

-3. Шар в потоке

Условие

Задание 11-3. Шар в потоке.

Расчет сил, действующих на различные тела, движущиеся в газах и жидкостях, является чрезвычайно сложной задачей. Уравнения гидро- и аэродинамики очень сложны, их решение возможно только для простых моделей обтекания тел набегающими потоками. Так как эти проблемы имеют громадное практическое значение, то для их решения применяют различные методы и их комбинации. Одним из эффективных (и эффектных) из них является метод размерностей и подобия, который рекомендуется использовать при решении данной задачи.

Введение. Метод размерностей в физике.

Пусть Вам необходимо установить вид зависимости физической величины A от ряда величин $x, y, z, \dots$

$$A = f(x, y, z, \dots). \quad (1)$$

Предположим, что эта зависимость имеет степенной вид

$$A = Cx^\alpha y^\beta z^\gamma \dots, \quad (2)$$

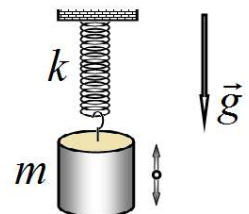
где C - безразмерный численный коэффициент. Любая физическая формула должна удовлетворять условию размерностей, т.е. размерность величины, стоящей справа, должна совпадать с размерностью величины, стоящей слева. Это условие можно записать в виде символического равенства

$$[A] = [x]^\alpha [y]^\beta [z]^\gamma \dots \quad (3)$$

Здесь и далее обозначено $[A]$ - размерность величины A . Равенство (3) иногда позволяет получить систему уравнений для показателей степеней $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Для этого размерности величин следует выразить через основные единицы системы СИ и записать равенства показателей степеней для этих основных единиц. Сразу заметим, что определить значение коэффициента C в уравнении (2) этим способом не возможно, но... и с этой проблемой иногда можно побороться. Как? - что покажем дальше.

Для того, чтобы прочнее усвоить метод размерностей, решите этим методом следующую простую задачку (ответ которой Вам, конечно, известен).

Груз массы m подвешен на невесомой пружине жесткости k . Предположим, что период колебаний подвешенного груза зависит от его массы,



жесткости пружины и ускорения свободного падения g . Представим эту зависимость в виде

$$T = C m^\alpha k^\beta g^\gamma \quad (4)$$

0.1 Используя метод размерностей, запишите систему уравнений для определения показателей степеней α, β, γ в формуле (4). Найдите эти показатели. Запишите формулу для периода колебаний подвешенного пружинного маятника.

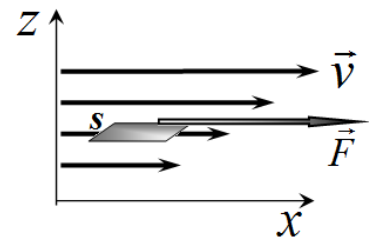
Часть 1. «Вязкое» лобовое сопротивление.

Перейдем к основному содержанию данного задания. Рассмотрим движение шарика в жидкости или газе.

При движении тела в среде, на него действует сила сопротивления со стороны среды.

Первой основной причиной возникновения сил сопротивления является вязкость среды, обусловленная силами межмолекулярного взаимодействия между слоями движущейся жидкости или газа, и взаимодействия жидкости и поверхности тела.

При движении вязкой жидкости, когда скорость жидкости различна в различных точках, между слоями жидкости возникают силы вязкости. Простейший случай: скорость жидкости $\vec{v}$ зависит только от одной координаты z (см. рис.), тогда сила, действующая на площадку площади S (верхний более быстрый слой «тянет» нижний), задается законом Ньютона для вязкого трения



$$F = \eta \frac{dv_x}{dz} S \quad (5)$$

где η - и есть вязкость (коэффициент вязкости) жидкости или газа.

Если вязкость является основной причиной возникновения силы лобового сопротивления, сила, действующая на шарик, зависит от вязкости среды η , радиуса шарика r , скорости его движения v . Иными словами, формула для этой силы имеет вид

$$F = C \eta^\alpha r^\beta v^\gamma. \quad (6)$$

1.1 Определите значения показателей степеней α, β, γ в формуле (6), запишите эту формулу в явном виде.

1.2 Пластилиновый шарик радиуса r_1 медленно опускается в глицерине с постоянной скоростью v_1 . С какой скоростью v_2 будет опускаться пластилиновый шарик в глицерине, если его радиус равен $r_2 = 2r_1$? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (6).

Часть 2. «Динамическое» сопротивление.

Второй причиной возникновения лобового сопротивления является «динамика» движения жидкости: при обтекании жидкостью тела изменяется направление и модуль скорости течения жидкости. Тем самым изменяется импульс жидкости (газа), который передается телу. Как известно, импульс, переданный в единицу времени, есть сила.

Итак, в данной модели сила определяется импульсом, переданным от среды к шарiku. Разумно предположить, что этот импульс определяется плотностью среды ρ , радиусом шарика r и его скоростью v . Поэтому формула для динамического сопротивления должна иметь вид

$$F = C \rho^\alpha r^\beta v^\gamma. \quad (7)$$

2.1 Определите значения показателей степеней α, β, γ в формуле (6), запишите эту формулу в явном виде.

2.2 Дождевая капля воды радиуса r_1 падает в воздухе с некоторой установившейся скоростью v_1 . С какой скоростью v_2 будет опускаться в воздухе капля, радиус которой в два раза больше $r_2 = 2r_1$? Считайте, что сила сопротивления определяется формулой (7).

Часть 3. Общий случай: действуют обе причины.

В общем случае сила, действующая на шарик, движущийся в вязкой среде, зависит от четырех величин: плотности среды, радиуса шарика, его скорости и вязкости среды. Представим эту зависимость в виде

$$F = C \rho^\alpha r^\beta v^\gamma \eta^\delta. \quad (8)$$

Размерности величин, входящих в эту формулу, выражается через три основных единицы: метр, секунда килограмм. А неизвестных показателей – четыре! Поэтому эти показатели не могут быть определены однозначно.

3.1 Выразите показатели степени α, β, γ в формуле (8), через показатель δ . Запишите формулу (8) в явном виде.

Представим теперь формулу (8) в виде

$$F = C(\text{Re}) \rho^\alpha r^\beta v^\gamma, \quad (9)$$

Где $C(\text{Re})$ - неизвестная функция от безразмерного параметра Re , который называется числом Рейнольдса. Эта функция не известна, но... как известно, «всякая неизвестная функция приблизительно линейна...»

3.2 Выразите безразмерное число Рейнольдса Re через параметры задачи ρ, r, v, η .

Часть 4. Экспериментальные измерения.

Экспериментально измерены силы лобового сопротивления, действующие на различные шарики, движущиеся в различных средах, с различными скоростями. В Таблице 1 представлены результаты таких измерений, в ней указаны: вещество окружающей среды; вязкость этой среды η ; ее плотность ρ , радиус шарика r , скорость движения шарика v , измеренное значение силы лобового сопротивления F .

Таблица 1.

	η , Па · с	ρ , $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	r , м	v , $\frac{\text{м}}{\text{с}}$	F , Н
воздух	$1,8 \cdot 10^{-4}$	1,20	$1,0 \cdot 10^{-3}$	5,0	$1,66 \cdot 10^{-4}$
вода	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,0	$2,04 \cdot 10^{-3}$
оливковое масло	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$1,26 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	1,0	$8,45 \cdot 10^{-1}$
глицерин	1,48	$0,92 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	10,0	?

4.1 Используя данные таблицы, найдите значение силы лобового сопротивления, действующую на шарик, движущийся в глицерине. Характеристики шарика и глицерина указаны в последней строке Таблицы 1.

7

Решение

Задание 11-3. Шар в потоке.

Введение. Метод размерностей в физике.

0.1 Искомая зависимость имеет вид:

$$T = C m^\alpha k^\beta g^\gamma \quad (1)$$

Выразим размерность коэффициента жесткости через основные единицы системы СИ, используя закон Гука:

$$F = kx \quad (2)$$

Из этой формулы следует, что размерность этого коэффициента есть:

$$k = \frac{F}{x}, \quad \Rightarrow \quad [k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{\text{Н}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{с}^2} \quad (3)$$

На основании формулы (1) записываем условия размерностей:

$$[T] = [m]^\alpha [k]^\beta [g]^\gamma \Rightarrow c^1 = \text{кг}^\alpha \left(\frac{\text{кг}}{c^2}\right)^\beta \left(\frac{\text{м}}{c^2}\right)^\gamma = \text{кг}^{\alpha+\beta} \cdot \text{м}^\gamma \cdot c^{-2\beta-2\gamma} \quad (4)$$

Приравниваем показатели степеней и получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{кг} : \quad 0 &= \alpha + \beta \\ \text{м} : \quad 0 &= \gamma \\ \text{с} : \quad 1 &= -2\beta - 2\gamma \end{aligned} \quad (5)$$

Решаем систему и находим:

$$\gamma = 0, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = +\frac{1}{2}. \quad (8)$$

Окончательно получаем:

$$T = C \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (9)$$

Заметим, что период колебаний от ускорения свободного падения не зависит. А если подумать, почему должна быть такая зависимость?

Часть 1. «Вязкое» лобовое сопротивление.

1.1 Найдем размерность вязкости, используя закон Ньютона $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$ $[\eta] = \text{с} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{Н}^{-1}$ (10) $[\eta] = \text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{Н}^{-1}$:

$$[\eta] = \frac{[F]}{[S] \left[\frac{v}{z}\right]} = \frac{H}{\text{м}^2 \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{м}}} = \frac{H}{\text{м}^2} \cdot \text{с} = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \quad (10)$$

Формула для силы сопротивления записана в виде

$$F = C \eta^\alpha r^\beta v^\gamma.$$

Не сложно подставить размерности всех величин, приравнять показатели степеней, получить систему уравнений, и решить ее. Важно, что в данном случае все размерности

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 10

выражаются через метр, килограмм, секунду; поэтому получается система 3 уравнений с тремя неизвестными α, β, γ , которая имеет однозначное решение:

$$\alpha = \beta = \gamma = 1. \quad (11)$$

Поэтому зависимость сопротивления от скорости и радиуса имеет вид:

$$F = C\eta r v. \quad (12)$$

1.2 При опускании шарика в вязкой среде сила лобового сопротивления уравновешивает силы тяжести. Учитывая, что масса шарика пропорциональна его объему получим

$$mg = F \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g = C\eta r v. \quad (13)$$

Из этой формулы следует, что скорость падения пропорциональна квадрату радиуса шарика. Поэтому при увеличении радиуса в 2 раза его скорость возрастает в 4 раза:

$$v_2 = 4v_1. \quad (14)$$

Часть 2. «Динамическое» сопротивление.

2.1 Формула для сопротивления должна имеет вид

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma.$$

Далее поступаем по установленному стандарту: выражаем размерности через метр, килограмм, секунду; приравниваем показатели степеней, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными, и решаем ее. Ответ:

$$\alpha = 1; \beta = 2; \gamma = 2. \quad (15)$$

Поэтому искомая зависимость имеет вид

$$F = C\rho v^2 r^2. \quad (16)$$

2.2 Сила тяжести, пропорциональна кубу радиуса, поэтому квадрат скорости пропорционален радиусу шарика. Следовательно, скорость пропорциональна корню из радиуса, следовательно:

$$v_2 = \sqrt{2}v_1. \quad (17)$$

Часть 3. Общий случай: действуют обе причины.

3.1 Используя формулу

$$F = C\rho^\alpha r^\beta v^\gamma \eta^\delta,$$

Записываем условия совпадения размерностей $\text{кг} \cdot \text{м} (\text{кг}) (\text{м}) (\text{кг}) = \beta \text{ Нм. (18) } 2|(3)|(|)|(|)|(\cdot)| \text{ см-смс:}$

$$H = \frac{\kappa 2 \cdot M}{c^2} = \left(\frac{\kappa 2}{M^3} \right)^\alpha M^\beta \left(\frac{M}{c} \right)^\gamma \left(\frac{\kappa 2}{M \cdot c} \right)^\delta. \quad (18)$$

Из этого выражения следует система уравнений для показателей степеней:

$$\begin{aligned} \kappa 2 : \quad & \alpha + \delta = 1 \\ m : \quad & -3\alpha + \beta + \gamma - \delta = 1. \\ c : \quad & -\gamma - \delta = -2 \end{aligned} \quad (19)$$

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 11

Теперь можем выразить три неизвестных через четвертую - δ . Тогда получаем:

$$\alpha = 1 - \delta; \quad \beta = 2 - \delta; \quad \gamma = 2 - \delta \quad (20)$$

Следовательно, искомая формула получаем вид

$$F = C \rho v^2 r^2 \left(\frac{\rho r v}{\eta} \right)^\delta. \quad (21)$$

3.2 Так как степень δ может быть любой, то последнее выражение можно обобщить

$$F = C(\text{Re}) \rho v^2 r^2. \quad (22)$$

Где $C(\text{Re})$ — произвольная функция от безразмерного параметра

$$\text{Re} = \frac{\rho r v}{\eta}. \quad (23)$$

который и называется числом Рейнольдса, а коэффициент $C(\text{Re})$ можно назвать коэффициентом лобового сопротивления.

Часть 4. Экспериментальные измерения.

4.1 Сила лобового сопротивления описывается формулой (22), правда, коэффициент $C(\text{Re})$ неизвестен. Само число Рейнольдса подсчитать не сложно, но какова зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса? Попробуем воспользоваться неявной подсказкой про линейность неизвестной функции. Для этого для тех случаев, когда сила сопротивления и все параметры известны, посчитаем числа Рейнольдса и рассчитаем коэффициент лобового сопротивления по формуле

$$C = \frac{f}{\rho v^2 r^2}. \quad (24)$$

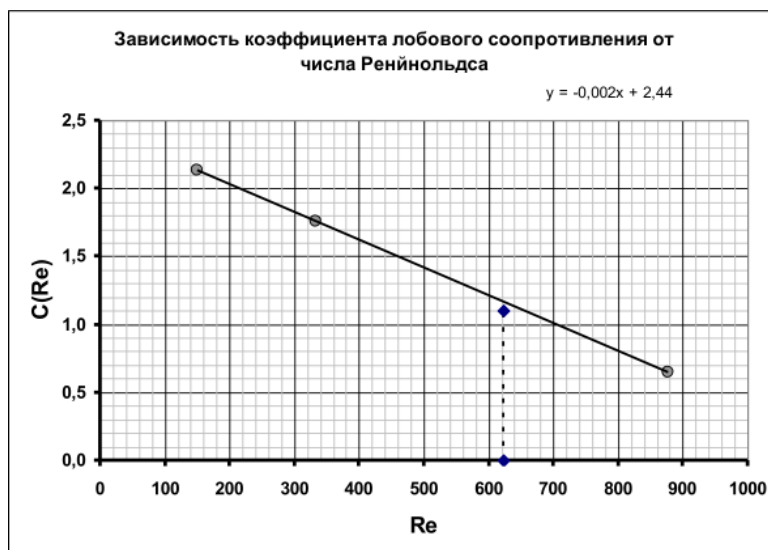
Результаты этих расчетов представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

	$\eta, \text{Па} \cdot \text{с}$	$\rho, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$r, \text{м}$	$v, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$F, \text{Н}$	Re	$C(\text{Re})$
воздух	$1,8 \cdot 10^{-4}$	1,20	$1,0 \cdot 10^{-3}$	5,0	$1,66 \cdot 10^{-4}$	333	1,6
вода	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	1,0	$2,04 \cdot 10^{-3}$	877	0,64
оливковое масло	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$1,26 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	1,0	$8,45 \cdot 10^{-1}$	150	2,0
глицерин	1,48	$0,92 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	10,0	?	622	

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 12

Теперь построим график зависимости коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса (по трем точкам).



Видим, что действительно в данном диапазоне эта зависимость действительно близка к линейной! По этому графику находим значения коэффициента лобового сопротивления для $\text{Re} = 622$: его примерное значение $C \approx 1,1$. Наконец, по формуле (22) находим значение силы, действующей на шарик в глицерине:

$$F \approx 3,2 \cdot 10^3 \text{ Н.} \quad (25)$$

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 13