

-2. Неупругий удар

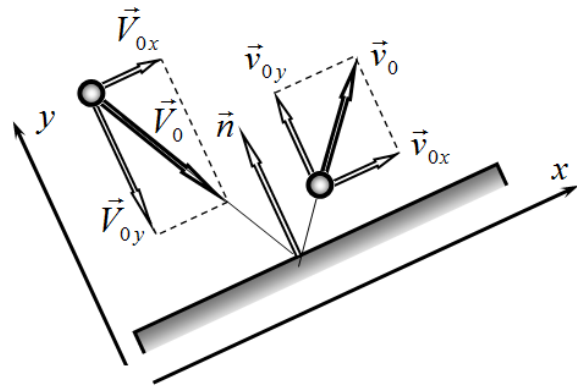
Условие

Задание 9-2. Неупругий удар.

При описании удара движущегося тела о неподвижную стенку часто используется модель абсолютно упругого удара, при котором модуль скорости тела не изменяется, а угол падения равен углу отражения. Однако такая модель не всегда корректно описывает реальные столкновения.

Более общей является модель неупругого удара, которая используется в данной задаче. Пусть движущееся тело (которое рассматривается как материальная точка) сталкивается с неподвижной плоской поверхностью. Направим ось Ox вдоль поверхности, а ось Oy перпендикулярно ей.

Вектор скорости движущегося тела $\vec{V}_0$ удобно разложить на две составляющие: параллельную плоскости - $\vec{V}_{0x}$ (тангенциальная составляющая); перпендикулярную плоскости - $\vec{V}_{0y}$ (нормальная составляющая). Обозначим вектор скорости после удара $\vec{v}_0$. Будем считать, что проекции этого вектора связаны с компонентами вектора скорости до удара следующими соотношениями:



$$\begin{aligned} v_{0x} &= \gamma_1 V_{0x} \\ v_{0y} &= -\gamma_2 V_{0y} \end{aligned} \quad (1)$$

В этих формулах безразмерные коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2 < 1$ называются коэффициентами восстановления. Коэффициент γ_1 , описывающий изменение тангенциальной компоненты скорости, определяется силой трения, действующей на тело в ходе столкновения. Коэффициент γ_2 , описывающий изменение нормально компоненты скорости, определяется упругими свойствами поверхности и движущегося тела.

Во всех частях данной задачи используется модель, в которой

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0,80. \quad (2)$$

Т.е. модули обеих проекций скорости при ударе уменьшаются в одно и тоже число раз.

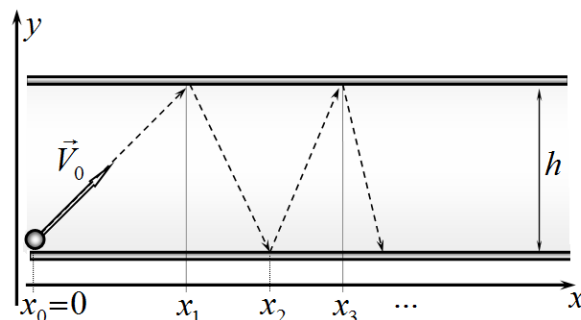
Подсказка. При решении данной задачи вам может понадобиться формула для суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}. \quad (3)$$

Все, приведенные в условии рисунки, являются схематическими и носят иллюстративный характер. Ссылаться на них в решении задачи не следует!

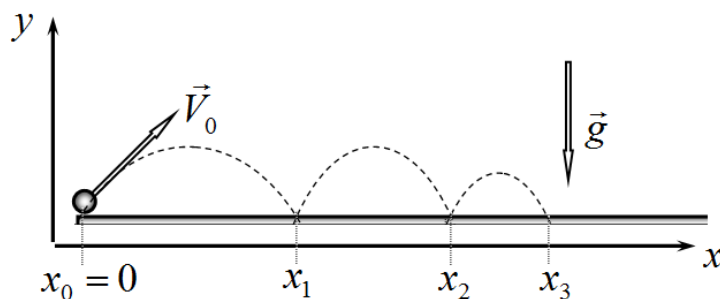
Часть 1. Движение в горизонтальной плоскости.

На горизонтальной плоскости на расстоянии h друг от друга закреплены две параллельные стенки. Между этими стенками движется небольшое тело (материальная точка), периодически сталкиваясь со стенками. Введем систему координат, ось Ox которой направлена параллельно стенкам, а ось Oy перпендикулярно им. В начальный момент времени тело касается одной из стенок (в начале координат). Телу толчком сообщают скорость $\vec{V}_0$, такую, что проекции этого вектора на ось координат равны $V_{0x} = V_{0y} = v_0$. Трением тела о горизонтальную поверхность можно пренебречь.



1.1 Получите общую формулу для координат точек столкновения тела со стенками $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 1.2 В выбранном Вами масштабе постройте траекторию движения тела до его 5-го столкновения со стенками. 1.3 Найдите, чему равна средняя скорость движения шарика за время от начала движения до n -го столкновения со стенками.

Часть 2. Прыжки по горизонтальной поверхности.

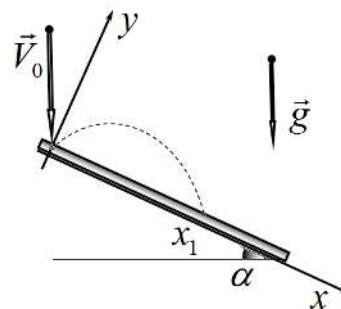


Рассматриваемое тело может двигаться в вертикальной плоскости, испытывая столкновения с плоской горизонтальной поверхностью. В начальный момент времени тело находится в начале координат (ось Ox горизонтальна, ось Oy - вертикальна), и ему сообщают начальную скорость $\vec{V}_0$, такую, что проекции этого вектора на оси координат равны $V_{0x} = V_{0y} = v_0$. Ускорение свободного падения равно $\vec{g}$, сопротивление воздуха не учитывать.

2.1 Получите общую формулу для координат точек столкновения тела с горизонтальной поверхностью $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 2.2 Найдите, на какое максимальное расстояние вдоль оси Ox сместится шарик.

Часть 3. Столкновения с наклонной плоскостью.

Рассматриваемое тело падает вертикально на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. В момент удара о плоскость скорость тела равна $\vec{V}_0$. Совместим начало системы отсчета с точкой первого столкновения тела с наклонной плоскостью. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости, ось Oy перпендикулярно ей.



3.1 Рассчитайте координату x_1 следующего столкновения тела с плоскостью. 3.2 При каком значении γ все «прыжки» тела будут одинаковыми?

Решение

Задание 9-2. Неупругий удар.

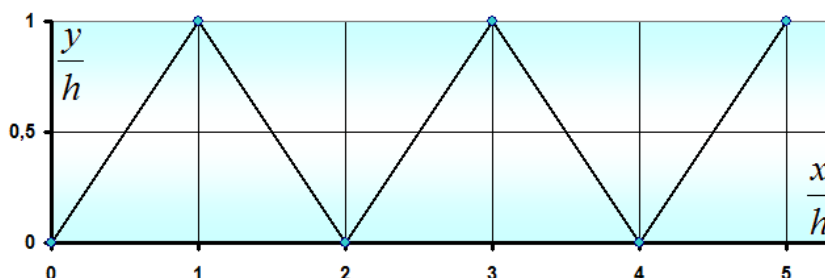
Часть 1. Движение в горизонтальной плоскости.

1.1 Согласно принятой модели $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 0,80$ обе компоненты скорости уменьшаются в одно и то же число раз, поэтому образуют геометрическую прогрессию со знаменателем γ , после n ударов они будут равны:

$$v_{xn} = v_{yn} = v_0 \gamma^n. \quad (1)$$

Так как проекции скорости на выбранные оси координат остаются равными после каждого столкновения, то тело всегда будет двигаться под углами $\pm 45^\circ$ к оси Ox . Следовательно, между ударами будет смещаться на расстояние h , тогда координаты точек столкновения будут равны

$$x_n = nh. \quad (2)$$



1.2 В качестве единицы масштаба разумно выбрать расстояние между стенками. Тогда траектория движения будет очень простой, она показана на рисунке.

1.3 Так как проекции скорости движения убывают в соответствии с формулой (1) времена между столкновениями будут возрастать по закону:

$$\tau_n = \frac{h}{v_0 \gamma^n} = \frac{h}{v_0} \gamma^{-n}. \quad (3)$$

Для определения времени n -го столкновения можно рассчитать с помощью формулы для суммы геометрической прогрессии:

$$t_n = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1} = \frac{h}{v_0} \frac{1 - \gamma^{-n}}{1 - \gamma^{-1}}. \quad (4)$$

Тогда средняя скорость до n -го столкновения будет равна (учетом того, что между ударами тело проходит расстояние $h\sqrt{2}$):

$$\langle v \rangle = \frac{nh\sqrt{2}}{\frac{h}{v_0} \frac{1 - \gamma^{-n}}{1 - \gamma^{-1}}} = v_0 \frac{n(1 - \gamma^{-1})}{1 - \gamma^{-n}}. \quad (5)$$

Часть 2. Прыжки по горизонтальной поверхности.

2.1 Так как компоненты скоростей после каждого удара остаются равными, то после каждого удара тело будет «стартовать» по углом 45° к горизонту. После n ударов компоненты скорости также будут описываться формулой (1):

$$v_{xn} = v_{yn} = v_0 \gamma^n. \quad (6)$$

Теоретический тур. Вариант 2. 9 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 6

Время между двумя столкновениями полностью определяется вертикальной компонентой скорости и равно:

$$\tau_n = \frac{2v_{yn}}{g} = \frac{2v_0 \gamma^n}{g}. \quad (7)$$

Смещение в горизонтальном направлении после n -го равно

$$\Delta x_n = v_{xn} \cdot \tau_n = \frac{2v_0^2 \gamma^{2n}}{g}. \quad (8)$$

Тогда координата n -го удара равна сумме предыдущих смещений

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \frac{2v_0^2}{g} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma^{2i} = \frac{2v_0^2}{g} \frac{1 - \gamma^{2n}}{1 - \gamma^2}. \quad (9)$$

2.2 Из формулы (8) следует, что при $n \rightarrow \infty$ координата x_n стремиться к предельному значению, которое и будет максимальным смещением

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2}{g(1 - \gamma^2)}. \quad (10)$$

Часть 3. Столкновения с наклонной плоскостью.

3.1 Между двумя последовательными ударами движение тела является равноускоренным с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Будем решать задачу в системе отсчета, показанной на рисунке. В этой системе проекции ускорения на оси координат равны:

$$\begin{aligned} g_x &= g \sin \alpha \\ g_y &= -g \cos \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

В момент падения тела на наклонную плоскость (назовем его нулевым ударом) проекции скорости тела на оси координат описываются формулами

$$\begin{aligned} V_{0x} &= V_0 \sin \alpha \\ V_{0y} &= -V_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

После удара эти компоненты скорости в рамках принятой модели удара описываются формулами

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \gamma V_0 \sin \alpha \\ v_{0y} &= \gamma V_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Теоретический тур. Вариант 2. 9 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 7

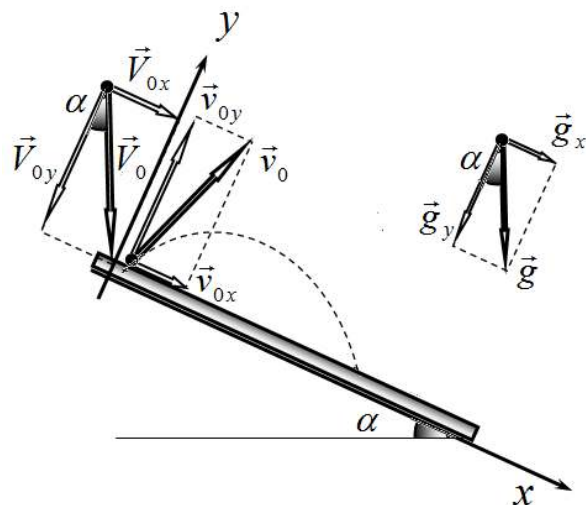
После столкновения с плоскостью закон движения частицы задается функциями:

$$\begin{cases} x(t) = \gamma V_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{g \sin \alpha}{2} t^2 \\ y(t) = \gamma V_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{g \cos \alpha}{2} t^2 \end{cases} \quad (14)$$

В момент падения координата y обращается в нуль, из этого условия легко найти время τ движения до очередного столкновения:

$$y(\tau) = 0 = \gamma V_0 \cos \alpha \cdot \tau - \frac{g \cos \alpha}{2} \tau^2 \Rightarrow \tau = \gamma \frac{2V_0}{g}. \quad (15)$$

Тогда координата x в момент первого удара оказывается равной:



$$\begin{aligned}
x_1 = x(\tau) &= \gamma V_0 \sin \alpha \cdot \tau + \frac{g \sin \alpha}{2} \tau^2 = \gamma V_0 \sin \alpha \cdot \gamma \frac{2V_0}{g} + \frac{g \sin \alpha}{2} \left(\gamma \frac{2V_0}{g} \right)^2 = \\
&= \gamma^2 \frac{4V_0^2 \sin \alpha}{g}.
\end{aligned} \tag{16}$$

3.2 Рассмотрим, как изменяются проекции скоростей частицы при последовательных соударениях. Если изменение координат описывается функциями (14), то изменение проекций скорости подчиняются следующим выражениям

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= \gamma V_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot t \\
v_y(t) &= 0 = \gamma V_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot t
\end{aligned} \tag{17}$$

Тогда непосредственно перед первым (после нулевого) ударом в момент времени $\tau = \gamma \frac{2V_0}{g}$ они оказываются равными:

$$\begin{aligned}
v_x(\tau) &= \gamma V_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot \tau = \gamma V_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot \gamma \frac{2V_0}{g} = 3\gamma V_0 \sin \alpha \\
v_y(\tau) &= 0 = \gamma V_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot \tau = \gamma V_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot \gamma \frac{2V_0}{g} = -\gamma V_0 \cos \alpha
\end{aligned} \tag{18}$$

А сразу после этого удара

$$\begin{aligned}
v_{1,x} &= \gamma(3\gamma V_0 \sin \alpha) = 3\gamma^2 V_0 \sin \alpha \\
v_{1,y} &= \gamma V_0 \cos \alpha
\end{aligned} \tag{19}$$

Обратим внимание, что нормальная составляющая скорости частицы $v_{1,y}$ оказалась равной аналогичной величине после первого удара! Чтобы «прыжки» были одинаковыми, необходимо, чтобы и v_x компонента восстановилась $v_{1,x} = v_{0x}$. Это произойдет если коэффициент восстановления равен

$$\gamma = \frac{1}{3}. \tag{20}$$

Теоретический тур. Вариант 2. 9 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 8