

Условие

Задание 10-2. Годограф

Годографом вектора называется кривая, представляющая собой множество концов переменного со временем вектора $\vec{r}(t)$, начало которого (Рис. 1) для всех t есть фиксированная точка O («Математический энциклопедический словарь»). Иными словами годограф вектора представляет собой множество точек, по которым «движется» конец данного вектора со временем, если положение его начала зафиксировать в некоторой точке O .

Справедливости ради отметим, что школьники косвенно знакомы с данным понятием, поскольку годографом радиус-вектора $\vec{r}_i(t)$ ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$) движущейся материальной точки является ... её траектория, отмеченная на рисунке 1 пунктирной линией. Годограф вектора наглядно представляет его эволюцию с течением времени, а также используется при различных расчетах.

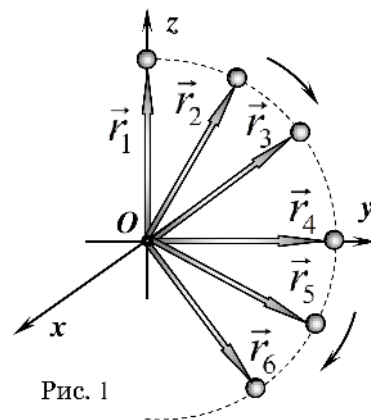


Рис. 1

Часть 1. Вычисление полного ускорения

1.1 Небольшой массивный шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, отклонили так, что нить стала горизонтальной и аккуратно отпустили без натяжения нити (рис. 2). При движении шарик будет приобретать как центростремительное (нормальное) ускорение $\vec{a}_n$, направленное вдоль нити, так и касательное (тангенциальное) $\vec{a}_\tau$ ускорение, направленное перпендикулярно нити (см. рис. 2). Сумма $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ называется *полным* ускорением тела. Найдите зависимости модулей ускорений $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ от угла α , образованного нитью с вертикалью. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

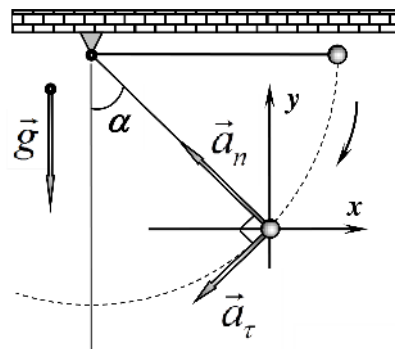


Рис. 2

1.2 Найдите зависимость $a(\alpha)$ модуля полного ускорения $\vec{a}$ шарика от угла α в процессе движения до нижней точки траектории.

1.3 Поскольку вектор полного ускорения шарика поворачивается со временем, то в некоторый момент он будет горизонтален. Найдите полное ускорение шарика a_1 и угол α_1 между нитью и вертикалью в этот момент времени.

Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

2.1 Найдите зависимости проекций a_x и a_y полного ускорения шарика от угла α в стандартной (декартовой) системе координат. Выразите их в безразмерных единицах $a_x^* = a_x/g$ и $a_y^* = a_y/g$.

2.2 Чему равен модуль максимального горизонтального ускорения $a_{x \max}$ шарика в процессе движения до низшей точки траектории? Максимального вертикального ускорения $a_{y \max}$?

10 класс. Теоретический тур. Вариант 2.

2.3 Разбейте прямой угол α на интервалы по $\Delta\alpha = 5^\circ$ градусов и вычислите проекции ускорений a_x^* и a_y^* для точек в диапазоне $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Результаты вычислений занесите в Таблицу 1 (см. ниже).

2.4 Пользуясь Таблицей 1, постройте на выданном бланке годограф полного ускорения шарика при его движении до нижней точки траектории.

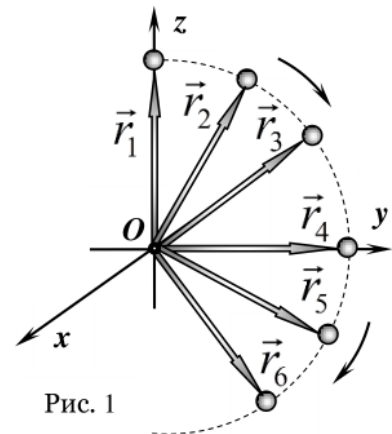
2.5 Проанализируйте построенный годограф, отметьте его существенные особенности и попытайтесь описать их математически (например, получить уравнение, описывающее полученную кривую).

Решение

Задание 10-2. Годограф

Годографом вектора называется кривая, представляющая собой множество концов переменного со временем вектора $\vec{a}(t)$, начало которого для всех t есть фиксированная точка O («Математический энциклопедический словарь»). Иными словами годограф вектора представляет собой множество точек, по которым «движется» конец данного вектора со временем, если положение его начала зафиксировать в некоторой точке O .

Справедливости ради отметим, что школьники косвенно знакомы с данным понятием, поскольку годографом радиус-вектора $\vec{r}_i(t)$ ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$) движущейся материальной точки является ... её траектория, отмеченная на рисунке 1 пунктирной линией. Годограф вектора наглядно представляет его изменение с течением времени, а также используется при различных расчетах.



Часть 1. Вычисление полного ускорения

1.1 Небольшой массивный шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, отклонили так, что нить стала горизонтальна и аккуратно отпустили без натяжения нити (рис. 2). При движении шарик будет приобретать как центростремительное (нормальное) ускорение $\vec{a}_n$, направленное вдоль нити, так и касательное (тангенциальное) $\vec{a}_\tau$ ускорение, направленное перпендикулярно нити (см. рис. 2). Сумма $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ называется полным ускорением тела. Найдите зависимости модулей ускорений $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ от угла α , образованного нитью с вертикалью. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $\vec{g}$.

1.2 Найдите зависимость $a(\alpha)$ модуля полного ускорения $\vec{a}$ шарика от угла α в процессе движения до нижней точки траектории.

1.3 Поскольку вектор полного ускорения шарика поворачивается со временем, то в некоторый момент он будет горизонтален. Найдите полное ускорение шарика a_1 и угол α_1 между нитью и вертикалью в этот момент времени.

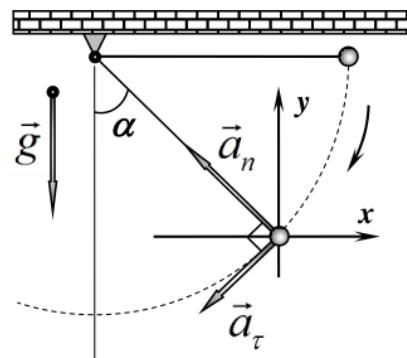


Рис. 2

Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

2.1 Найдите зависимости проекций a_x и a_y полного ускорения шарика от угла α в стандартной (декартовой) системе координат. Выразите их в безразмерных единицах $a_x^* = a_x/g$ и $a_y^* = a_y/g$.

2.2 Чему равен модуль максимального горизонтального ускорения $a_{x \max}$ шарика в процессе движения до нижней точки траектории? Максимального вертикального ускорения $a_{y \max}$?

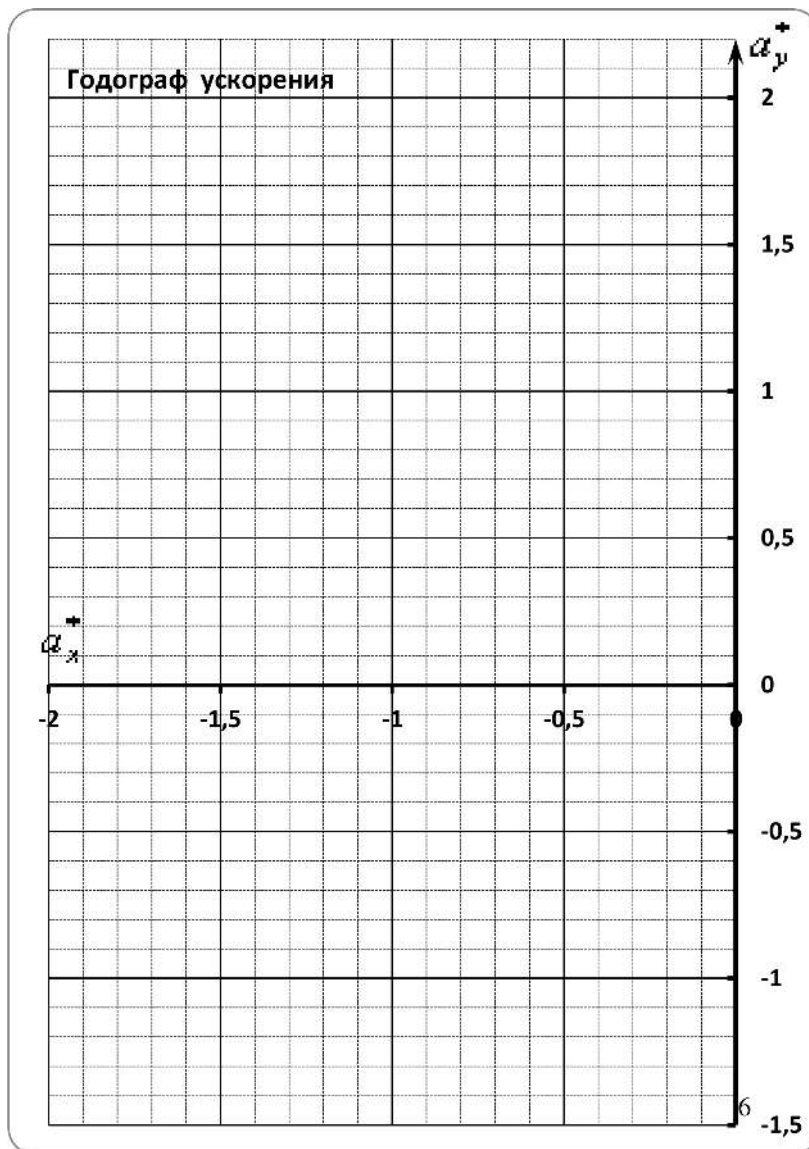
2.3 Разбейте прямой угол α на интервалы по $\Delta\alpha = 5^\circ$ градусов и вычислите проекции ускорений a_x^* и a_y^* для точек в диапазоне $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Результаты вычислений занесите в Таблицу 1 (см. ниже).

Угол	a_x^*	a_y^*
90°		
85°		
80°		
75°		
70°		
65°		
60°		
55°		
50°		
45°		
40°		
35°		
30°		
25°		
20°		
15°		
10°		
5°		
0°		

2.4 Пользуясь Таблицей 1, постройте на выданном бланке годограф полного ускорения шарика при его движении до нижней точки траектории.

2.5 Проанализируйте построенный годограф, отметьте его существенные особенности и попытайтесь описать их математически (например, получить уравнение, описывающее полученную кривую).

Таблица 1. Вычисление a_x^* и a_y .



Бланк для построения годографа ускорения шарика по Таблице 1.

Решение:

Часть 1. Вычисление полного ускорения

1.1 В момент, когда нить составляет угол α с горизонтом, шарик опустился на высоту $h = l \cos \alpha$ (рис. 1), где l – длина нити. Согласно закону сохранения механической энергии (потерь нет) для движения шарика массой m можем записать

$$mgh = mgl \cos \alpha = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gl \cos \alpha, \quad (1)$$

где v – скорость шарика в рассматриваемый момент, направленная по касательной к дуге. Следовательно, нормальное (центростремительное) ускорение шарика на нерастяжимой нити в данной точке

$$a_n = a_{\text{цс}} = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{l} = \{(1)\} = 2g \cos \alpha \quad (2)$$

На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости нити $\vec{T}$ (см. рис. 1), следовательно, второй закон Ньютона в проекциях на текущее направление нити и по касательной к ней примет вид

$$\begin{aligned} ma_n &= T - mg \cos \alpha \\ ma_\tau &= mg \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (2) из системы (3) находим выражения для касательного ускорения и силы упругости нити

$$\begin{aligned} a_\tau &= g \sin \alpha \\ T &= 3mg \cos \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Соответственно, полное ускорение шарика в данный момент найдем с помощью теоремы Пифагора и выражений (2) и (4)

$$a(\alpha) = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2 \sin^2 \alpha + 4g^2 \cos^2 \alpha} = g\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}. \quad (5)$$

Как следует из (5), в начальный момент времени ($\alpha = \pi/2$) полное ускорение шарика равно ускорению свободного падения $a = g$ и направлено вниз. Таким образом, пока нить не натянулась, шарик практически свободно падает в течение малого промежутка времени. Поскольку при этом центростремительное ускорение шарика равно нулю (он ещё не успел набрать скорость), то полное ускорение равно касательному ускорению и равно g .

При прохождении шариком нижней точки траектории ($\alpha = 0$) равно нулю касательное ускорение, а его полное ускорение имеет максимальное значение $a = 2g$ и направлено вверх. В

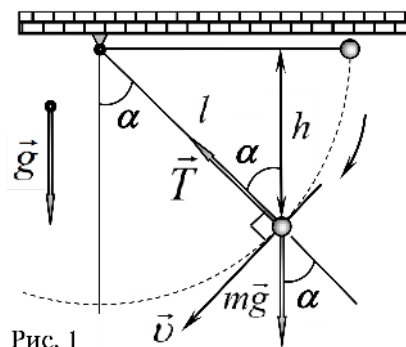
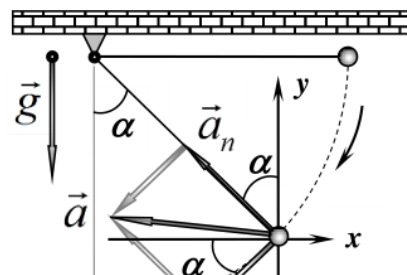


Рис. 1



этом случае оно совпадает с центростремительным ускорением. Заметим, что сила натяжения нити при этом максимальна и равна $T = 3mg$ (направлена вверх).

Угол β , который составляет вектор полного ускорения $\vec{a}$ с горизонтом, найдем из параллелограмма ускорений на рисунке 2

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{a_\tau \sin \alpha - a_n \cos \alpha}{a_\tau \cos \alpha + a_n \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - 2}{3 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (6)$$

1.3 В момент, когда вектор полного ускорения шарика горизонтален $\beta = 0$, следовательно

$$\operatorname{tg} \beta = 0 \Rightarrow a_\tau \sin \alpha_1 = a_n \cos \alpha_1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 55^\circ. \quad (7)$$

Подставляя полученное значение угла $\alpha_1 = 55^\circ$ в формулу для полного ускорения (5), находим искомое значение для горизонтального ускорения шарика

$$a_1 = g \sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha_1} = g \sqrt{1 + \frac{3}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = g \sqrt{2} = 1,4g. \quad (8)$$

Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

2.1 Для удобства построения годографа вектора ускорения шарика перейдём к декартовым координатам (x, y) , изображенным на рисунке 3 (с учетом знаков). Тогда проекции полного ускорения шарика примут вид

$$a_x = -a_\tau \cos \alpha - a_n \sin \alpha = -3g \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2}g \sin 2\alpha. \quad (9)$$

$$a_y = -a_\tau \sin \alpha + a_n \cos \alpha = g(2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Для формализации процесса расчёта введем удобные безразмерные единицы измерения ускорений, имеющие очевидный смысл

$$a_x^* = \frac{a_x}{g}; \quad a_y^* = \frac{a_y}{g}. \quad (10)$$

Тогда расчетные формулы для заполнения таблицы примут вид

$$\begin{aligned} a_x^*(\alpha) &= -3 \sin \alpha \cos \alpha \\ a_y^*(\alpha) &= 2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

2.3 Расчёт по формулам даёт следующие результаты

Таблица 1. Вычисление a_x^* и a_y^* . Рис. 3. Построение годографа ускорения на бланке.

Угол	a_x^*	a_y^*
90°	0,00	-1
85°	-0,26	-0,98
80°	-0,51	-0,91
75°	-0,75	-0,80
70°	-0,96	-0,65
65°	-1,15	-0,46
60°	-1,30	-0,25
55°	-1,41	-0,01
50°	-1,48	0,24
45°	-1,50	0,50

40°	-1,48	0,76
35°	-1,41	1,01
30°	-1,30	1,25
25°	-1,15	1,46
20°	-0,96	1,65
15°	-0,75	1,80
10°	-0,51	1,91
5°	-0,26	1,98
0°	0,00	2,00

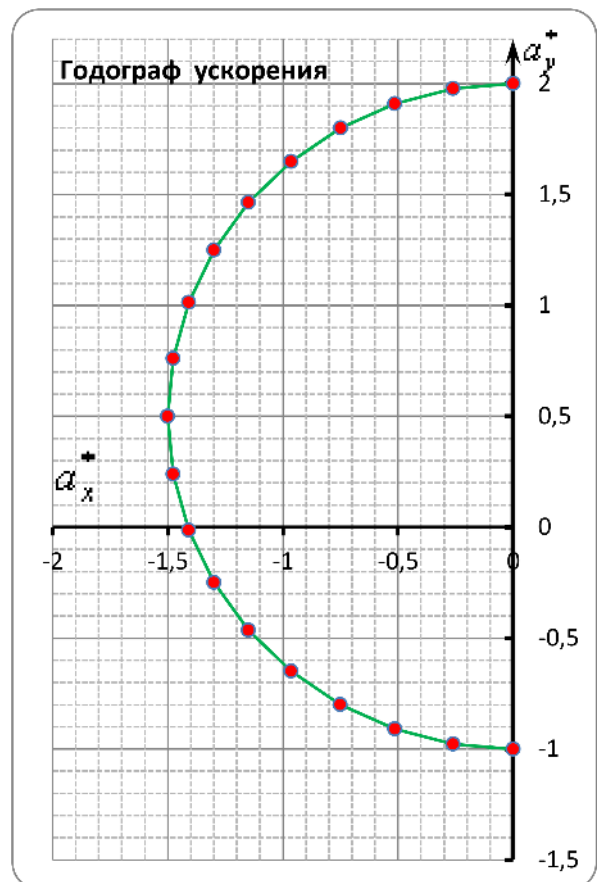
2.2 Как следует из анализа рисунка 3, максимальное (по модулю) горизонтальное ускорение шарика равно $|a_x^*| = |-1,5| = 1,5$. Это же, кстати, следует и из формулы (9) при $\alpha = \pi/4$. Максимальное же вертикальное ускорение $a_y^* = 2,0$ шарик приобретает в нижней точке траектории ($\alpha = 0$), которой соответствует верхняя точка графика на рисунке 3.

2.4 Удивительно, но несмотря на достаточно сложный характер рассматриваемого движения, график на рисунке 3 напоминает траекторию движения самого шарика! Действительно, точки неплохо «ложатся» на полуокружность радиуса $R = 1,5$ с центром в точке с координатами $(0; +0,5)$. Убедимся в справедливости сделанного предположения.

2.5 Поскольку уравнение окружности радиуса R с центром в точке с координатами $(a; b)$ имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \quad (12)$$

то для доказательства справедливости сделанного предположения достаточно проверить тождественность равенства (13) при любых $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$



$$(a_x^*)^2 + (a_y^* - 0,5)^2 = 1,5^2 = \frac{9}{4}. \quad (13)$$

Используя (11) приведём (13) к виду

$$9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \left(2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}. \quad (14)$$

После избавления от знаменателя и раскрытия скобок из (14) находим

$$36 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 16 \cos^4 \alpha - 16 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 4 \sin^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 1 = 9. \quad (15)$$

Приводя подобные, и сокращая, упростим выражение (15) следующим образом

$$5 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4 \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2. \quad (16)$$

Собирая полный квадрат, с учётом основного тригонометрического тождества $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = 1^2$, выражение (16) примет вид

$$3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 3 \cos^4 \alpha + 1 - 2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2. \quad (17)$$

Далее «немного удачи» при перегруппировке членов и вынесении за скобки

$$\sin^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha + 1) - 3 \cos^2 \alpha = 1, \quad (18)$$

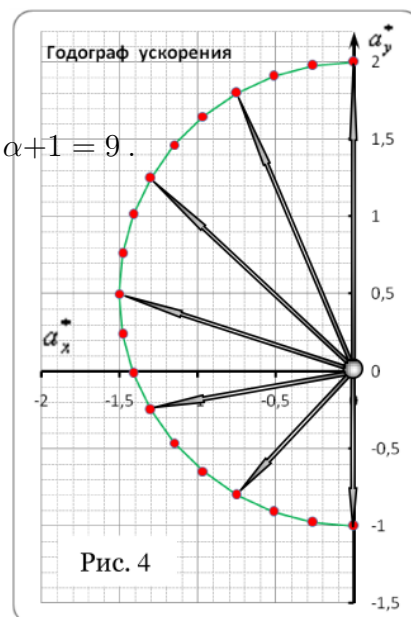
позволяют ещё раз довести дело до основного тригонометрического тождества и до ... победного конца

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(3 \cos^2 \alpha + 1) - 3 \cos^2 \alpha = 1$$

$$3 \cos^2 \alpha + 1 - 3 \cos^2 \alpha = 1 \quad !!!$$

$$1 \equiv 1 \quad (19)$$

Легко догадаться (хотя и не требуется в условии задачи), что при движении шарика в левой полуплоскости, на годографе ускорения мы получим симметричную полуокружность, замыкающую траекторию до полной окружности. Далее с разворотом все повторяется вновь



против часовой стрелки. Поскольку центр окружности находится в точке с координатами $(0; +0,5)$, то в неинерциальной системе отсчёта, движущейся с ускорением $\vec{a} = -\vec{g}/2$, направленным вверх, вектор полного ускорения неравномерно вращается по рассмотренной окружности, сохраняя свою длину. Таким образом, искомый годограф полного ускорения шарика представляет собой полуокружность (совершенно «случайно» изображённую в условии задачи, :)) радиусом $R = 1,5g$ со сдвинутым (относительно начала координат) центром (рис. 4).

