

## -1. Степенные зависимости

### Условие

#### Задание 11-1. Степенные зависимости.

Задание состоит из двух задач, связанных одной математической идеей: если некоторая величина  $Y$  зависит от величины  $x$  по степенному закону

$$Y(x) = Y_0 + ax^\gamma,$$

то скорость изменения этой величины описывается формулой, справедливой при любом показателе степени  $\gamma$  и малых значениях  $\Delta x$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x} = a\gamma x^{\gamma-1}.$$

#### Задача 1.1. Атмосфера с переменной температурой.

У поверхности земли атмосферное давление равно  $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$  Па, а температура  $T_0 = 290$  К. Температура воздуха убывает с высотой  $z$  по линейному закону

$$T = T_0(1 - \alpha z).$$

Температура убывает на  $\Delta T = 1,0^\circ$  при подъеме на каждые  $\Delta h = 100$  м. Ускорение свободного падения считать равным  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Молярная масса воздуха  $M = 29$  г/моль. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль·К). Атмосфера неподвижна.

|       |                                                                         |
|-------|-------------------------------------------------------------------------|
| 1.1.1 | Найдите зависимость давления воздуха от высоты $P(z)$ .                 |
| 1.1.2 | Рассчитайте численное значение давления воздуха на высоте $H = 1,0$ км. |

#### Задача 1.2. Радиоактивные шары.

Два однородных шара изготовлены из одного радиоактивного материала. Благодаря радиоактивному распаду внутри материала постоянно выделяется теплота (мощность выделения этой теплоты постоянна). Шары находятся в вакууме, поэтому потери теплоты в окружающую среду осуществляются только посредством излучения. Радиус первого шара равен  $R_1$ , температура его поверхности равна  $T_{S1} = 400$  К, а температура в его центре -  $T_{C1} = 500$  К. Радиус второго шара равен  $R_2 = 2R_1$ .

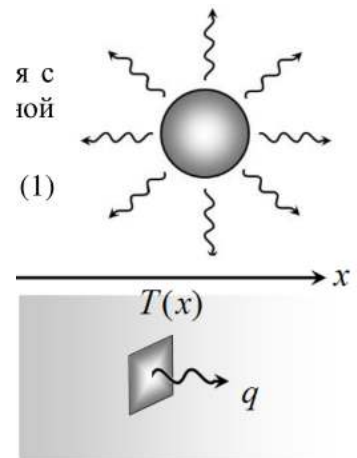
|       |                                                                                   |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1.2.3 | Рассчитайте температуры на поверхности $T_{S2}$ и в центре $T_{C2}$ второго шара. |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|

Подсказки: 1. Согласно закону Стефана – Больцмана мощность теплового излучения с единицы площади пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$p = \sigma T^4. \quad (1)$$

2. Закон теплопроводности Фурье утверждает, что плотность потока теплоты (количество теплоты, перетекающей в единицу времени через площадку единичной площади) пропорционален градиенту температуры (изменению температуры на единицу длины):

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (2)$$



**Решение**

**Задание 11-1. Степенные зависимости.**

**Задача 1.1. Атмосфера с переменной температурой.**

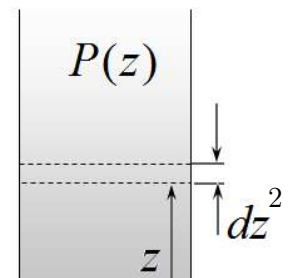
**1.1.1** Основная проблема, возникающая при решении задачи, заключается в том, что плотность воздуха зависит от давления и температуры, поэтому изменяется при подъеме над поверхностью земли. Поэтому рассмотрим тонкий слой атмосферы толщиной  $\Delta z$ , находящийся на высоте  $z$  от поверхности земли. Пренебрежем изменением плотности воздуха в пределах этого тонкого слоя. Тогда изменение давления в пределах этого слоя равно

$$\Delta P = -\rho g \Delta z. \quad (1)$$

Плотность воздуха выразим из уравнения состояния Менделеева – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT}. \quad (2)$$

11 класс. Теоретический тур.



Подставим это выражение в формулу (1):

$$\Delta P = -\frac{MP}{RT_0(1-\alpha z)}g\Delta z. \quad (3)$$

Теперь сделаем решительное предположение: зависимость давления от высоты имеет вид

$$P(z) = P_0(1-\alpha z)^\gamma. \quad (4)$$

Тогда

$$\Delta P = \gamma P_0(1-\alpha z)^{\gamma-1}\Delta(1-\alpha z) = -\alpha\gamma P_0(1-\alpha z)^{\gamma-1}\Delta z. \quad (5)$$

Подставим это выражение, а также формулы для зависимостей температуры и давления от высоты в формулу (3):

$$-\alpha\gamma P_0(1-\alpha z)^{\gamma-1}\Delta z = -\frac{MP_0(1-\alpha z)^\gamma}{RT_0(1-\alpha z)}g\Delta z. \quad (6)$$

Это равенство будет верным при

$$\gamma = \frac{Mg}{\alpha RT_0}. \quad (7)$$

Таким образом, действительно зависимость давления от высоты имеет вид (4) с показателем степени (7).

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 2

**1.1.2** Из приведенной в условии зависимости температуры от высоты следует, что

$$\alpha T_0 \Delta h = \Delta T \quad \Rightarrow \quad \alpha T_0 = \frac{\Delta T}{\Delta h} = 1,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{м}}. \quad (8)$$

Показатель степени:

$$\gamma = \frac{Mg}{\alpha RT_0} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{1,0 \cdot 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{м}} \cdot 8,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}} = 3,42 \quad (9)$$

Легко подсчитать температуру на высоте  $H$ :

$$T_0(1-\alpha H) = T_0 - H \frac{\Delta T}{\Delta h} = 280 \text{ K} \quad \Rightarrow \quad (1-\alpha H) = \frac{280}{290}.$$

Наконец, давление на высоте  $H$ :

$$P(H) = P_0(1 - \alpha H)^\gamma = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \left(\frac{28}{29}\right)^{4,32} = 0,89 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (10)$$

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 3

## Задача 1.2. Радиоактивные шары.

**1.2.1** Количество теплоты, которое выделяется во всем шаре, пропорционально объему шара. В стационарном режиме энергия, выделившаяся в шаре, равна энергии излученной поверхностью шара:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 w = 4\pi R^2 \sigma T_s^4 \quad (1)$$

Здесь  $w$  - мощность теплоты, выделяющейся в единице объема. Из этого соотношения следует, что

$$\frac{T_{S2}^4}{T_{S1}^4} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow T_{S2} = T_{S1} \sqrt[4]{\frac{R_2}{R_1}} = 400K \sqrt[4]{2} \approx 476K. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь распределение температур внутри шара, т.е. зависимость температуры от расстояния до центра шара  $T(r)$ . Для этого рассмотрим сферическую поверхность некоторого радиуса  $r < R$  концентрическую с шаром. Поток теплоты через эту поверхность равен количеству теплоты, выделившейся внутри этой поверхности:

$$-4\pi r^2 \kappa \frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{4}{3}\pi r^3 w \quad (3)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\frac{\Delta T}{\Delta r} = -C_0 r, \quad (4)$$

где  $C_0$  - некоторая постоянная величина. Используя математическую подсказку, зависимость температуры от расстояния до центра имеет вид:

$$T(r) = T_C - Cr^2. \quad (5)$$

Величина  $T_C$  имеет смысл температуры в центре шара. Если положить  $r = R$ , то эта формула даст значение температуры на поверхности шара. Поэтому можно записать

$$T_C - T_S = CR^2. \quad (6)$$

Постоянная  $C$  неизвестна, но ее можно исключить, составив пропорцию:

$$\frac{T_{C2} - T_{S2}}{T_{C1} - T_{S1}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \Rightarrow (T_{C2} - T_{S2}) = 4(T_{C1} - T_{S1}) = 400K. \quad (7)$$

Окончательно находим, что температура в центре второго шара равна

$$T_{C2} = T_{S2} + 400K = 876K. \quad (8)$$

Теоретический тур. Вариант 1. 11 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 4