

## -1. Катится колесо

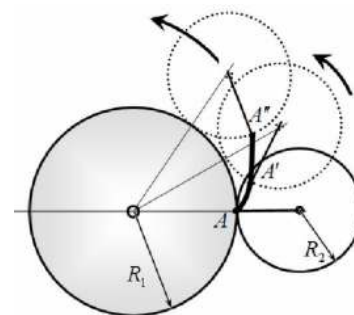
### Условие

#### Задание 9-1. Катится колесо

Выполнение этого задания требует большого терпения и предельной аккуратности!

Приборы и оборудование: циркуль, ножницы, линейка, бумага.

В данном задании вам предстоит экспериментально исследовать траектории, которые описывает точка, находящаяся на ободе диска, который катится по поверхности другого неподвижного диска без проскальзывания.



Так на рис. 1 диск радиуса  $R_2$  обкатывает без проскальзывания неподвижный диск радиуса  $R_1$ . На рис. 1 показано несколько положений подвижного колеса, положения движущейся точки  $A$ ,  $A'$ ,  $A''$  и участок траектории этой точки. Линия траектории в данном случае называется эпициклоидой.

Подвижный диск может катиться и по внутренней поверхности неподвижного диска (рис. 2). В этом случае траектория называется гипоциклоидой.

Справка из Википедии: Эпициклоида (от др.-греч.  $\varepsilon\pi\acute{\iota}$  — на, над, при и  $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\varsigma$  — круг, окружность) — плоская кривая, образуемая фиксированной точкой окружности, катящейся по внешней стороне другой окружности без скольжения. Гипоциклоида (греч.  $\upsilon\pi\acute{o}$  (под, внизу) +  $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\varsigma$  (круг, окружность)) — плоская кривая, образуемая точкой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности без скольжения.

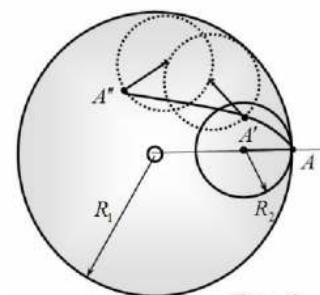


Рис. 2

Вид рассматриваемых траекторий зависит от отношения радиусов катящегося и неподвижного дисков  $\frac{R_2}{R_1}$ . Если это отношение является рациональным числом, то траектория является замкнутой (именно такие траектории рассматриваются в данном задании).

Для построения траекторий используйте бумажные подвижные диски, нарисованные на отдельном бланке. Вам необходимо самостоятельно и аккуратно их вырезать. На каждом диске

нанесена угломерная шкала: полный угол разбит на 48 равных частей. Внимательно следите, какой диск предназначен для, какой части задачи.

Неподвижные диски нарисованы на отдельных листах (их вырезать не надо). Построения выполняйте на этих листах (не забудьте их сдать). Эти диски также снабжены аналогичной угломерной шкалой. Для всех дисков «рабочей поверхностью» является внешняя окружность. Для измерения длин траекторий используйте циркуль и линейку.

В данном задании для вас приготовлены отдельные бланки (листы) для каждой части задачи. Все построения выполняйте на этих листах. Результаты измерений приводите на этих листах в специальных таблицах. Необходимые расчеты и ответы на поставленные вопросы приводите на рабочих листах.

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 2

### **Часть 1. Как измерить длину кривой линии**

С помощью циркуля и линейки измерить длину кривой абсолютно точно невозможно! Однако в физических экспериментах все измерения проводятся с некоторой погрешностью. Вместо длины кривой измеряется длина некоторой ломанной, вписанной в измеряемую кривую. Такая замена приводит к появлению систематической погрешности.

В этой части работы Вы должны оценить число звеньев ломанной (длины которых измеряются), обеспечивающих требуемую точность измерения длины кривой.

В данной Части работы допустимо вместо измерения, провести теоретические расчеты.

Обратите внимание на интересную особенность данного задания: Традиционно: проводят измерения, а потом оценивают их погрешность; в данном задании Вы должны так провести измерения, чтобы их погрешность не превышала заданную величину!

На рабочем бланке 1 нарисован круг, разбитый на 48 равных секторов. Вам необходимо измерить длину окружности, ограничивающий этот круг. Если в окружность вписать правильный  $n$ -угольник, то при большом числе сторон этого многоугольника его периметр примерно будет равен длине окружности.

1.1 Измерьте диаметр окружности и рассчитайте ее длину  $L_0$ . Оцените погрешность найденного значения длины окружности. 1.2 Измерьте длины периметров  $L_n$  правильных  $n$ -угольников (начиная с  $n = 3$ ), вписанных в данную окружность. 1.3 Для каждого  $n$  рассчитайте относительную систематическую погрешность  $\varepsilon_n$ , возникающую из-за замены окружности  $n$ -угольниками. 1.4 Укажите, при каких значениях  $n$  систематическая погрешность не превышает 5%. 1.5 Укажите, при каких значениях  $n$  систематическая погрешность оказывается меньше погрешности традиционного измерения (и расчета) длины окружности, проведенного вами в п. 1.1.

Полученные результаты используйте при последующих измерениях.

Далее все измерения следует проводить с погрешностью, не превышающей 5%. Далее оценка погрешностей не требуется!

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 3

## Часть 2. Качение внутри окружности (гипоциклоиды)

Диск катится без проскальзывания внутри диска, радиус которого в два раза больше радиуса подвижного диска. Начальное положение точки А показано на рис. 3.

**2.1** Постройте траекторию точки А. Кратко опишите методику построения траектории. Определите, какой путь пройдет точка А, пока подвижное колесо вернется в начальное состояние?

Для выполнения следующего задания используйте диск меньшего диаметра, изображенный на листе для вырезания. Этот диск также обкатывает без проскальзывания неподвижный диск изнутри.

**2.2** Постройте траекторию точки, находящейся на краю подвижного диска, пока эта выбранная точка не вернется в исходное состояние. Кратко опишите методику построения. Измерьте длину этой траектории. Кратко опишите методику измерения (или расчета) длины траектории.

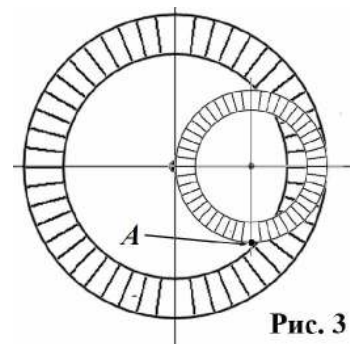


Рис. 3

## Часть 3. Качение снаружи окружности (эпициклоиды)

Подвижный диск (надо вырезать) обкатывает без проскальзывания неподвижный снаружи (рис. 4).

**3.1** Постройте траекторию точки, находящейся на краю подвижного диска, пока эта выбранная точка не вернется в исходное состояние. Кратко опишите методику построения. Измерьте длину этой траектории. Кратко опишите методику измерения (или расчета) длины траектории.

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 4

Лист для выполнения Части 1.

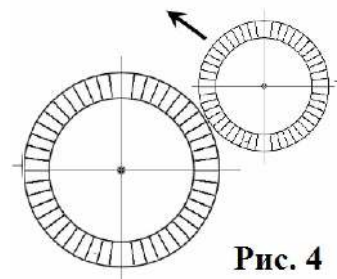
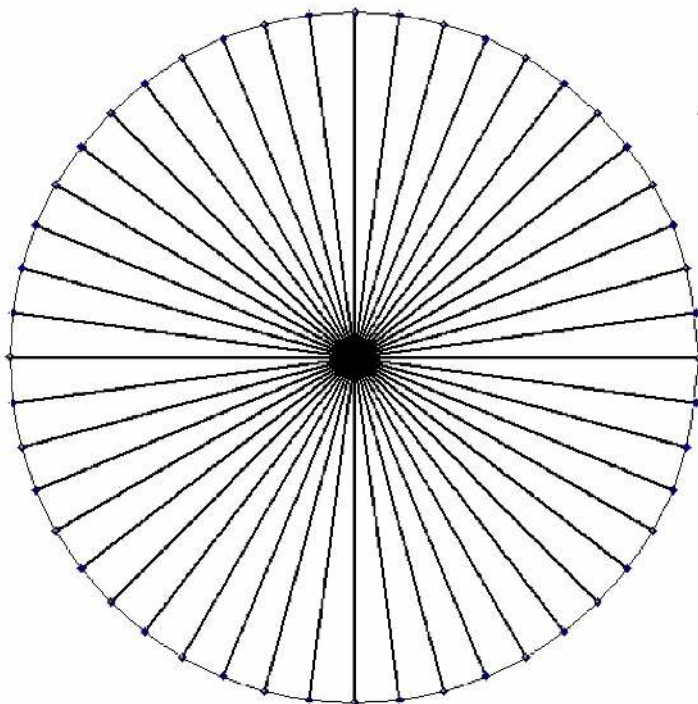


Рис. 4



### 1.1 Измерение диаметра окружности

Обработку результатов приведите на рабочих листах.

Окончательный результат измерения длины окружности

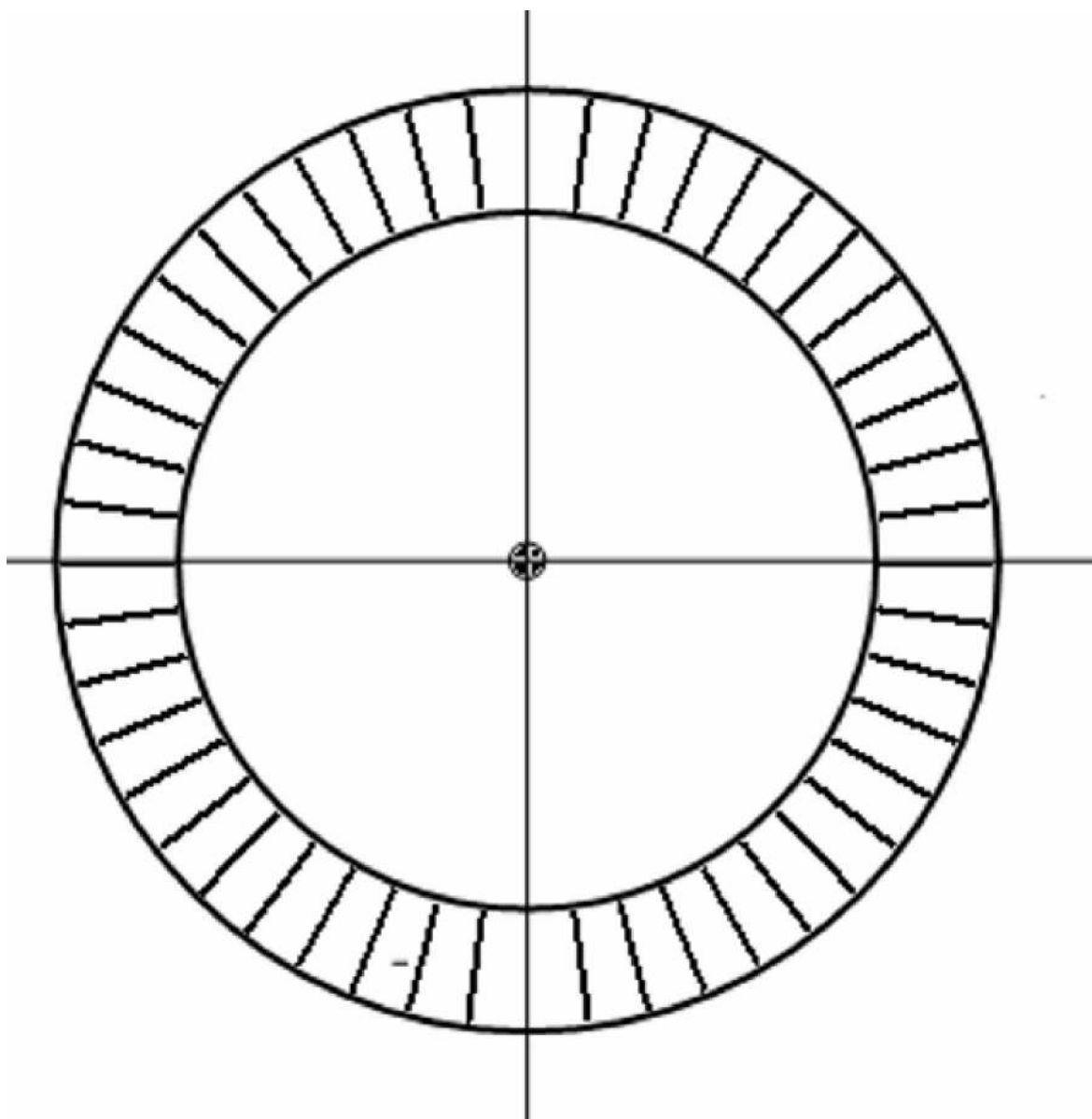
$$L_0 =$$

## 1.2 Результаты измерений длин периметров

|                 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-----------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| n               |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $L_n$           |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $\varepsilon_n$ |  |  |  |  |  |  |  |  |

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 5

Лист для выполнения задания 2.1



Пройденный путь

$$S =$$

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 6

Лист для выполнения задания 2.2

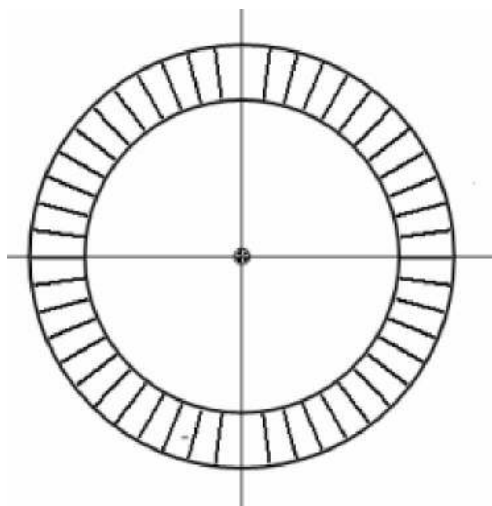
Пройденный путь

$$S =$$

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 7

Лист для выполнения задания 3.1

9 класс. Экспериментальный тур.

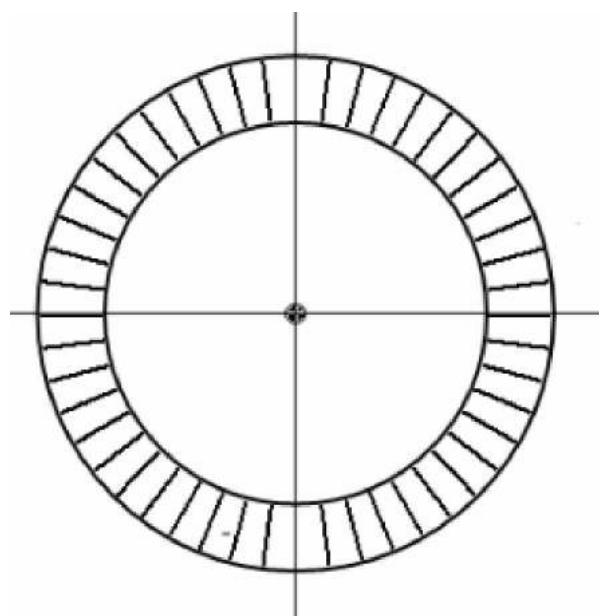


Пройденный путь

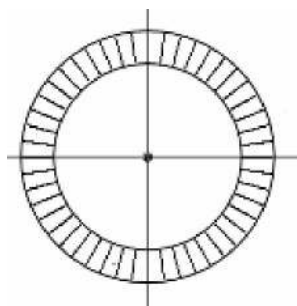
$$S =$$

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 8

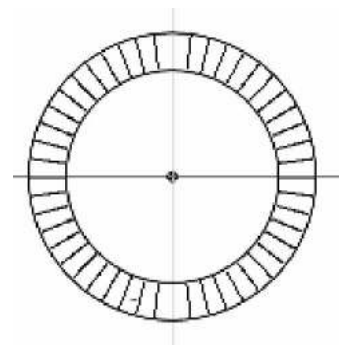
Лист для вырезания дисков.



К заданию 2-1.



К заданию 2.2



К заданию 3.1

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1 9

## Решение

### Задание 9-1. Катится колесо

#### Часть 1. Как измерить длину кривой линии

Внимание! Результаты измерений могут незначительно отличаться от результатов, приведенных в данном решении. При печати масштабы могут немного различаться!

##### 1.1 Выполняется традиционно:

- провести измерения нескольких диаметров; - найти среднее значение диаметра; - оценить погрешность измерения (любым допустимым методом); - рассчитать длину окружности и ее погрешность;

В результате измерения получены следующие значения: Диаметр окружности

$$D = (12,1 \pm 0,2) \text{ см} \quad (1)$$

При расчете учтены приборная и случайная погрешности. Расчет длины окружности по формуле  $L = \pi D$  дает результат:

$$L = (33,1 \pm 0,6) \text{ см} \quad (2)$$

Относительная погрешность измерения длины окружности примерно равна  $\varepsilon = 1\%$  **1.2 – 1.3** Результаты расчетов (по условию допускается) периметров  $n$ -угольников и относительная погрешность замены длины окружности периметром приведены в Таблице 1.

**Таблица 1.**

| $n$ | $L_n$ , см | $\varepsilon$ , % |
|-----|------------|-------------------|
| 3   | 31,4       | -17,3             |
| 4   | 34,2       | -10,0             |
| 6   | 36,3       | -4,5              |
| 8   | 37,0       | -2,6              |
| 9   | 37,2       | -2,0              |
| 12  | 37,6       | -1,1              |
| 24  | 37,9       | -0,3              |

**1.4** Как видно из таблицы погрешность в 5% достигается уже для шестиугольника. **1.5** Чтобы достичь экспериментальной точности, нужно измерить периметр, не менее чем двенадцати-угольника.

## **Часть 2. Качение внутри окружности (гипоциклоиды)**

Общая методика построения траекторий. Прокатить подвижное колесо (да еще без проскальзывания) в условиях данного эксперимента невозможно. Поэтому необходимо правильно прикладывать подвижное колесо, сдвигая его на  $n$  делений (по шкале неподвижного диска) и одновременно поворачивая его на  $m$  делений (по шкале подвижного диска). Чтобы смоделировать движение без проскальзывания необходимо, чтобы выполнялось условие

$$nD = md. \quad (3)$$

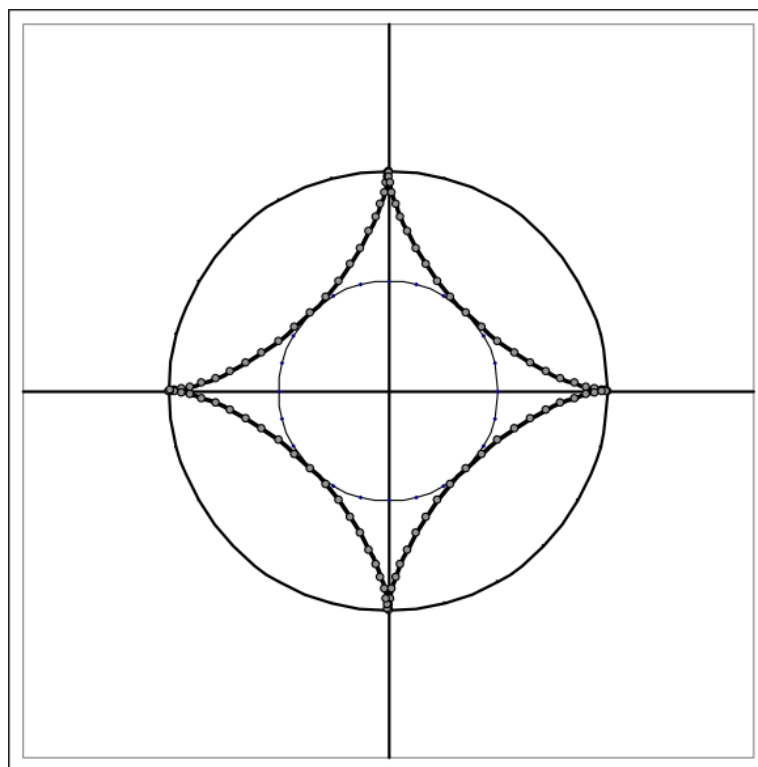
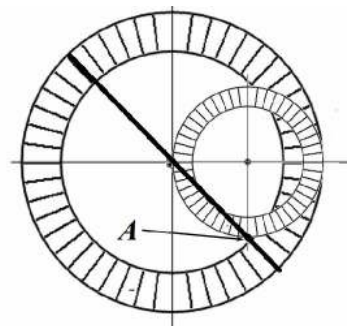
IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1. 1

Где  $D, d$  - диаметры неподвижного и подвижного дисков. Отношения диаметров подобрано таким образом, что числа  $n, m$  можно выбрать целыми. Именно для этого окружность разбита на 48 частей. (Таким образом, цена деления - пол румба).

В каждой части необходимо провести измерения отношения диаметров и выбранные значения чисел  $n, m$ . Можно не стремиться к минимальной точности достаточно, чтобы на одну «петлю» траектории приходилось 3-5 точек. Каждую траекторию можно (и нужно) качественно представить без проведения эксперимента и «увидеть» упомянутые петли. Это позволит заранее выбрать оптимальные значения чисел  $n, m$ .

2.1 Легко убедиться, что в данном случае траектория является отрезком прямой – диаметром неподвижного диска, проходящим через начальную точку.

2.2 В этом случае отношение диаметров равно  $\frac{D}{d} = \frac{4}{1}$ . Следовательно, в данном случае необходимо, чтобы  $m = 4n$ . Точка вернется в исходное состояние, когда подвижный диск сделает 4 оборота вокруг собственной оси. Траектория будет состоять из 4 петель. Каждая петля похожа на половину окружности. Поэтому на одну петлю достаточно 4-6 точек. Поэтому можно выбрать  $n = \frac{48}{4 \cdot 4} = 4$ , тогда  $m = 16$ .

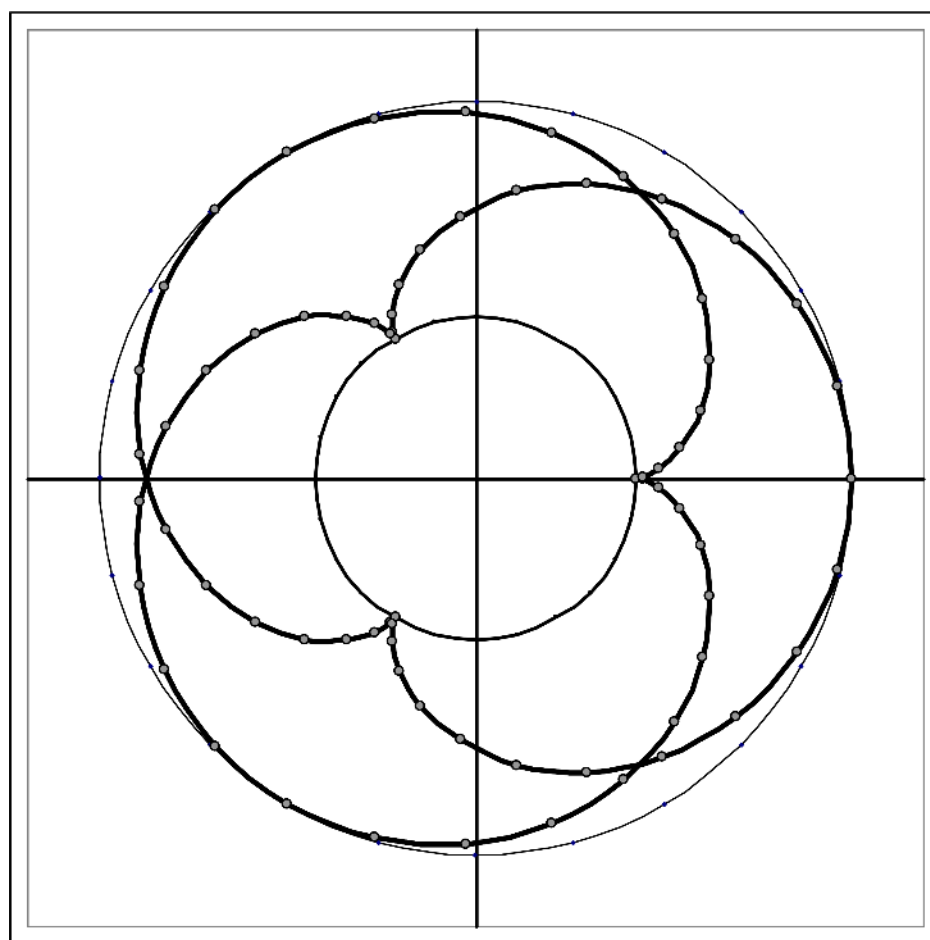


Должна получиться следующая траектория: Длина одной петли примерно 12,5 см, длина всей траектории – 50 см.

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1. 2

### Часть 3. Качение снаружи окружности (эпициклоиды)

В этом случае отношение диаметров  $\frac{D}{d} = \frac{3}{2}$ .



Следовательно замкнутая траектория получается. Когда подвижное колесо сделает 3 оборота вокруг своей оси, дважды обогнув неподвижный диск. Вид траектории показан на рисунке. Длина одной петли примерно 22 см, длина траектории 66 см.

IX класс. Экспериментальный тур. Вариант 1. 3