

-3. Скатывание без проскальзывания

Условие

Задание 10-3. Скатывание без проскальзывания.

Существует множество задач, в которых брусок движется по наклонной плоскости при наличии трения. В зависимости от коэффициента трения и угла наклона плоскости брусок может либо скользить по плоскости, либо покоится.

Если на наклонную плоскость поместить трубку, то она всегда будет скатываться, но может катиться либо без проскальзывания, либо проскальзывать.

Целью данного задания является анализ такого движения. Далее будем рассматривать однородную тонкостенную трубку, радиус которой равен R , а масса m равномерно распределена по стенкам трубки. Толщина стенок трубки значительно меньше ее радиуса.

Часть 1. Динамика вращательного движения.

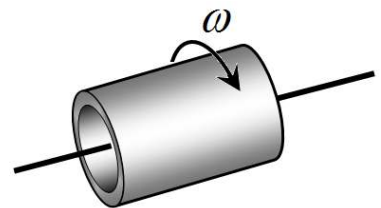
Сложное движение твердого тела можно рассматривать как суперпозицию двух составляющих: поступательного движения центра масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела. Движение центра масс подчиняется уравнению второго закона Ньютона. Вращение тела описывается углом поворота φ , угловой скоростью $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ и угловым ускорением – скоростью изменения угловой скорости $\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ (величиной аналогичной обычному ускорению). В этой части на основании закона сохранения энергии Вы должны самостоятельно получить основное уравнение динамики вращательного движения трубки, определяющее угловое ускорение вращения трубки.

1.1 Трубка вращается вокруг неподвижной собственной оси с угловой скоростью ω . Чему равна кинетическая энергия трубки?

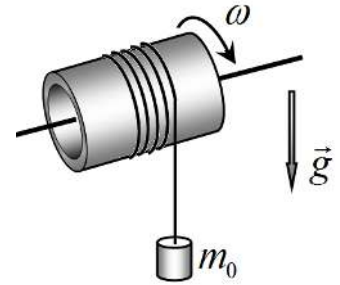
Для реализации такого движения можно считать, что трубка насажена на очень легкий вал, диаметр которого равен внутреннему диаметру трубки.

1.2 Трубка катится (с проскальзыванием) по горизонтальной поверхности. Скорость оси трубки равна $\vec{v}_c$, угловая скорость вращения вокруг оси трубки ω . Чему равна кинетическая энергия трубки в этом случае?

1.3 Чему равна кинетическая энергия трубки, которая катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности, если скорость ее оси равна $\vec{v}_c$?



Трубку снова насадили на неподвижную горизонтальную ось, на его поверхность намотали легкую прочную нить, к концу которой привязали груз массы m_0 . Груз отпускают, он начинает опускаться, раскручивая трубку.



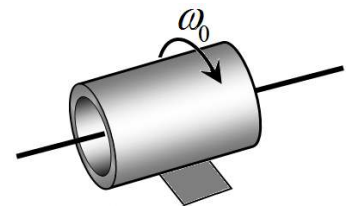
1.4 Чему равно изменение кинетической энергии трубки при опускании груза на малую величину Δh ?

1.5 Найдите ускорение груза a угловое ускорение трубки β .

1.6 Выразите угловое ускорение трубки через момент силы натяжения нити $M = TR$ (это и будет уравнение динамики вращательного движения).

Рекомендуем использовать следующую формулу: если некоторая величина x изменяется на малую величину Δx , то ее квадрат изменяется на величину

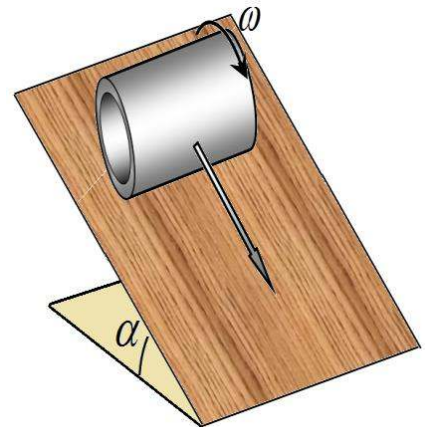
$$\Delta(x^2) = 2x\Delta x.$$



Трубке, закрепленной на неподвижной горизонтальной оси, сообщили угловую скорость ω_0 . После чего к ее поверхности поднесли пластинку, которая действует на трубку с постоянной силой трения F .

1.7 Найдите зависимость угловой скорости трубки от времени $\omega(t)$. 1.8 Сколько оборотов сделает обруч до остановки?

Часть 2. Скатывание с наклонной плоскости. Трубку кладут на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, так что ось трубки располагается горизонтально, и отпускают. Трубка начинает скатываться с наклонной плоскости. Коэффициент трения трубки о плоскость равен μ . Обозначим силу трения, действующую на боковую поверхность трубки F .



2.1 Найдите ускорение оси трубки a и ее угловое ускорение β в зависимости от силы трения F . 2.2 Найдите значение силы трения, если трубка катится без проскальзывания. 2.3 Определите, при каких углах наклона плоскости α к горизонту, качение цилиндра будет проходить без проскальзывания (при фиксированном значении коэффициента трения μ).

Решение

Задание 10-3. Скатывание без проскальзывания.

Часть 1. Динамика вращательного движения.

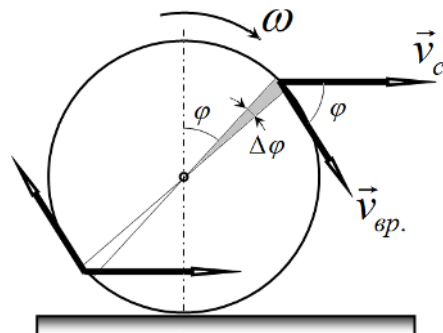
1.1 Так как все точки трубки находятся на одном расстоянии от оси вращения, то модули их скоростей одинаковы и равны

$$v = \omega R. \quad (1)$$

Поэтому кинетическая энергия вращающейся трубки равна

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}. \quad (2)$$

1.2 Представим движение трубки как сумму поступательного прямолинейного движения ее центра и его вращения вокруг центра. В этом случае разные точки трубки движутся с разными скоростями относительно поверхности. Мысленно разобьем трубку на равные малые участки (полоски вдоль длины трубки), видимые из центра обруча под малым углом $\Delta\varphi$. Рассмотрим один из таких участков, положение которого задается углом φ от вертикали. Полная скорость этого участка складывается из скорости движения центра $\vec{v}_c$ и скорости вращательного движения $\vec{v}_{вр.}$ относительно центра колеса ($|\vec{v}_{вр.}| = \omega R$). Используя теорему косинусов, легко показать, что квадрат вектора полной скорости выделенного участка равен



$$v^2 = v_c^2 + v_{вр.}^2 + 2v_cv_{вр.} \cos \varphi. \quad (3)$$

Чтобы найти кинетическую энергию всей трубки необходимо просуммировать энергии всех ее участков:

$$E = \sum_i \frac{\Delta m}{2} (v_c^2 + v_{вр.}^2 + 2v_cv_{вр.} \cos \varphi_i) = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mv_{вр.}^2}{2} + \Delta mv_cv_{вр.} \sum_i \cos \varphi_i \quad (4)$$

Так как суммирование проводится по всем полоскам трубки (по полной окружности), то последняя сумма обращается в нуль. Следовательно, кинетическая энергия трубки равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}. \quad (5)$$

Чтобы убедиться в справедливости сделанного вывода можно так же рассмотреть два участка, симметричных относительно оси трубки.

1.3 Если трубка катится без проскальзывания, то скорость его центра и угловая скорость вращения связаны соотношением $v_c = \omega R$. В этом случае оба слагаемых в формуле (5) равны, поэтому полная энергия трубки равна

$$E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = mv_c^2. \quad (6)$$

Теоретический тур. Вариант 2. 10 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 7

1.4 Увеличение кинетической энергии системы равно уменьшению потенциальной груза, поэтому

$$\Delta(E_1 + E_2) = m_0 g \Delta h. \quad (7)$$

В этой формуле $E_1 = \frac{mR^2\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия трубки; $E_2 = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 R^2 \omega^2}{2}$ - кинетическая энергия груза. Выразим кинетическую энергию груза через кинетическую энергию трубки:

$$E_2 = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{m_0 R^2 \omega^2}{2} = \frac{m_0}{m} \frac{m R^2 \omega^2}{2} = \frac{m_0}{m} E_1$$

И подставим в уравнение (7)

$$\Delta(E_1 + E_2) = \Delta \left(E_1 + \frac{m_0}{m} E_1 \right) = \frac{m + m_0}{m} \Delta E_1 = m_0 g \Delta h. \quad (8)$$

Из этого выражения находим изменение кинетической энергии трубки

$$\Delta E_1 = \frac{m m_0}{m + m_0} g \Delta h. \quad (9)$$

1.5 Подставим явное выражение для кинетической энергии трубки и воспользуемся подсказкой из условия:

$$\Delta E_1 = \Delta \left(\frac{m R^2 \omega^2}{2} \right) = \frac{m R^2}{2} \Delta(\omega^2) = \frac{m R^2}{2} \cdot 2\omega \Delta\omega = m R^2 \omega \Delta\omega. \quad (10)$$

Подставим в формулу (9)

$$m R^2 \omega \Delta\omega = \frac{m m_0}{m + m_0} g \Delta h. \quad (11)$$

И разделим его на Δt - промежуток времени, за который груз опустился на величину Δh . Также учтем, что скорость груза можно выразить через угловую скорость вращения трубки: $v = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \omega R$. В итоге получим

$$mR^2\omega \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{mm_0}{m+m_0}g \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{mm_0}{m+m_0}g\omega R \Rightarrow mR^2 \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{mm_0}{m+m_0}gR \quad (12)$$

Отсюда находим угловое ускорение трубки:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{m_0}{m+m_0} \frac{g}{R}. \quad (13)$$

А ускорение груза равно:

$$a = \beta R = \frac{m_0}{m+m_0}g. \quad (14)$$

1.6 Что бы выразить угловое ускорение через силу натяжения нити, ее сначала надо найти. Для этого воспользуемся уравнением второго закона Ньютона для груза:

$$m_0a = m_0g - T \Rightarrow T = m_0(g - a) = m_0 \left(g - \frac{m_0}{m+m_0}g \right) = \frac{m_0m}{m+m_0}g. \quad (15)$$

Теперь перепишем уравнение (12):

Теоретический тур. Вариант 2. 10 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 8

$$mR^2\beta = \frac{mm_0}{m+m_0}gR = TR,$$

В итоге получаем уравнение динамики вращательного движения:

$$mR^2\beta = M.$$

(16)

1.7 Запишем уравнение динамики вращательного движения в рассматриваемом случае:

$$mR^2\beta = -FR.$$

(17)

Из этого уравнения следует, что угловое ускорение трубки постоянно и равно

$$\beta = -\frac{F}{mR}$$

(18)

Поэтому вращение трубки будет равноускоренным (с отрицательным ускорением), а его угловая скорость будет изменяться по линейному закону:

$$\omega = \omega_0 - \frac{F}{mR}t$$

(19)

1.8 До остановки трубка повернется на угол

$$\varphi = \frac{\omega_0^2}{2\beta} = \frac{mR\omega_0^2}{2F}.$$

(20)

Следовательно, полное число оборотов до остановки равно

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{mR\omega_0^2}{4\pi F}.$$

(21)

Часть 2. Скатывание с наклонной плоскости.

2.1 Из уравнения второго закона Ньютона для движения центра масс

$$ma = mg \sin \alpha - F,$$

(21)

Находим линейное ускорение оси трубки

$$a = g \sin \alpha - \frac{F}{m}.$$

(22)

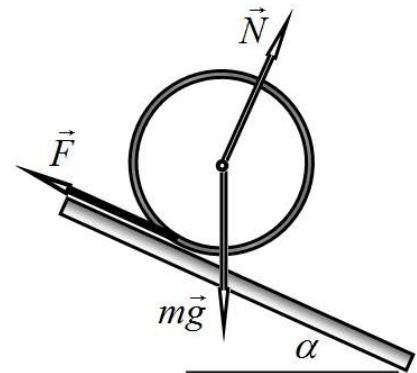
Теперь запишем уравнение динамики вращения относительно оси трубки (единственной силой, момент которой отличен от нуля, является сила трения):

$$mR^2\beta = FR.$$

(23)

Из этого уравнения определяем угловое ускорение трубки

$$\beta = \frac{F}{mR}.$$



(24)

Теоретический тур. Вариант 2. 10 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 9

2.2 Если трубка катится без проскальзывания, то линейное и угловые ускорения связаны геометрическим соотношением

$$a = \beta R. \quad (25)$$

Подставим в это соотношения формулы для ускорений (22) и (24)

$$g \sin \alpha - \frac{F}{m} = \frac{F}{m}. \quad (26)$$

Отсюда определяем силу трения

$$F = \frac{1}{2}mg \sin \alpha. \quad (27)$$

2.3 Так как движение происходит без проскальзывания, то данная сила является силой трения покоя. Как следует из закона Кулона – Амонтона сила трения покоя не может быть больше силы трения скольжения, т.е.

$$F \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha. \quad (28)$$

С учетом формулы (27) это неравенство дает условие качения трубки по наклонной плоскости без проскальзывания:

$$\frac{1}{2}mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha \leq 2\mu. \quad (29)$$

Теоретический тур. Вариант 2. 10 класс. Решения задач. Бланк для жюри. 10