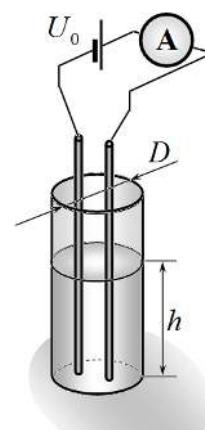


-3. Форма полости

Условие

Задание 9-3. Форма полости.

Для определения размеров внутренней полости сосуда можно использовать электрические измерения. Два тонких проводящих параллельных проводящих стержня опускают вертикально в сосуд с жидкостью и измеряют электрическое сопротивление между ними. В процессе всех измерений расстояние между стержнями остается неизменным, используется одна и та же жидкость. Стержни располагаются вблизи середины сосудов.



Часть 1. Цилиндрические сосуды.

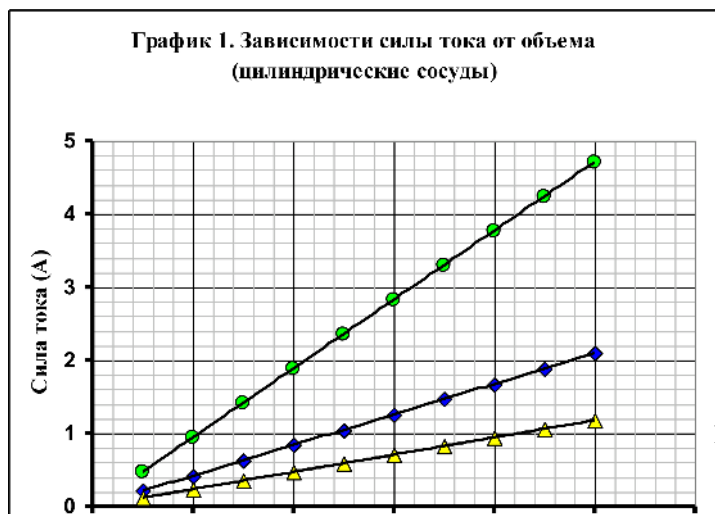
Стержни опускают в вертикальный цилиндрический сосуд до его дна, в который медленно добавляют жидкость. К стержням подключают источник постоянного напряжения $U_0 = 4,5$ В и последовательно подключенный амперметр.

Проведены измерения зависимости силы электрического тока I (в Амперах) от объема налитой жидкости V (в миллилитрах – см^3). Результаты измерений для трех разных сосудов показаны на Графике 1.

Оказалось, что полученные все полученные зависимости оказались График 1. Зависимости силы тока от объема линейными и описываются простой формулой

$$I = kV \quad (1)$$

Коэффициент k зависит от диаметра сосуда. Численные значения этого коэффициента для разных значений внутренне-



го диаметра D (в см) сосуда приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

D , см	$k \cdot 10^3$, А·см ⁻³
4,0	9,4
6,0	4,2
8,0	2,4

1.1 Найдите теоретическую зависимость электрического сопротивления R между стержнями от высоты уровня жидкости в сосуде $h - R(h)$. Эта функция должна содержать только переменную h и численные параметры (или один параметр). Укажите физический смысл этих параметров (параметра) функции $R(h)$.

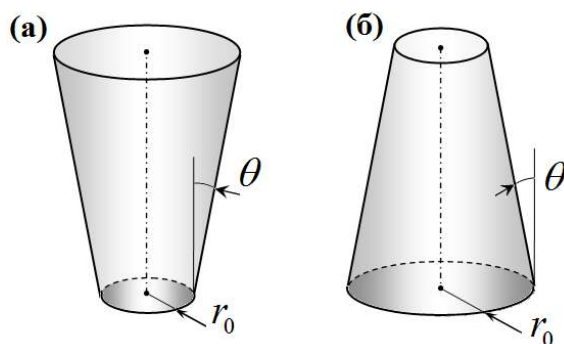
1.2 Используя данные Таблицы 1, рассчитайте численные значения параметров (параметра) зависимости $R(h)$ для всех значений диаметров сосудов.

1.3 Укажите, подтверждается или нет полученная Вами в п.1.1 теоретическая формула.

Часть 2. Конический сосуд.

Стержни опускают до дна в сосуд, внутренняя полость которого имеет вид усеченного конуса. Заметим, что форма полости может иметь вид либо (а), либо (б), как показано на рисунке – далее Вам будет необходимо определить, в каком сосуде проведены измерения. Затем с помощью той же электрической схемы проводят измерения зависимости электрической силы тока I между стержнями от объема V налитой в сосуд жидкости. Результаты измерений этой зависимости приведены в Таблице 2 и на Графике 2.

Результаты измерений имеют некоторые погрешности.



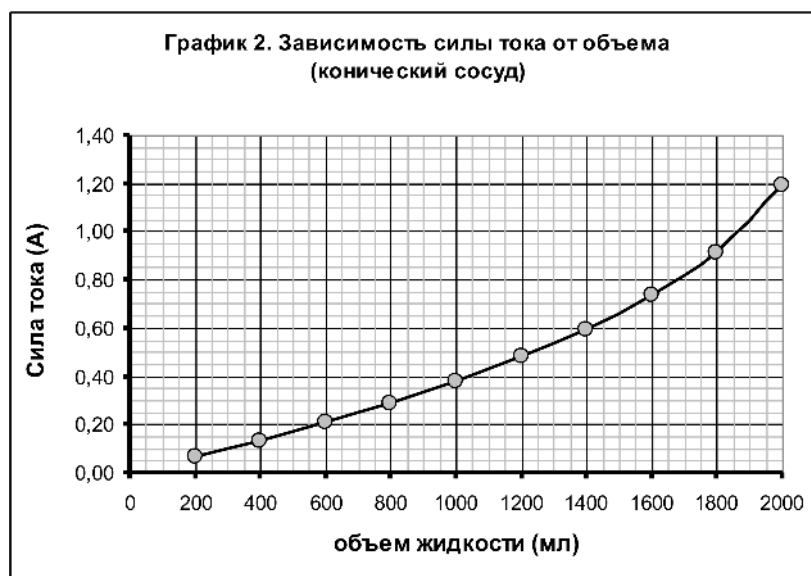


Таблица 2.

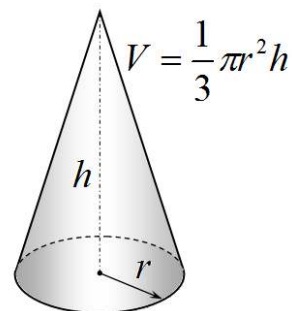
$V, \text{см}^3$	$I, \text{А}$
200	0,064
400	0,133
600	0,208
800	0,289
1000	0,379
1200	0,479
1400	0,596
1600	0,735
1800	0,915
2000	1,189

2.1 Укажите, какой сосуд (а), или (б) использовался в данном эксперименте. 2.2 Используя экспериментальные данные Таблицы 2, постройте график зависимости радиуса сосуда r от расстояния до его дна $h - r(h)$. Рассчитайте с максимальной точностью геометрические параметры сосуда – радиус основания r_0 и угол θ , который образует боковая стенка сосуда с вертикалью. Приведите все формулы, по которым Вы провели расчеты.

*Подсказка. Можно считать, что при добавлении очередной порции жидкости в сосуд изменение уровня жидкости в сосуде значительно меньше радиуса дна сосуда.

Примечание. Объем прямого кругового конуса равен одной трети от произведения площади основания на высоту:*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Решение

Задание 9-3. Форма полости.

Часть 1. Цилиндрические сосуды.

1.1 Сопротивление между стержнями полностью определяется сопротивлением жидкости, если сопротивление стержней и подводящих проводов пренебрежимо мало. Далее: электрический ток, протекающий между стержнями в жидкости (в плоскости перпендикулярной стержням), локализован в малой области вблизи стержней. Поэтому измеряемое сопротивление не должно зависеть от диаметра сосуда, который заметно превышает расстояние между стержнями. Поэтому Электрическое сопротивление между стержнями должно быть обратно пропорционально высоте уровня налитой жидкости

$$R = \frac{b}{h}. \quad (1)$$

Параметр b имеет смысл электрического сопротивления слоя жидкости толщиной в 1 см.

1.2 По закону Ома измеряемая сила тока равна:

$$I = \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{b} h = \frac{U_0}{b} \frac{4V}{\pi D^2}. \quad (2)$$

При выводе использована формула для объема цилиндра $V = \frac{\pi D^2}{4} h$, из которой выражена зависимость высоты уровня жидкости от объема налитой жидкости. Таким образом, параметр k в экспериментальной зависимости силы тока от объема жидкости равен

$$k = \frac{4U_0}{b\pi D^2}. \quad (3)$$

Эта формула позволяет вычислить значения параметра b для всех использованных сосудов

$$b = \frac{4U_0}{k\pi D^2}. \quad (3)$$

Значение параметра b для трех различных диаметров сосудов приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

D , см	k , Ом·см ⁻³	b , Ом·см
4,0	578	38,10
6,0	1301	37,90
8,0	2312	37,94

1.3 Для всех сосудов значение этого параметра примерно одинаковое, поэтому что подтверждает теоретическую формулу (1) и сделанные при ее выводе предположения.

Часть 2. Конический сосуд.

2.1 Как следует из результатов части 1, сопротивление между стержнями зависит только от высоты уровня жидкости в сосуде и не зависит от его формы. Кроме того, сила тока прямо пропорциональна высоте уровня жидкости h . Из приведенного графика зависимости проводимости от объема налитой жидкости следует, что высота уровня жидкости возрастает быстрее, чем возрастает объем жидкости. Следовательно, сосуд сужается, т.е. использован сосуд (б).

2.2 Для каждого значения объема налитой жидкости V_n по измеренному значению сопротивления $R_n = \frac{U_0}{I_n}$ с помощью формулы (2) можно рассчитать высоту уровня жидкости

$$h_n = \frac{b}{R_n} = \frac{b}{U_0} I_n \quad (3)$$

Точный теоретический расчет зависимости уровня жидкости в сосуде от ее объема возможен, но является слишком громоздким. Поэтому следует воспользоваться «подсказкой» и упростить методику расчетов. Эти приближенные методы, конечно, имеют некоторую погрешность, но она вполне допустима, так приведенные результаты также имеют некоторую погрешность.

Вычислим изменение уровня жидкости $\Delta h_n = h_n - h_{n-1}$ при добавлении очередной порции жидкости объемом ΔV . С хорошей точностью можно считать, что этот тонкий слой примерно имеет форму цилиндра, поэтому его объем равен

$$\Delta V_n = \pi \bar{r}_n^2 \Delta h_n. \quad (4)$$

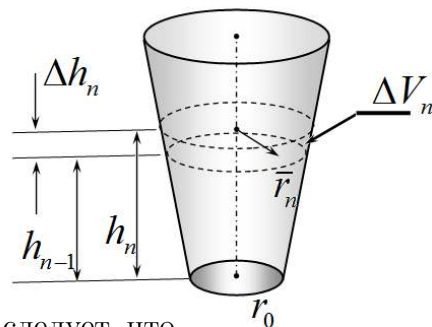
Здесь $\bar{r}_n$ «средний» радиус слоя жидкости толщиной $\Delta h_n = h_n - h_{n-1}$. Приближенно можно считать, что $\bar{r}$ есть радиус сосуда на средней высоте $\bar{h}_n = \frac{1}{2}(h_{n-1} + h_n)$. Из формулы (4), следует, что

$$\bar{r}_n = \sqrt{\frac{\Delta V_n}{\pi \Delta h_n}}. \quad (5)$$

Таким образом, требуемая зависимость радиуса сосуда от расстояния до дна задается точками с координатами $(h_n, \bar{r}_n)$. Результаты расчетов этих точек приведены в Таблице 2.

Теоретический тур. Вариант 2. 9 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 10

Таблица 2.



$V_n, \text{см}^3$	$I, \text{А}$	$h_n, \text{см}$	$\Delta h_n, \text{см}$	$\bar{h}_n, \text{см}$	$\bar{r}_n, \text{см}$
200	0,064	0,540			
400	0,133	1,123	0,583	0,832	10,45
600	0,208	1,756	0,633	1,440	10,03
800	0,289	2,440	0,684	2,098	9,65
1000	0,379	3,200	0,760	2,820	9,15
1200	0,479	4,045	0,844	3,623	8,68
1400	0,596	5,033	0,988	4,539	8,03
1600	0,735	6,207	1,174	5,620	7,36
1800	0,915	7,727	1,520	6,967	6,47
2000	1,189	10,040	2,314	8,884	5,25



График зависимости $\bar{r}_n(\bar{h}_n)$ приведен на следующем рисунке. Полученная зависимость линейна, что, во-первых, косвенно подтверждает применимость примененного приближенного метода; во-вторых, указывает, что сосуд действительно имеет форму расширяющегося усеченного конуса.

Для сужающейся конической поверхности теоретически эта зависимость описывается формулой

$$r = r_0 - h \cdot \operatorname{tg} \theta. \quad (6)$$

С помощью полученного графика определяем

$$\begin{aligned} r_0 &= 11,0 \text{ см} \\ \operatorname{tg} \theta &= 0,65 \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 33^\circ \end{aligned} \quad (7)$$

Теоретический тур. Вариант 2. 9 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 11