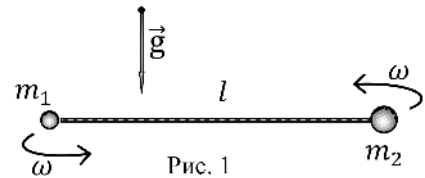


Два шарика на нити

Условие

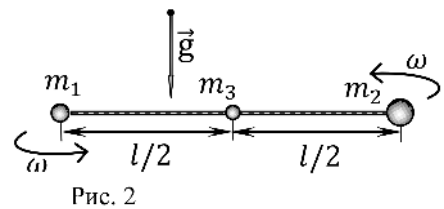
Задание 10-1. Лихо закручено

*Справочные данные и параметры рассматриваемых систем:** трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

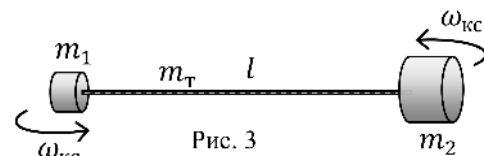


1.1 «Два шарика на нити» Два небольших шарика массами m_1 и m_2 , связанные легкой нитью длиной l , вращаются с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости (Рис. 1). Найдите силы натяжения нитей T_1 и T_2 , действующие на каждый из шариков, соответственно. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

1.2 «Три шарика на нити» Усложним задачу и добавим к середине нити длиной l третий небольшой шарик массой m_3 (Рис. 2). При вращении такой системы на горизонтальной плоскости оказалось, что модуль силы натяжения легкой нити у первого шарика равен T_1 , а у второго, соответственно, T_2 . Найдите массу m_3 третьего шарика и угловую скорость ω вращения системы, считая массы шариков m_1 и m_2 известными.



1.3 «Космическое вращение» Космическая станция состоит из двух отсеков массами m_1 и m_2 , соединенных длинным однородным тросом длины l . Станция вращается вокруг оси, перпендикулярной тросу, при этом модуль силы натяжения троса вблизи одного отсека равен T , а вблизи другого $T + \Delta T$ ($\Delta T \ll T$). Найдите массу соединительного троса m_T и угловую скорость $\omega_{\text{КС}}$ вращения космической станции.



10 класс. Теоретический тур. Вариант 2.

Решение

Задание 10-1. «Лихо закручено»

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем: трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

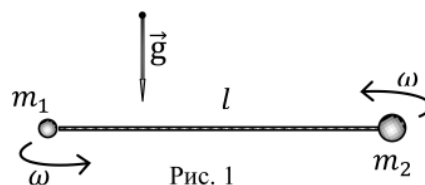


Рис. 1

1.1 «Два шарика на нити» Два небольших шарика массами m_1 и m_2 , связанные легкой нитью длиной l , вращаются с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости (Рис. 1). Найдите силы натяжения нитей T_1 и T_2 , действующие на каждый из шариков, соответственно. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

1.2 «Три шарика на нити» Усложним задачу и добавим к середине нити длиной l третий небольшой шарик массой m_3 (Рис. 2). При вращении такой системы на горизонтальной плоскости оказалось, что модуль силы натяжения легкой нити у первого шарика равен T_1 , а у второго, соответственно, T_2 . Найдите массу m_3 третьего шарика и угловую скорость ω вращения системы, считая массы шариков m_1 и m_2 известными.

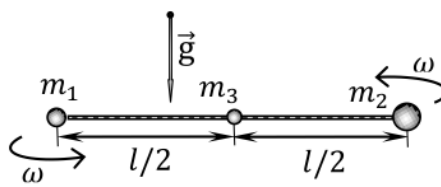


Рис. 2

1.3 «Космическое вращение» Космическая станция состоит из двух отсеков массами m_1 и m_2 , соединенных длинным однородным тросом длины l . Станция вращается вокруг оси, перпендикулярной тросу, при этом модуль силы натяжения троса вблизи одного отсека равен T , а вблизи другого $T + \Delta T$ ($\Delta T \ll T$). Найдите массу соединительного троса m_T и угловую скорость $\omega_{\text{кc}}$ вращения космической станции.

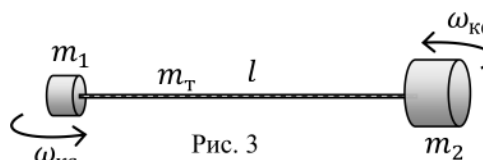


Рис. 3

Решение:

Задание 10-1. «Лихо закручено»

1.1 «Два шарика на нити» Вращение шариков (материальных точек) на легкой нити по плоскости будет происходить вокруг их центра масс – точки O (Рис. 01). При этом сама точка O будет оставаться неподвижной относительно гладкой горизонтальной плоскости, т.к. нет горизонтальных сил, способных «сдвинуть» систему с места (силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ внутренние, их сумма равна нулю).

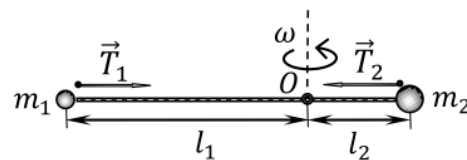


Рис. 01

Таким образом, траектории шариков будут представлять собой горизонтальные окружности радиусами l_1 и l_2 с центром в точке O . Радиусы траекторий шариков найдем из традиционной системы уравнений для центра масс двух материальных точек (см. Рис. 01)

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l \\ m_1 l_1 = m_2 l_2 \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) находим искомые расстояния до центра масс (оси вращения системы)

$$\begin{cases} l_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}l \\ l_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}l \end{cases} . \quad (2)$$

Поскольку трения в системе нет, то угловая скорость вращения шариков вокруг точки O будет по инерции оставаться постоянной $\omega = const$.

Из второго закона Ньютона с учетом (2) для движения первого шарика в горизонтальной плоскости найдем

$$m_1\omega^2 l_1 = T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1\omega^2 \frac{m_2}{m_1+m_2}l = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \omega^2 l. \quad (3)$$

Аналогично для второго шарика

$$m_2\omega^2 l_2 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2\omega^2 \frac{m_1}{m_1+m_2}l = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \omega^2 l. \quad (4)$$

Как следует из (3) и (4), силы натяжения нитей в такой системе (нить легкая) одинаковы и равны

$$T_1 = T_2 = T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \omega^2 l = \mu \omega^2 l, \quad (5)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ – т.н. «приведенная масса», вспомогательная величина с размерностью массы, часто возникающая при описании системы двух тел. Так из (5) следует, что сила натяжения, действующая на каждый из шариков, равна силе натяжения T при движении тела с приведенной массой μ на нити длиной l с той же угловой скоростью ω .

1.2 «Три шарика на нити» При добавлении третьего шарика на середину нити физика процесса не изменится – центр масс O трех шариков (Рис. 02) по-прежнему будет неподвижным при вращении системы на горизонтальной плоскости. Соответственно, через точку O будет проходить вертикальная ось вращения всей системы с постоянной угловой скоростью ω .

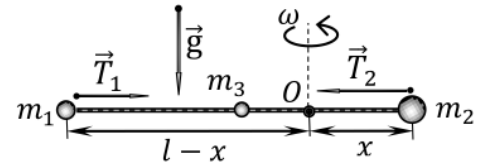


Рис. 02

Однако теперь модули T_1 и T_2 сил натяжения легких нитей, связывающих грузы, будут различными, поскольку шарик m_3 имеет массу, и для его ускоренного движения нужна ненулевая разность сил.

Пусть расстояние от шарика с массой m_2 до центра масс O равно x (Рис. 02). Второй закон Ньютона для движения каждого из шариков в горизонтальной плоскости примет вид

$$m_2\omega^2 x = T_2 \quad (6)$$

$$m_1\omega^2 (l-x) = T_1 \quad (7)$$

$$m_3 \omega^2 \left(\frac{l}{2} - x \right) = T_2 - T_1 \quad (8)$$

Разделив (6) на (7), придем к равенству

$$\frac{m_2 x}{m_1(l-x)} = \frac{T_2}{T_1} \quad (9)$$

из которого найдем

$$x = \frac{m_1 T_2}{m_1 T_2 + m_2 T_1} l \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6), найдем угловую скорость вращения шариков

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 T_2 + m_2 T_1}{m_1 m_2 l}} \quad (11)$$

а подставляя (10) в (8), найдем массу m_3 третьего шарика

$$m_3 = \frac{2m_1 m_2 (T_2 - T_1)}{m_2 T_1 - m_1 T_2} \quad (12)$$

1.3 «Космическое вращение» Для решения этого пункта достаточно догадаться, что роль третьего шарика массой m_3 здесь играет трос, центр масс которого находится на половине длины $\frac{l}{2}$, т.е. в той же точке где находился третий шарик (это важно!).

Следовательно, можно просто аккуратно воспользоваться формулами (11) и (12) с учетом условия малости ($\Delta T \ll T$) разности сил натяжения концов троса (вдоль самого троса эта сила меняется, но уравнения записываются для движения центра масс тела!).

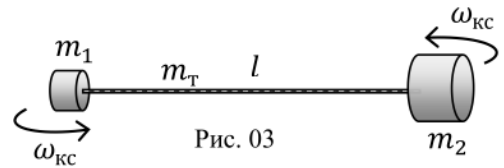
Будем считать, что второй отсек массивнее первого ($m_2 > m_1$), тогда понятно, что $T_2 = T + \Delta T$, а $T_1 = T$.

Соответственно, масса троса, соединяющего отсеки космической станции, будет равна

$$m_{\text{т}} = \frac{2m_1 m_2 (T_2 - T_1)}{m_2 T_1 - m_1 T_2} = \frac{2m_1 m_2 \Delta T}{(m_2 - m_1)T + m_2 \Delta T} = \{\Delta T \ll T\} \approx \frac{2m_1 m_2 \Delta T}{(m_2 - m_1)T} \quad (13)$$

а угловая скорость вращения станции

$$\omega_{\text{к}} = \sqrt{\frac{m_1 T_2 + m_2 T_1}{m_1 m_2 l}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T + m_1 \Delta T}{m_1 m_2 l}} = \{\Delta T \ll T\} \approx \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T}{m_1 m_2 l}} = \sqrt{\frac{T}{\mu l}} \quad (14)$$



где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ — приведенная масса отсеков станции (без массы троса!).

Обратите внимание, что результат (14) напрямую следует из (5), поскольку масса троса гораздо меньше массы каждого из отсеков по отдельности.