

## -1. Архимед и объем шарового сегмента

### Условие

#### Задание 9-1. Архимед и объем шарового сегмента.

Знаменитый древнегреческий ученый Архимед прославился не только законом о выталкивающей силе, но и многочисленными достижениями в математике. Например, он доказал, что площадь боковой поверхности цилиндра равна площади поверхности сферы, вписанной в этот цилиндр.

В данном задании Вам предстоит экспериментально повторить некоторые открытия Архимеда.

**Приборы и оборудование:** динамометр, мензурка, мерный стакан, цилиндр алюминиевый, шар новогодний, шприц, нить, вода.

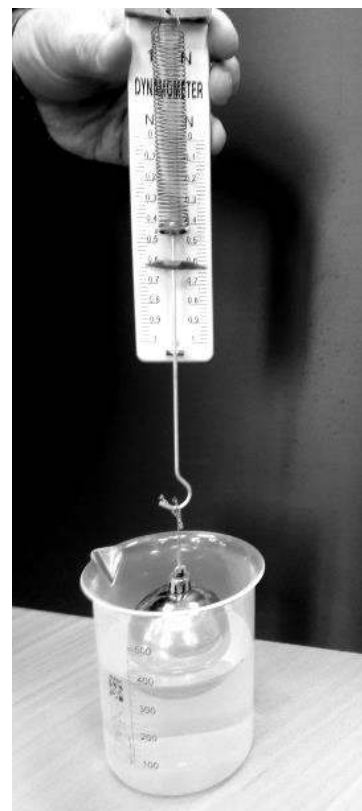
**Подсказка:** Закон Архимеда формулируется так: На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная

$$F = \rho g V, \quad (1)$$

Где  $\rho$  - плотность жидкости,  $g = 10 \frac{M}{c^2}$  - ускорение свободного падения,  $V$  - объем погруженной части тела.

#### Часть 1. Проверка закона Архимеда.

Прикрепите цилиндр к динамометру с помощью нити. Частично опуская цилиндр в мензурку с водой, можно измерять как объем погруженной части, так и силу с которой цилиндр действует на динамометр (далее эту силу будем называть **показания динамометра**).



1.1 Измерьте зависимость показаний динамометра  $F$  от объема погруженной части цилиндра  $V$ . Постройте график полученной зависимости  $F(V)$ .

1.2 Получите теоретическую формулу, описывающую зависимость  $F(V)$ .

1.3. Подтверждают ли полученные экспериментальные данные закон Архимеда? Ответ обоснуйте.

1.4 Используя все экспериментальные данные, рассчитайте плотность воды  $\rho$ . Оцените погрешность найденного значения.

Проведите аналогичные измерения для новогоднего шарика. Чтобы шарик тонул, заполните его водой с помощью шприца.

1.5 Измерьте зависимость показаний динамометра  $F$  от объема погруженной части шара  $V$ . Постройте график полученной зависимости  $F(V)$ .

1.6 Используя все экспериментальные данные, полученные в п.1.5, рассчитайте плотность воды  $\rho$ . Оцените погрешность найденного значения.

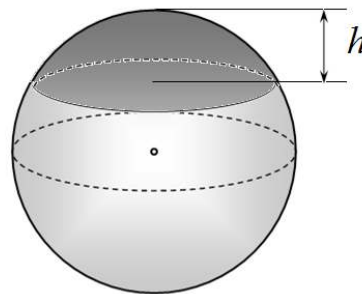
## Часть 2. Объем шарового сегмента.

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Объем шарового сегмента рассчитывается по формуле

$$V = \pi R^3 (a\xi^2 + b\xi^3). \quad (2)$$

где  $R$  - радиус шара,  $\xi = \frac{h}{R}$  - отношение высоты сегмента к радиусу шара,  $a, b$  - численные коэффициенты, которые вам необходимо определить на основе проведенных измерений.



Измерения предстоит проводить в мерном стакане. Шкала стакана слишком груба, чтобы получать надежные результаты. Поэтому прикрепите с помощью скотча полоску миллиметровой бумаги рядом со шкалой.

2.1 Измерьте показания высоты  $h$  (по полоске миллиметровой бумаги – *рекомендуем измерять в см, но с точностью до мм*) от отметок шкалы стакана  $V$  (в мл). Постройте график зависимости  $h(V)$ .

2.2 Найдите по результатам измерений п.2.1 коэффициенты зависимости объема жидкости в стакане от высоты уровня жидкости по миллиметровой бумаге

$$V = kh + c \quad (3)$$

Укажите размерности коэффициентов  $k$  и  $c$ . Укажите геометрический смысл коэффициента  $k$ .

2.3 Проведите измерения зависимости объема сегмента шара  $V$  от высоты этого сегмента  $h$ . Приведите рисунок, на котором укажите, какие величины вы измеряли, приведите формулы, по которым проведены расчеты. Постройте график зависимости  $V(h)$ .

2.4 Используя полученные экспериментальные данные рассчитайте значения коэффициентов  $a, b$  в формуле (2). Кратко опишите, как вы получили значения этих коэффициентов.

## Решение

### Задание 9-1. Архимед и объем шарового сегмента. Решение.

#### Часть 1. Проверка закона Архимеда.

1.1 Измеренная зависимость показаний динамометра  $F$  от объема погруженной части цилиндра  $V$  приведена в таблице 1 и на графике.

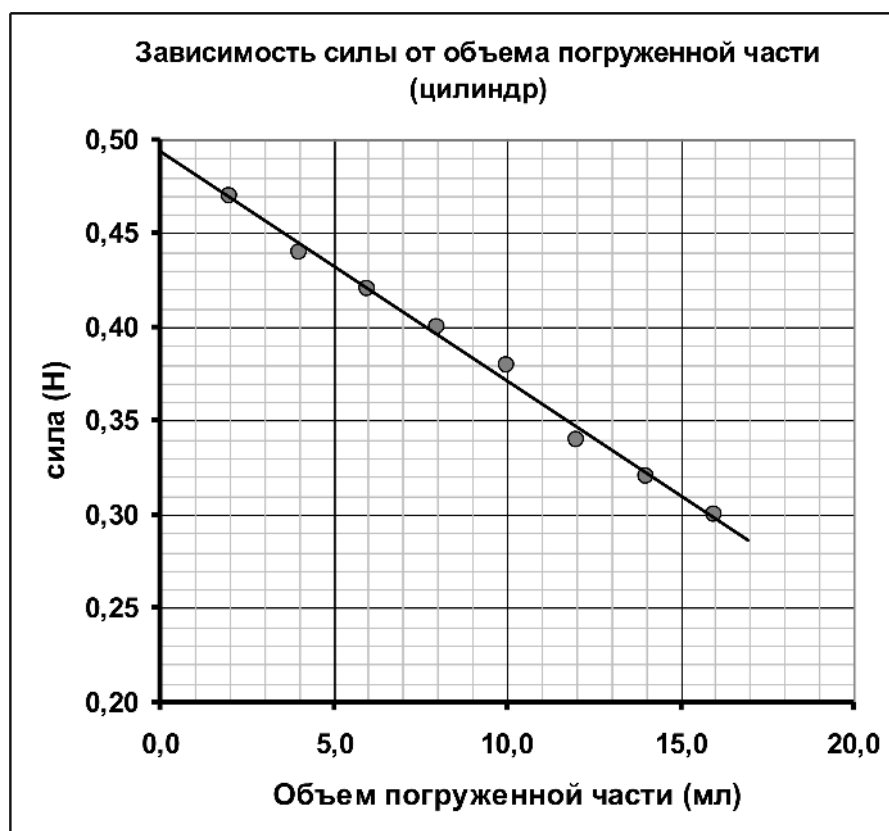


Таблица 1.

| V, мл | F, Н |
|-------|------|
| 2,0   | 0,47 |
| 4,0   | 0,44 |
| 6,0   | 0,42 |
| 8,0   | 0,40 |
| 10,0  | 0,38 |
| 12,0  | 0,34 |
| 14,0  | 0,32 |
| 16,0  | 0,30 |

1.2 Теоретическая зависимость имеет очевидный вид

$$F = mg - \rho g V. \quad (1)$$

1.3 Так как полученная зависимость близка к линейной, то она подтверждает справедливость закона Архимеда.

1.4 Коэффициент наклона прямой на графике зависимости  $F(V)$  равен

$$a = -(0,012 \pm 0,003) \frac{H}{\text{мл}}. \quad (2)$$

Сравнивая с теоретической формулой (1), получаем, что

$$a = -\rho g. \quad (3)$$

Откуда находим (все единицы надо перевести в единицы СИ), что плотность воды равна

$$\rho = -\frac{a}{g} = (1,2 \pm 0,3) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (4)$$

1.5 Аналогичные измерения для шара дали результаты, приведенные в Таблице 2 и на соответствующем графике.

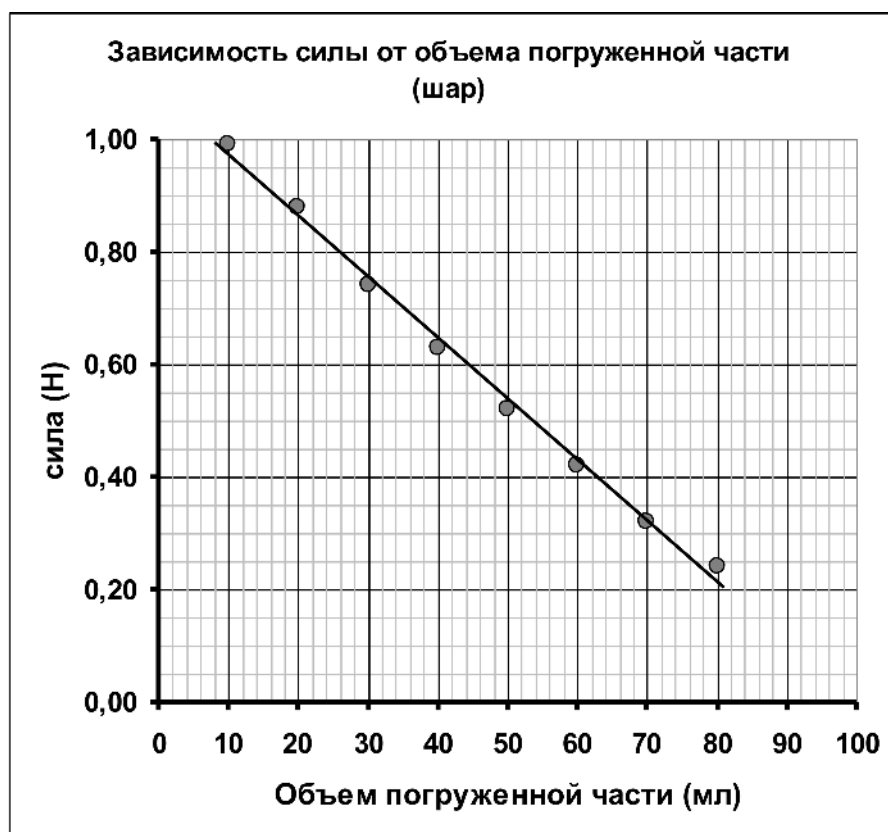


Таблица 2.

| V, мл | F, Н |
|-------|------|
| 10    | 0,99 |
| 20    | 0,88 |
| 30    | 0,74 |
| 40    | 0,63 |
| 50    | 0,52 |
| 60    | 0,42 |
| 70    | 0,32 |
| 80    | 0,24 |

1.6 Коэффициент наклона графика равен

$$a = -(0,011 \pm 0,001) \frac{H}{\text{мл}}. \quad (5)$$

Откуда находим плотность воды

$$\rho = -\frac{a}{g} = (1,1 \pm 0,1) \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (6)$$

## Часть 2. Объем шарового сегмента.

2.1 Результаты градуировочных измерений приведены в Таблице 3 и на графике.

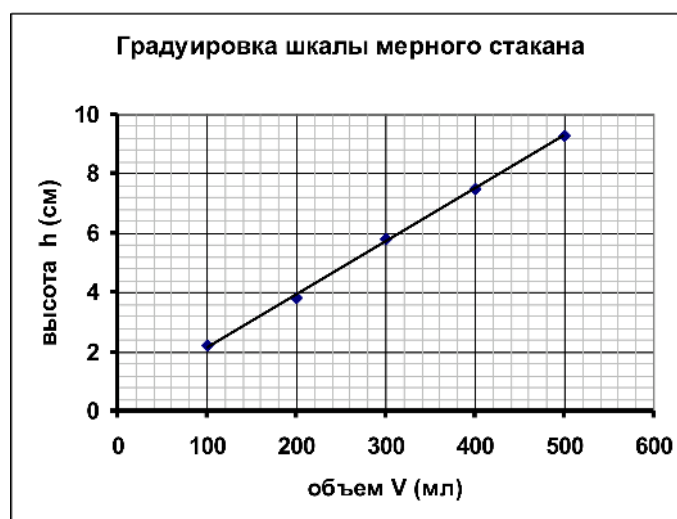


Таблица 3.

| V, мл | H, см |
|-------|-------|
| 100   | 2,2   |
| 200   | 3,8   |
| 300   | 5,8   |
| 400   | 7,5   |
| 500   | 9,3   |

2.2 Параметры зависимости  $V = kh + c$  имеют следующие численные значения

$$k = 55,9 \text{ см}^2$$

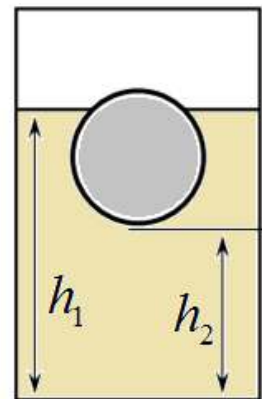
$$c = -19,3 \text{ см}^3 \quad (7)$$

Параметр  $k$  имеет смысл площади поперечного сечения стакана.

2.3 Для измерения глубины погружения и объема сегмента следует измерять следующие величины по миллиметровой шкале:  $h_1$  - высота уровня воды в стакане;  $h_2$  - высота, на которой находится нижняя точка шара. Тогда объем погруженного сегмента шара рассчитывается по формуле

$$V = k(h_1 - h_0) \quad (8)$$

Где  $h_0$  - высота уровня воды в стакане без погруженного шара. Высота сегмента равна



$$h = h_1 - h_2. \quad (9)$$

Результаты измерений этих величин при различных степенях погружения шарика в стакан, а также результаты необходимых расчетов приведены в Таблице 4. В эксперименте  $h_0 = 6,1 \text{ см}$

Таблица 4.

| $h_1$ , см | $h_2$ , см | $h = h_1 - h_2$ | $(h_1 - h_0)$ | $V$ , мл | $\xi$ | $Y$   |
|------------|------------|-----------------|---------------|----------|-------|-------|
| 6,1        | 5,5        | 0,6             | 0,0           | 0,00     | 0,222 | 0,000 |
| 6,2        | 5,2        | 1,0             | 0,1           | 5,59     | 0,370 | 0,659 |
| 6,4        | 4,9        | 1,5             | 0,3           | 16,77    | 0,556 | 0,879 |
| 6,5        | 4,6        | 1,9             | 0,4           | 22,36    | 0,704 | 0,730 |
| 6,7        | 4,2        | 2,5             | 0,6           | 33,54    | 0,926 | 0,633 |
| 7,1        | 3,7        | 3,4             | 1,0           | 55,90    | 1,259 | 0,570 |
| 7,3        | 3,4        | 3,9             | 1,2           | 67,08    | 1,444 | 0,520 |
| 7,4        | 2,9        | 4,5             | 1,3           | 72,67    | 1,667 | 0,423 |
| 7,5        | 2,6        | 4,9             | 1,4           | 78,26    | 1,815 | 0,384 |
| 7,6        | 2,3        | 5,3             | 1,5           | 83,85    | 1,963 | 0,352 |

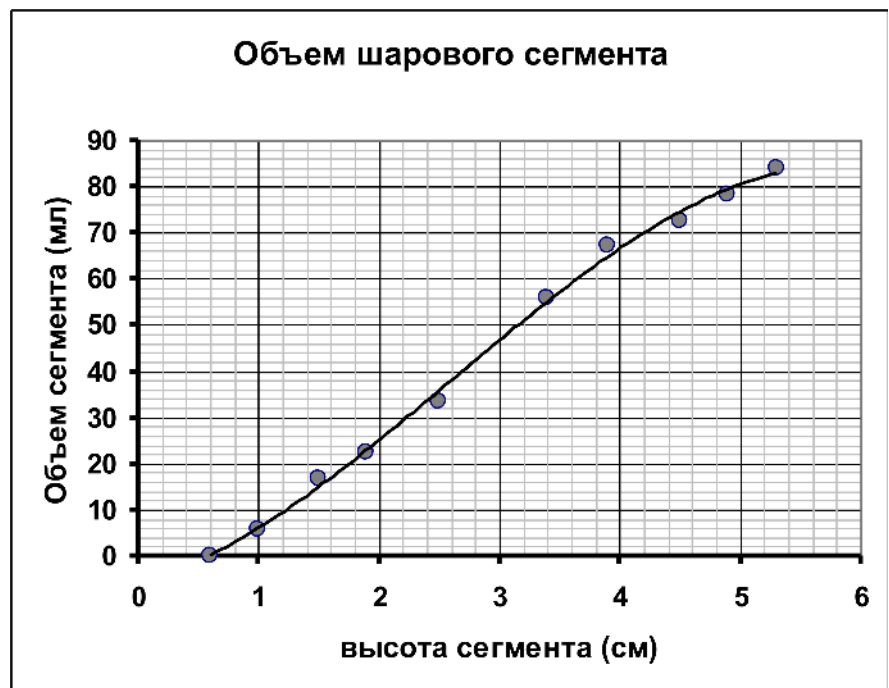
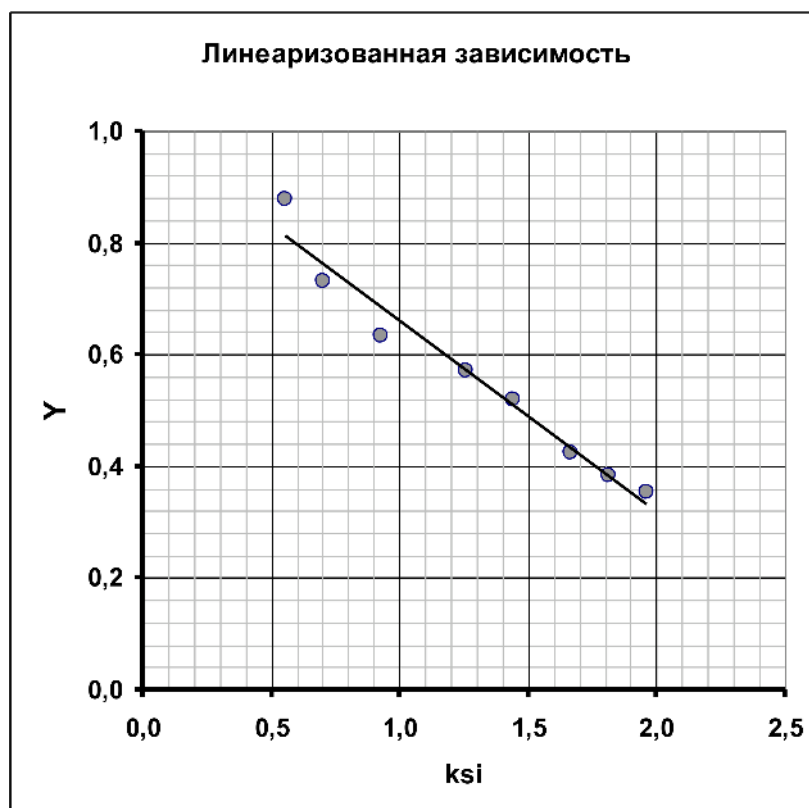


График полученной зависимости показан на рисунке.

2.4 Для расчетов коэффициентов в формуле для объема сегмента  $V = \pi R^3(a\xi^2 + b\xi^3)$ , представим ее в линеаризованном виде

$$Y = \frac{V}{\pi R^3 \xi^2} = a + b\xi \quad (10)$$



где  $R$  - радиус шара,  $\xi = \frac{h}{R}$ . Результаты расчетов величин  $\xi$  и  $Y$  приведены в двух последних столбцах таблицы 4. График этой линеаризованной зависимости близок к линейному. По этому графику находим, что  $a \approx 1$ ,  $b \approx -\frac{1}{3}$ . Заметим, что эти значения можно найти по двум известным значениям :  $Y = \frac{2}{3}$  при  $\xi = 1$  (шарик погружен на половину);  $Y = \frac{4}{3}$  при  $\xi = 2$  (шарик погружен полностью).