

-2. Водяное отопление

Условие

Задание 9-2. Водяное отопление.

Часто для обогрева помещений использую горячую воду. В данной задаче анализируются различные способы такого обогрева, если имеется ограниченная порция горячей воды.

Итак, необходимо обогреть комнату (например, парилку в бане), начальная температура которой $t_0 = 10^\circ C$.

Теплоемкость комнаты равна C_0 (это полная теплоемкость, т.е. сумма произведение удельных теплоемкостей на массы различных предметов в комнате, включая и воздух $C_0 = ct$). Для нагревания используется горячая вода, температура которой равна $t_1 = 70^\circ C$. Теплоемкость всей имеющейся воды равна $C_1 = 2C_0$ (это тоже произведение удельной теплоемкости воды на ее массу).

Во всех пунктах данной задачи потерями теплоты в окружающую среду будем пренебрегать.

Сначала рассмотрим примитивный способ обогрева: горячую воду целиком приносим в комнату и ждем установления теплового равновесия.

1. Рассчитайте конечную температуру комнаты t при таком способе обогрева.

Оказывается, что имеется более эффективный способ нагрева. Разделим воду на N одинаковых частей. Затем занесем в комнату первую порцию воды, дождемся установления теплового равновесия (обозначим установившуюся температуру в комнате после первой порции воды x_1), затем вынесем первую порцию воды и внесем вторую порцию воды (после нее температура в комнате x_2) и т.д. до последней порции воды температура в комнате x_N и будет конечной температурой $x_N = t$.

2. Получите формулу, позволяющую рассчитать температуру после k -той порции x_k через предыдущее значение x_{k-1} и другие известные по условию величины.

3. Рассчитайте значения конечной температуры в комнате при делении воды на 2 и 3 равные порции.

4. Получите общую формулу для конечной температуры в комнате при делении воды на N равных частей. В эту формулу должны входить только заданные в условии величины.

Подсказка: Рассмотрите величины $\Delta x_k = x_k - t_1$ - разность между температурой в комнате и температурой горячей воды.

5. Численно оцените, до какой максимальной температуры можно нагреть комнату таким способом.

Решение

Задание 9-2. Водяное отопление. Решение.

1. Описание примитивного способа обогрева строится на примитивном уравнении теплового баланса:

$$C_0(t_0 - t) = 2C_0(t - t_1). \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что конечная температура комнаты равна

$$t = \frac{t_0 + 2t_1}{3} = 50^\circ. \quad (2)$$

2. Пусть температура комнаты равна x_{k-1} , тогда его теплообмен с очередной порцией воды описывается следующим уравнением теплового баланса

$$C_0(x_{k-1} - x_k) = \frac{2C_0}{N}(x_k - t_1). \quad (3)$$

Перепишем это уравнение в виде «закона сохранения»:

$$x_{k-1} + \frac{2}{N}t_1 = \left(1 + \frac{2}{N}\right)x_k, \quad (4)$$

Из которого находим требуемую формулу

$$x_k = \frac{x_{k-1} + \frac{2}{N}t_1}{1 + \frac{2}{N}}. \quad (5)$$

3. Последовательный расчет по этой формуле дает следующие результаты. При разбиении на 2 порции конечная температура равна $t^{(2)} = 55^\circ$ При разбиении на 3 порции $t^{(3)} = 57^\circ$

4. Для получения формулы в общем виде запишем $x_k = t_1 + \Delta x_k$. Если подставить это выражение в уравнение (4), то после простых преобразований получим:

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_{k-1}}{1 + \frac{2}{N}}. \quad (6)$$

Таким образом, величины Δx_k образуют геометрическую прогрессию, поэтому

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_0}{\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N}. \quad (7)$$

Или окончательно

$$t = x_N = t_1 + \frac{t_0 - t_1}{\left(1 + \frac{2}{N}\right)^N}. \quad (3)$$

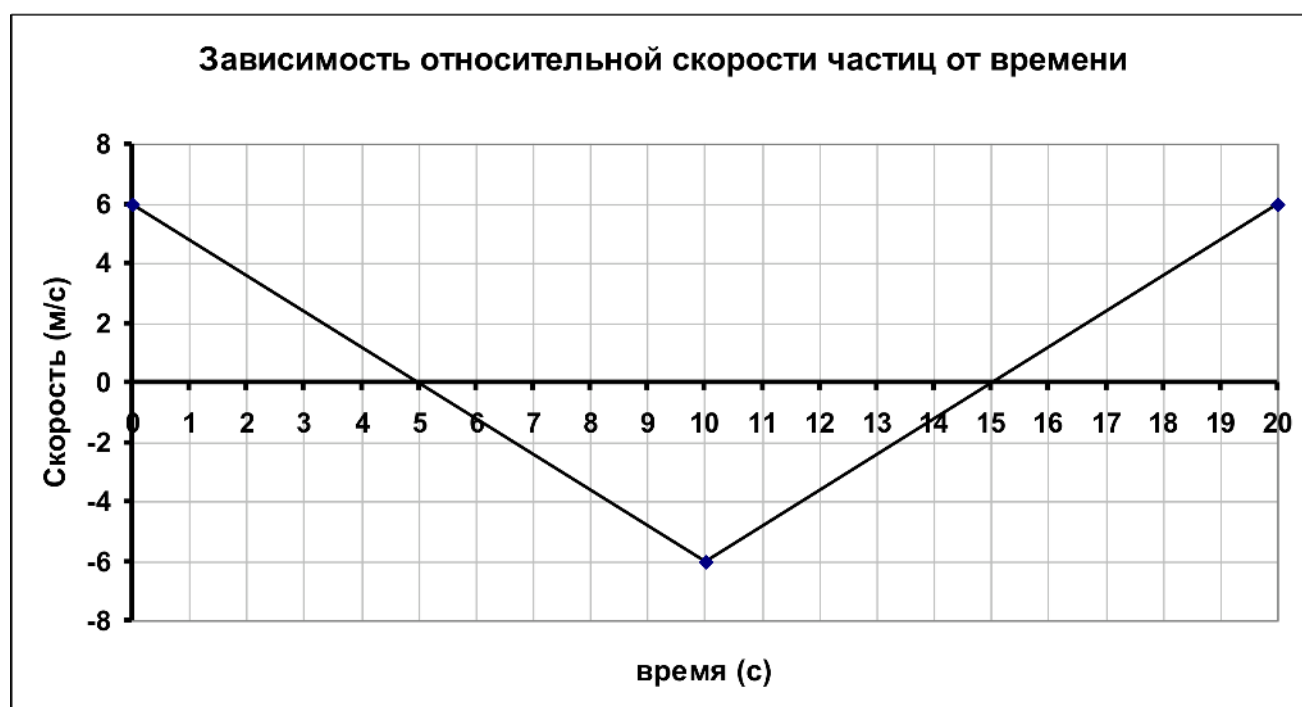
5. Численные расчеты по этой формуле дают следующие результаты

N	1	5	10	50
t	50	58,84	60,31	61,56

Следовательно, можно считать, что максимальная температура при нагревании частями примерно равна 62°.

Задание 9-1. Просто кинематика. Решение.

Часть 1. Известна зависимость скорости от времени.



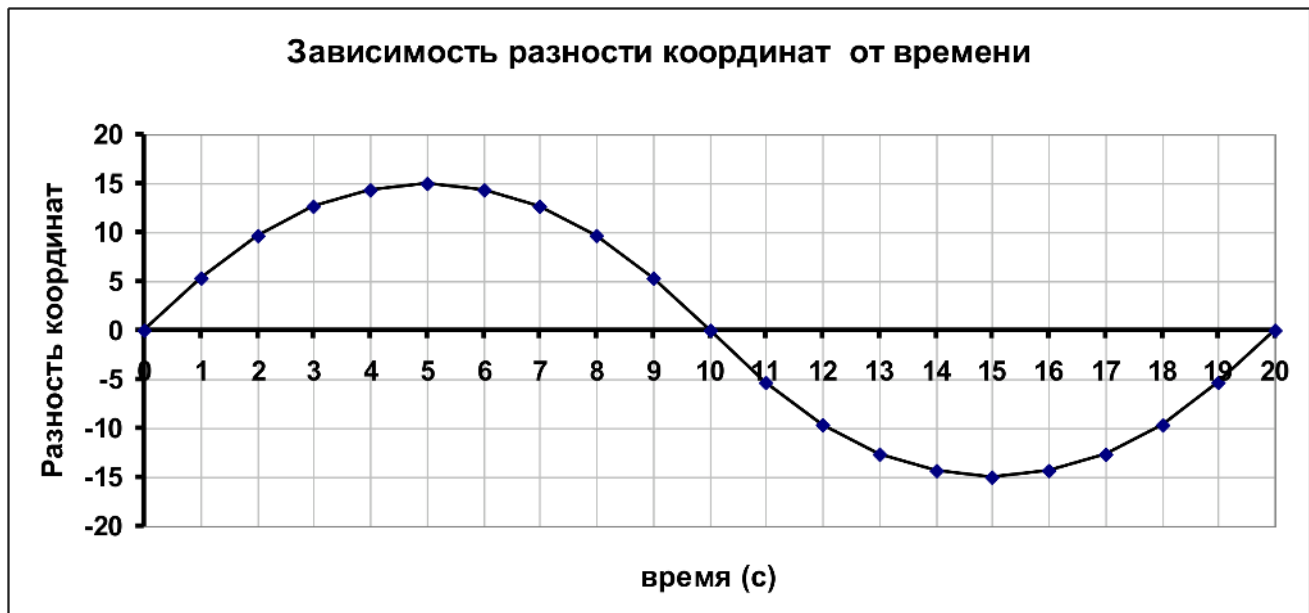
Самый простой способ решения построить зависимость относительной скорости от времени, которая имеет предельно простой вид. Площадь под этим графиком численно равна изменению разности координат частиц.

Из этого графика следуют ответы на поставленные вопросы.

1.1 Расстояния между частицами максимально в моменты времени, когда их скорости равны (т.е. относительная скорость равна нулю). Это условие выполняется в моменты времени 5 и 15 с.

1.2 Координаты частиц равны в моменты времени 0, 10 и 20 с, когда разности скоростей максимальны.

1.3 График зависимости разности координат от времени показан на рисунке. Его можно построить «по точкам» с помощью графика относительной скорости.



Часть 2. Известна зависимость скорости от координаты.



2.1 По приведенному графику не сложно заметить, что каждый отрезок пути, на котором частица движется с постоянной скоростью, частица проходит за 10 с. И через каждые 10 с скорость частицы уменьшается на 1 м/с. Вторая частица начинает движение тоже через 10 с. Следовательно, скорость второй частицы все время больше скорости первой на величину $\Delta v = 1,0 \text{ м/с}$. Однако, к моменту старта второй частицы первая прошла расстояние $l_0 = 50 \text{ м}$. Поэтому зависимость расстояния между частицами от времени имеет вид

$$l = l_0 - \Delta v t.$$

2.2 Заметим, что время движения первой частицы равно 50 с. Поэтому через 40 с после старта второй частицы, расстояние между частицами будет равно 10 м.