

-1. Собака и поводок

Условие

Задача 9-1. Собака и поводок

Всякая бродячая собака, по словам М. Булгакова, мечтает об ошейнике. Добавим к ошейнику и поводок. Когда собака бежит от радости, поводок с ручкой движется за ней, но... совсем по другому закону. Цель данной задачи научиться рассчитывать закон движения конца поводка по известному закону движения собаки.

Формализуем задачу: материальная точка A (т.е. собака) движется по заданному закону. Материальная точка B (конец поводка с ручкой) связана с точкой A гибкой невесомой нерастяжимой веревкой длины $l = 3,0$ м. Движение точки B зависит не только от того, как движется точка A , но и от характера сил, действующих на точку B , поэтому решить задачу о движении точки B в общем виде нельзя. Мы рассмотрим 3 частных случая такого движения.

Часть 1. Очень медленное движение (ползком).

Точка A движется вдоль прямой линии. График закона движения (зависимости координаты от времени) этой точки показан на рисунке. В начальный момент времени точка B находится в начале координат $x_B(0) = 0$.

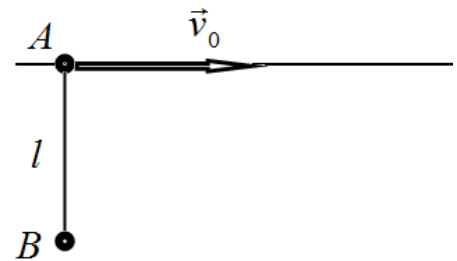


При медленном движении можно пренебречь инерционными свойствами точки B .

1.1 Постройте график закона движения точки B . 1.2 Рассчитайте пути, пройденные точками A и B за 60 секунд движения.

Часть 2. Движение без трения.

В данной части будем считать, что точка B движется по гладкой поверхности без трения (например, по гладкому льду). Точка A движется по прямой линии с постоянной скоростью $v_0 = 6,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. В момент времени $t = 0$ точка B находится на расстоянии $l = 3,0 \text{ м}$ в направлении перпендикулярном прямой, вдоль которой движется точка A . В этот момент поводок натянут, точка B покоится.



2.1 Кратко опишите словесно движение точки B . 2.2 Постройте схематический рисунок траектории точки B . 2.3 Чему равна максимальная скорость точки B в процессе движения?

Часть 3. Очень вязкое трение.

В данной части считаем, что на точку B действует сила вязкого трения пропорциональная скорости точки. Подсказка. Если на тело действует внешняя сила $\vec{F}_0$ и большая сила вязкого трения, пропорциональная скорости $\vec{F}_{\text{сопр.}} = -\beta \vec{v}$, то в любой момент времени вектор скорости точки $\vec{v}$ совпадает по направлению с вектором силы $\vec{F}_0$.

Точка A движется по окружности радиуса $R = 2l = 6,0 \text{ м}$ с постоянной по модулю скоростью $v_0 = 6,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3.1 Определите по какой траектории движется точка B , укажите параметры этой траектории. 3.2 Чему равен модуль скорости точки B в этом случае?

Решение

Задача 9-1. Собака и поводок

Часть 1. Очень медленное движение (ползком).

1.1 Для построения графика движения необходимо учесть, что точка B начинает двигаться, если ее расстояние до точки A начинает превышать длину поводка $l = 3,0 \text{ м}$. При движении точки B , ее координата меньше координаты точки A на величину l при движении точки A в положительном направлении оси, и больше координаты точки на величину l при движении

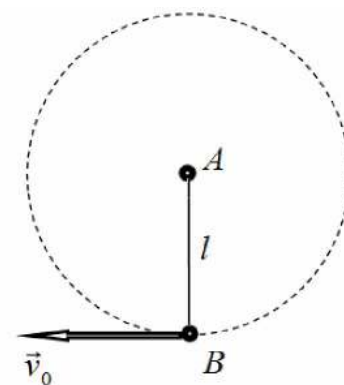
последней в отрицательном направлении. С помощью таких рассуждений построен график закона движения точки В, который показан на рис. 1.



1.2 Пути, пройденные рассматриваемыми материальными точками легко подсчитать по построенным графикам:

$$\begin{aligned} S_A &= 6 + 3 + 6 + 4 + 2 + 6 = 27 \text{ м} \\ S_B &= 3 + 3 + 3 = 9,0 \text{ м} \end{aligned} \quad (1)$$

IX класс. Теоретический тур. Вариант 1.



Часть 2. Движение без трения.

2.1 Эту часть задачи проще всего решить, если перейти в систему отсчета, связанную с точкой А. В этой системе отсчета в начальный момент времени точка В получает скорость v_0 , направленную перпендикулярно веревке. Так как на точку В действует только сила натяжения веревки, то в этой системе отсчета эта точка будет двигаться по окружности радиуса l вокруг точки А (см. рис.)

2.2 В исходной, неподвижной системе отсчета движение точки В будет являться суперпозицией движения по окружности с постоянной по модулю скоростью поступательного движения v_0 и поступательного движения центра окружности с той же скоростью v_0 . Результатом такого наложения является движение по циклоиде, вид которой показан на следующем рисунке.



2.3 Скорость точки В будет максимальной, когда вектор ее скорости относительно точки А совпадет по направлению с вектором скорости точки А (на рисунке – это верхняя точка траектории B_1). В этот момент времени скорость точки будет равна

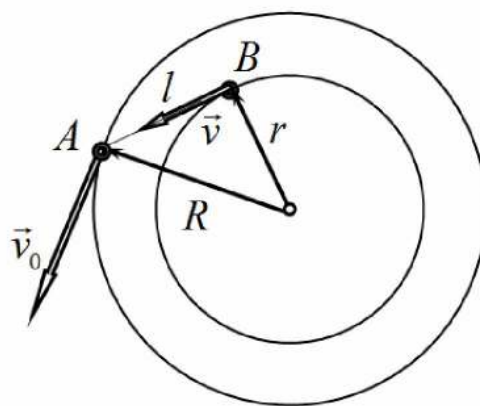
$$v_{\max} = 2v_0. \quad (2)$$

Часть 3. Очень вязкое трение.

3.1 Из приведенной подсказки следует, что вектор скорости точки В направлен вдоль поводка, то есть, направлен на точку А. Не сложно сообразить, что в этом случае траекторией точки В также будет окружность, концентрическая с траекторией точки А. На рисунке показаны обе траектории и векторы скорости обеих точек.

3.2 Из рисунка следует, что радиус окружности, по которой движется точка В, равен

$$r = \sqrt{R^2 - l^2} \approx 5,2 \text{ м}. \quad (3)$$



3.3 Так как угловые скорости движения точек равны, то модуль скорости точки В оказывается равным

$$\frac{v_0}{R} = \frac{v}{r} \Rightarrow v = v_0 \frac{r}{R} \approx 5,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (4)$$

IX класс. Теоретический тур. Вариант 1.