Rightarrow h_2 = 2h_1 . \quad (18)$$

Расчет даёт

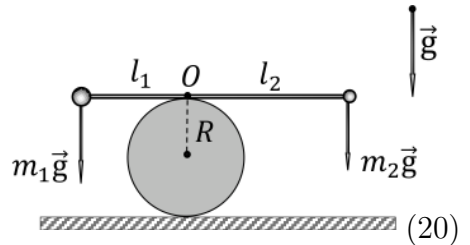
$$h_2 = 2h_1 = 2,0 \text{ км} . \quad (19)$$

Как видим из (19), для «одинакового отставания» маятниковые часы необходимо опускать в шахту на бóльшую глубину (в два раза!), чем поднимать в гору. Оно и понятно, поскольку в шахте ускорение свободного падения (16) убывает с глубиной в два раза медленнее, чем на горе (12).

Можно сказать и иначе: при одинаковых h маятниковые часы в шахте отстают в два раза меньше, чем на горе, т.е. идут точнее. В этом смысле лучше «зарываться», чем «подниматься»! :)

1.3 «Непостоянная планка» В положении равновесия системы моменты сил тяжести шариков (массой планки пренебрегаем, поскольку она лёгкая) относительно точки касания O планки и цилиндра должны быть равны (Рис. 01)

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2 ,$$



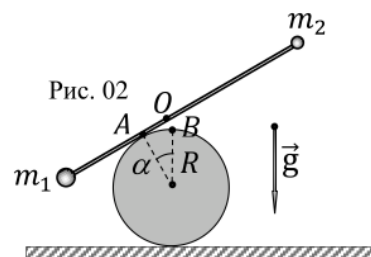
где l_1 и l_2 – плечи соответствующих сил тяжести. Можно сказать и иначе – центр масс системы при равновесии должен быть в точке O .

Кроме того, выполняется очевидное условие

$$l_1 + l_2 = l . \quad (21)$$

Из системы уравнений (20) и (21) находим

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \\ l_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \end{aligned} \quad (22)$$



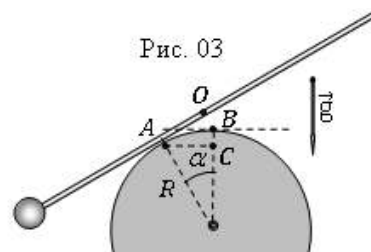
Рассмотрим механическую систему в момент, когда планка с шариками отклонена от положения равновесия на малый угол α и касается цилиндра новой точкой A (Рис. 02).

Поскольку планка двигалась по цилиндру без проскальзывания, то длина отрезка AO (O — прежняя точка касания) равна длине дуги AB (B — верхняя точка цилиндра)

$$AO = \widehat{AB} = \alpha R. \quad (23)$$

Подчеркнем, что точки O и B не лежат на одной вертикали, хотя для решения это не важно.

При отклонении планки от положения равновесия точка A опустилась (Рис. 03) на некоторую высоту h_1 относительно верхней точки цилиндра.



Из Рис. 3 с учетом малости угла α и подсказки из условия находим

$$h_1 = BC = R(1 - \cos \alpha) \approx \frac{\alpha^2}{2} R. \quad (24)$$

Соответственно, при отклонении планки центр масс O системы поднялся относительно начального уровня (с учетом малости угла α и подсказки из условия) на высоту h_2

$$h_2 = AO \sin \alpha - h_1 = \{AO \sin \alpha \approx \alpha R \cdot \alpha\} = \alpha R^2 - \frac{\alpha^2}{2} R = \frac{\alpha^2}{2} R. \quad (25)$$

Следовательно, потенциальная энергия $E^п$ системы при отклонении планки с шариками на малый угол α увеличилась на величину

$$E^п = (m_1 + m_2)g \cdot h_2 = (m_1 + m_2)gR \cdot \frac{\alpha^2}{2}. \quad (26)$$

Заметим, что (26) можно получить и другим способом: рассматривая смещение по вертикали каждого шарика. Придётся немного больше «попотеть» с преобразованиями, но результат, конечно же, получится таким же.

Кинетическая энергия системы в рассматриваемый момент складывается из кинетических энергий шариков (планка легкая)

$$E^{\kappa} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_2^2}{2}. \quad (27)$$

Однако, из-за смещения точки касания цилиндра планкой (из $(\cdot)O$ в $(\cdot)A$) изменятся расстояния до мгновенной оси вращения, следовательно, линейные скорости мгновенного вращения шариков станут равными

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega(l_1 - \alpha R) \\ v_2 &= \omega(l_2 + \alpha R), \end{aligned} \quad (28)$$

где ω – мгновенная угловая скорость вращения планки.

Подставляя (28) в (27), с учетом (20), получим

$$E^{\kappa} = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2\alpha R(m_2 l_2 - m_1 l_1) + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2) = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + (m_1 + m_2)\alpha^2 R^2). \quad (29)$$

При малых α вторым слагаемым в (29) можно пренебречь (оно второго порядка малости, поскольку α в квадрате!), тогда кинетическая энергия системы принимает «красивый» вид

$$E^{\kappa} = \frac{\omega^2}{2}(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2). \quad (30)$$

Запишем закон сохранения энергии для данной колебательной системы

$$E^{\pi} + E^{\kappa} = (m_1 + m_2)gR \cdot \frac{\alpha^2}{2} + (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \cdot \frac{\omega^2}{2} = \text{const}. \quad (31)$$

Далее для получения классического уравнения гармонических колебаний

$$\ddot{\alpha}(t) + \omega^2 \cdot \alpha(t) = 0 \quad (32)$$

можно найти производную от (31) по времени и традиционным способом найти период колебаний системы.

Однако проще и короче провести энергетическую аналогию с пружинным маятником, для которого

$$E^{\pi} + E^{\kappa} = k \cdot \frac{x^2}{2} + m \frac{v^2}{2} = \text{const}, \quad (33)$$

и период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (34)$$

Сравнивая (31) и (33), находим, что для планки с грузами роль массы m играет величина $m \rightarrow (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)$, называемая моментом инерции системы. Роль коэффициента упругости k пружины играет величина $k \rightarrow ((m_1 + m_2)gR)$.

Таким образом, искомый период T малых колебаний «непостоянной планки» равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{(m_1 + m_2)gR}} = 2\pi\frac{l}{m_1 + m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}. \quad (35)$$