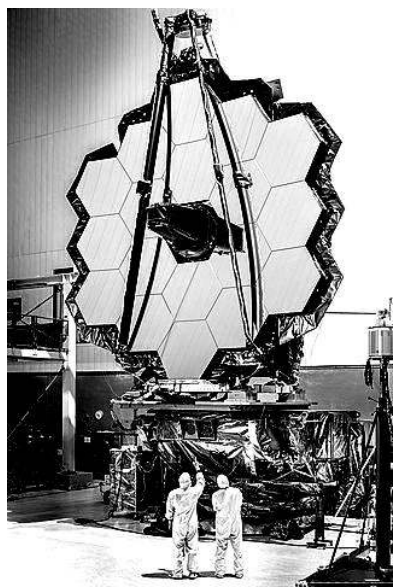


Ариан-5

Условие

Задание 10-2. Космический инфракрасный телескоп Джеймс Уэбб.



25 декабря 2021 года с космодрома Куру при помощи ракеты «Ариан-5» был успешно запущен космический аппарат, снабженный инфракрасным телескопом «Джеймс Уэбб» (англ. *James Webb Space Telescope, JWST*). В январе 2022 года этот аппарат вышел в точку своей постоянной дислокации. Положение телескопа будет оставаться практически неизменным относительно Земли, причем все время он будет находиться в тени Земли.

В данной задаче вам необходимо рассчитать положение этой научной станции. На первый взгляд — такое положение космического аппарата невозможно: чтобы он все время оставался в тени Земли (т.е. все время находился на одной прямой с Солнцем и Землей) угловая скорость его вращения должна быть равна угловой скорости движения Земли. Но... по 3 закону Кеплера период обращения однозначно связан с радиусом орбиты!!!

Разрешение парадокса заключается в том, что центр орбиты Земли не совпадает с центром Солнца: два взаимодействующих тела вращаются вокруг общего центра масс. Для упрощения расчетов примем следующие приближения: - при рассмотрении движения Земли и Солнца влиянием других планет пренебрегаем (рассматриваем задачу двух тел); - тем более движение космического аппарата не влияет на движение Земли; - орбита Земли является окружностью.

Масса Солнца $M_C = 2,0 \cdot 10^{30}$ кг. Масса Земли $M_3 = 6,0 \cdot 10^{24}$ кг. Радиус орбиты Земли $R = 1,5 \cdot 10^8$ км.

Рассмотрим задачу «двух» тел: два массивных тела (масса одного из них m_1 , масса второго m_2 , для определенности будем считать, что $m_1 > m_2$) движутся только под действием силы гравитационного взаимодействия по круговым орбитам. Расстояние между телами остается неизменным и равным R .

1. Докажите, что центры окружностей, по которым движутся тела, совпадают с центром масс системы этих тел.
2. Найдите радиусы траекторий R_1 , R_2 обоих тел.

Добавим в рассматриваемую систему третье тело, масса которого m_0 значительно меньше масс первых двух тел. Будем считать, что это тело все время находится на прямой, проходящей через центры Солнца и Земли. Можно показать, что на этой прямой существует только три точки, в которых может находиться третье тело, оставаясь все время неподвижным относительно Земли и Солнца (эти точки называются точками Лагранжа).

3. Получите точное уравнение, позволяющие определить расстояние x от менее массивного тела m_2 (т.е. Земли) до точки Лагранжа на прямой Земля – Солнце, находящейся за орбитой Земли.

Масса Солнца значительно больше массы Земли, поэтому полученное уравнение можно решить приближенно. Используйте тот факт, что расстояние от центра Солнца до центра масс системы Солнце – Земля значительно меньше радиуса земной орбиты.

4. Рассчитайте, на каком расстоянии от Земли располагается аппарат JWST.

Математическая подсказка: при $x \ll R$ можно использовать приближенную формулу

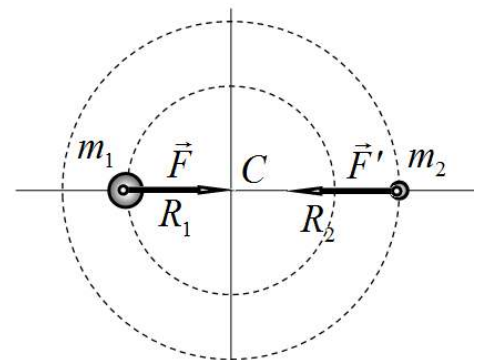
$$\frac{1}{(R+x)^2} \approx \frac{1}{R^2} - \frac{2}{R^3}x.$$

Решение

Задание 10-2. Космический инфракрасный телескоп Джеймс Уэбб. Решение.

1. На основании 2 закона Ньютона и закона всемирного тяготения запишем уравнения, описывающие круговые движения обоих тел:

$$\begin{aligned} m_1 \omega^2 R_1 &= G \frac{m_1 m_2}{R^2} \\ m_2 \omega^2 R_2 &= G \frac{m_1 m_2}{R^2} \end{aligned} \quad (1)$$



Здесь ω - угловая скорость движения тел. Из этих уравнений следует, что радиусы орбит удовлетворяют условию

$$m_1 R_1 = m_2 R_2. \quad (2)$$

Это соотношение указывает, что центр окружностей является центром масс системы двух тел.

2. Сумма радиусов равна расстоянию между телами

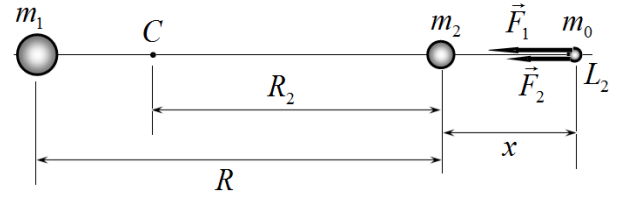
$$R_1 + R_2 = R. \quad (3)$$

Из уравнений (2) - (3) находим радиусы орбит:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} R \\ R_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} R \end{aligned} \quad (4)$$

3. Для тела массы m_0 , находящегося в точке Лагранжа, справедливо уравнение

$$m_0 \omega^2 (R_2 + x) = G \frac{m_0 m_1}{(R + x)^2} + G \frac{m_0 m_2}{x^2}. \quad (5)$$



Из уравнения (1) выразим значение угловой скорости

$$\omega^2 = G \frac{m_2}{R^2} \frac{1}{R_1} = G \frac{m_2}{R^2} \frac{m_1 + m_2}{m_2 R} = G \frac{m_1 + m_2}{R^3}$$

И подставим его в уравнение (5), также как выражение для R_2 :

$$\begin{aligned} G \frac{m_1 + m_2}{R^3} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} R + x \right) &= G \frac{m_1}{(R + x)^2} + G \frac{m_2}{x^2} \Rightarrow \\ \frac{m_1 + m_2}{R^3} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} R + x \right) &= \frac{m_1}{(R + x)^2} + \frac{m_2}{x^2} \Rightarrow \\ \frac{m_1}{R^2} + \frac{m_1 + m_2}{R^3} x &= \frac{m_1}{(R - x)^2} + \frac{m_2}{x^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, разделим уравнение на массу большего тела и введем отношение масс массивных тел $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, в результате получим уравнение для расчета значения расстояния от второго тела до первой точки Лагранжа:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1 + \mu}{R^3} x = \frac{1}{(R + x)^2} + \frac{\mu}{x^2} \quad (7)$$

4. Очевидно, что масса спутника значительно меньше массы Земли, поэтому его положение совпадает с точкой Лагранжа. Поэтому для расчета расстояния до Земли следует решить уравнение (7). Точное решение этого уравнения затруднительно. Однако, масса Земли значительно меньше массы Солнца $\mu = 3,0 \cdot 10^{-6} \ll 1$, поэтому расстояние до Земли значительно меньше радиуса Земной орбиты $x \ll R$ (который практически равен расстоянию от центра

Земли до центра Солнца). В этом случае можно решить данное уравнение приближенно (но с высокой точностью), для чего следует провести следующее разложение:

$$\frac{1}{(R+x)^2} \approx \frac{1}{R^2} - \frac{2}{R^3}x. \quad (8)$$

После этого разложения уравнение решается элементарно:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1+\mu}{R^3}x = \frac{1}{(R+x)^2} + \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{R^2} + \frac{1+\mu}{R^3}x = \frac{1}{R^2} - \frac{2}{R^3}x + \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow \quad (9)$$

$$\frac{3+\mu}{R^3}x = \frac{\mu}{x^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R$$

Численный результат:

$$x = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}R = 1,5 \cdot 10^6 \text{ км}. \quad (10)$$