

-2. Поле пластин

Условие

Задача 11-2. Поле пластин

В данной задаче вам предстоит рассмотреть электростатическое поле, создаваемое участками равномерно заряженных плоскостей.

Для рассмотрения подобных конфигураций часто пользуются понятием телесного угла Ω . Телесный угол Ω – это часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол). Границей телесного угла является некоторая коническая поверхность.

Телесный угол измеряется отношением площади S той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса R сферы: $\Omega = \frac{S_{сф}}{R^2}$, по аналогии с тем, как радианную меру угла определяют как отношение длины дуги, вырезаемой данным центральным углом, к радиусу окружности (Рис.1). Телесные углы измеряются в безразмерных величинах, называемыхстерадианами (ср). $\Omega = 1$ ср равен телесному углу, вырезающему из сферы радиуса R поверхность с площадью R^2 . Полная сфера образует телесный угол, равный 4π стерадиан (полный телесный угол), для вершины, расположенной внутри сферы, в частности, для центра сферы.

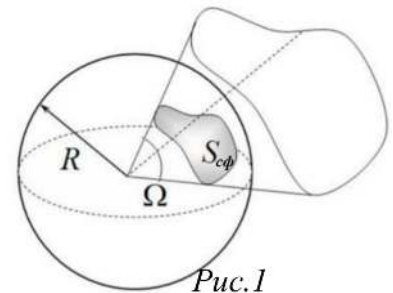


Рис.1

Часть 1. «Кусок» равномерно заряженной плоскости.

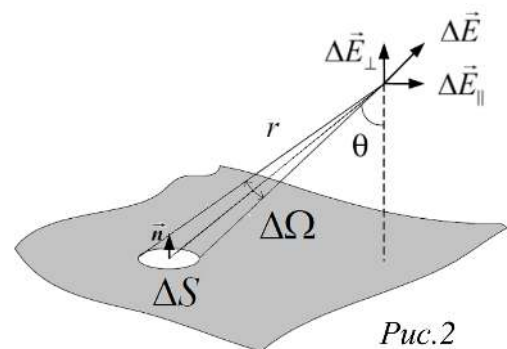
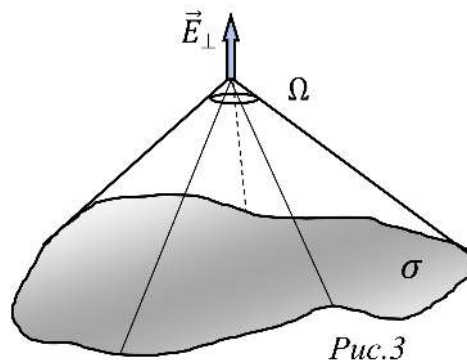


Рис.2

1.1. Покажите, что телесный угол, под которым «видна» небольшая часть плоскости (Рис.2) из точки наблюдения даётся выражением

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2},$$

где θ – угол между радиус-вектором, проведенным из центра данной площадки к точке наблюдения, и единичным вектором $\vec{n}$ нормали к поверхности.

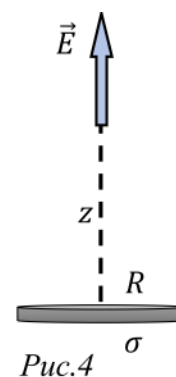


1.2. Докажите, что составляющая вектора напряженности электростатического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоскости (Рис. 3), определяется выражением:

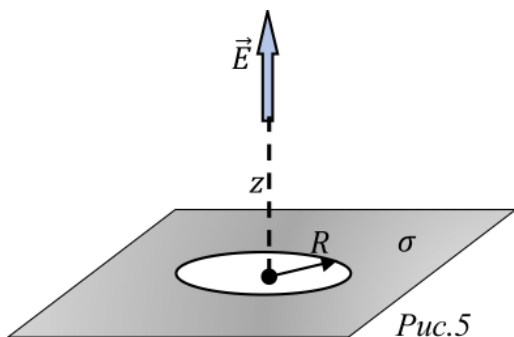
$$E_{\perp} = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда, Ω – телесный угол, стягиваемый этим участком плоскости.

1.3. Найдите напряженность электростатического поля E , создаваемого бесконечной плоскостью, по которой равномерно распределен заряд, поверхностная плотность которого равна σ .



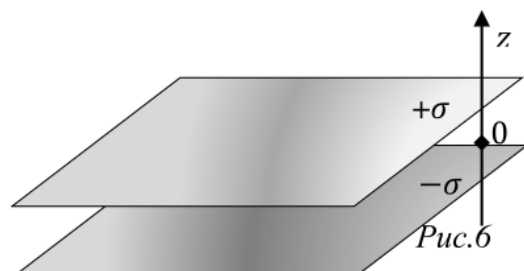
1.4. Найдите зависимость напряженности электростатического поля $E(z)$ равномерно заряженного диска радиуса R с поверхностной плотностью σ (Рис. 4) на его оси от расстояния z до его центра. Укажите, как изменяется данное выражение при $z \gg R$ и при $z \ll R$. Постройте схематический график полученной зависимости.



1.5. Пусть имеется бесконечная равномерно заряженная плоскость с круглым отверстием радиуса R (Рис. 5). Найдите зависимость напряженности электростатического поля $E(z)$ на оси симметрии системы от расстояния z до центра отверстия. Укажите, как изменяется данное выражение при $z \gg R$ и при $z \ll R$. Постройте схематический график полученной зависимости.

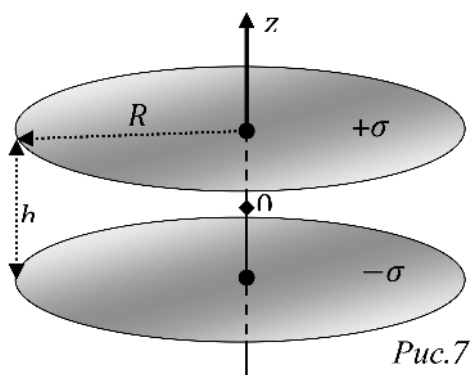
1.6. Найдите период малых колебаний точечного заряда Q массы m вблизи центра данного отверстия.

Укажите, каким должен быть знак данного точечного заряда, чтобы подобное колебательное движение было возможным.



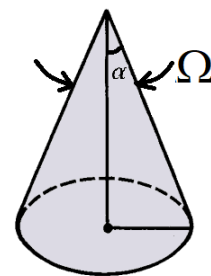
Часть 2. Плоский конденсатор

2.1. Найдите зависимость напряженности электростатического поля $E(z)$ между двумя бесконечными равномерно заряженными пластинами от расстояния до серединной плоскости между ними. Постройте график полученной зависимости.



2.2. Пусть плоский конденсатор представлен в виде двух круглых равномерно заряженных пластин (рис.7). Найдите напряженность электростатического поля на оси данной системы $E(z)$ в зависимости от расстояния до середины отрезка, соединяющего центры пластин конденсатора. Укажите, как изменяется полученное Вами выражение при $z \gg R$. Постройте график полученной зависимости при $R = 2h$.

2.3. Найдите относительную погрешность при расчете напряженности при $z = 0$ без учета конечных размеров пластин конденсатора по сравнению с результатами, полученными в пункте 2.2, при а) $R = h$; б) $R = 10h$; в) $R = 100h$.



Подсказки: 1) Телесный угол, соответствующий конусу с углом полураствора α , определяется по формуле: $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ 2) При малых $|x| \ll 1$ справедливо приближение: $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

Решение

Задача 11-2. Поле пластин

Часть 1

1.1. Рассмотрим выражение

$$\Delta S \cos \theta : \quad (1)$$

данное выражение представляет проекцию площади участка на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{r}$. В силу малости участка можно считать, что выражение (1) есть часть площади поверхности сферы радиуса r , которая стягивает телесный угол $\Delta\Omega$. Тогда пользуясь определением телесного угла, найдем:

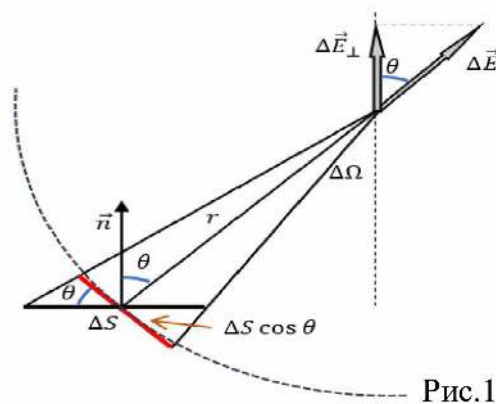


Рис.1

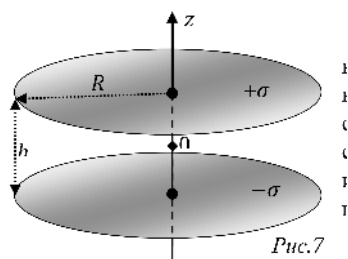
$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2} \quad (2)$$

1.2. Разобьём всю плоскую площадку на малые участки ΔS . Заряд такого участка:

$$\Delta q = \sigma \Delta S \quad (3)$$

Величина напряжённости электростатического поля, создаваемого данным участком, определяется выражением:

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Delta q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \Delta S}{r^2} \quad (4)$$



Компонента поля $\Delta E_{\perp}$, перпендикулярная заряженной плоскости, тогда (см. рис. 1):

$$\Delta E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \Delta S}{r^2} \cos \theta \quad (5)$$

$$E' = \frac{E}{\frac{\sigma}{2\epsilon_n}}$$

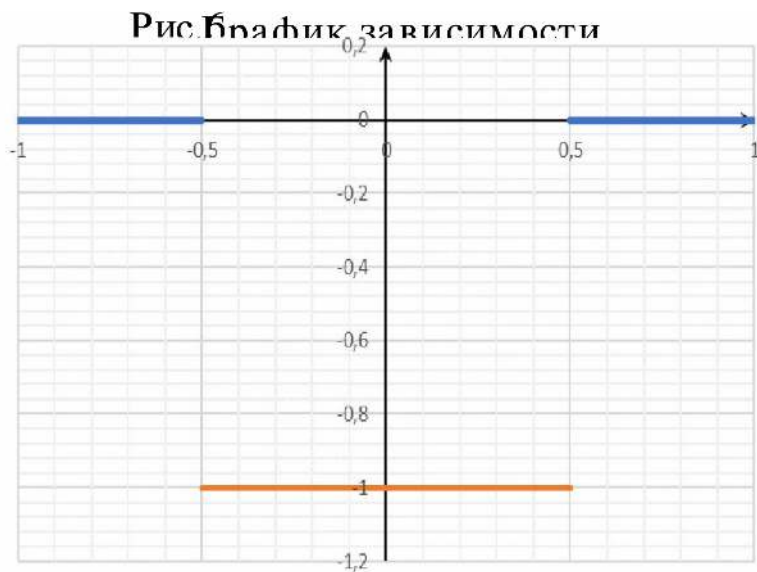
Воспользовавшись выражением (2), доказанном в п. 1.1, получаем:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma \Delta \Omega}{4\pi\epsilon_0} \quad (6)$$

$$E^+ = E^- = \frac{\sigma}{2\epsilon_n}$$

Согласно принципу суперпозиции для вектора напряжённости электростатического поля, находим, что:

$$\vec{E} = \sum \Delta \vec{E} \rightarrow E_{\perp} = \sum \Delta E_{\perp} = \sum \frac{\sigma \Delta \Omega}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum \Delta \Omega = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0}. \quad (7)$$



1.3. Бесконечная равномерно заряженная плоскость стягивает телесный угол

$$\Omega = 2\pi \quad (8)$$

Тогда в соответствии с (7):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (9)$$

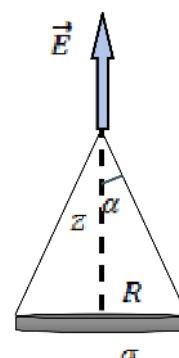
- хорошо известный результат!

XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.

1.4. Изобразим на рис.2 конус, ограничивающий телесный угол, под которым «виден» равномерно заряженный диск. Угол полураствора данного конуса определяется выражением:

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (10)$$

$$\cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$



Тогда телесный угол при вершине построенного конуса можно определить, воспользовавшись подсказкой:

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (11)$$

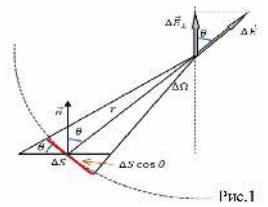
Величина перпендикулярной компоненты напряженности электростатического поля в соответствии с (7):

$$E_{\perp}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (12)$$

$$= \frac{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - |E(0)|}{|E(0)|} \cdot 1$$

Из осевой симметрии системы следует, что вектор напряженности поля направлен вдоль оси диска, поэтому формула (12) дает и модуль вектора напряженности поля:

$$E(z) = E_{\perp}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (12')$$



При $z \ll R$ получаем приближенное выражение

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{R}\right), \quad (13)$$

$$\Delta E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma \Delta S}{r^2}$$

видим, что величина напряженности поля линейно убывает.

В другом предельном случае $z \gg R$ получаем:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}\right)\right) = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}, \quad (14)$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2}\right)\right) = \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$$

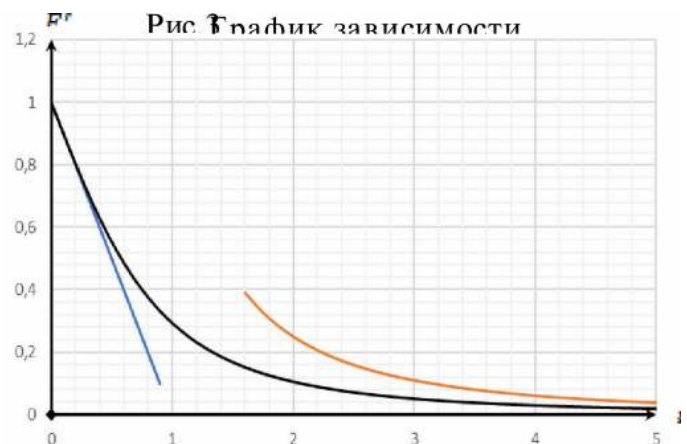
т.е. на большом удалении поле диска совпадает с полем точечного заряда.

Для построения графика (рис.3) зависимости $E(z)$ воспользуемся относительными координатами:

$$E' = \frac{E}{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}, \xi = \frac{z}{R}$$



На графике также отображены приближения: при $z \ll R \leftrightarrow \xi \ll 1$ и $z \gg R \leftrightarrow \xi \gg 1$.



XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.

1.5. Для получения ответа в данном пункте определим, под каким телесным углом «видна» часть бесконечной равномерно заряженной плоскости без отверстия:

$$\Omega' = \Omega_{\text{пл}} - \Omega_{\text{диска}} = 2\pi \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Тогда величина напряженности поля на оси симметрии данной системы в соответствии с (7):

$$E = \frac{\sigma \Omega'}{4\pi \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (16)$$

$$E_1(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

При $z \ll R$:

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{R}, \quad (17)$$

видим, что величина напряженности поля линейно возрастает.

При $z \gg R$:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0 R} \left(1 - \frac{R^2}{2z^2} \right), \quad (18)$$

поле совпадает с полем бесконечной равномерно заряженной плоскости и отрицательного точечного заряда.

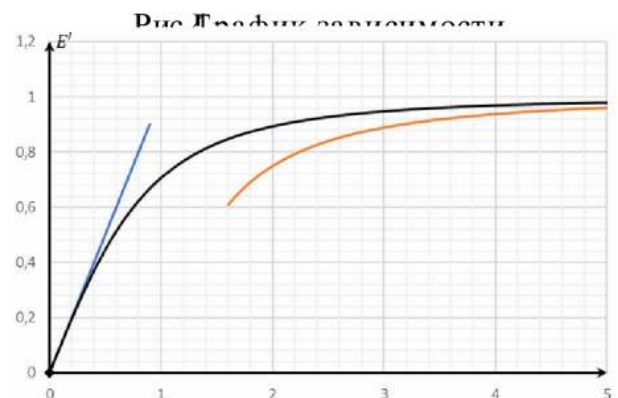
Для построения графика (рис.4) зависимости $E(z)$ опять воспользуемся относительными координатами:

$$E' = \frac{E}{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}, \quad \xi = \frac{z}{R}.$$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{R} \right)$$

На графике также отображены приближения при $z \ll R \leftrightarrow \xi \ll 1$ и $z \gg R \leftrightarrow \xi \gg 1$.

1.6. Для возникновения колебаний нужна возвращающая сила, в нашем случае, заряд должен притягиваться к центру отверстия вдоль оси, следовательно, это должен быть отрицательный заряд:



$$Q < 0 \quad (19)$$

Сила, действующая на точечный заряд Q в электростатическом поле $\vec{E}$, определяется выражением:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (20)$$

XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.

Запишем тогда 2-ой закон Ньютона для заряда Q , находящегося на оси симметрии системы на малом расстоянии $z \ll R$ от центра отверстия:

$$m\vec{a} = Q\vec{E}(z) \quad (21)$$

В проекциях на ось Oz :

$$ma_z = -|Q|E(z) = -|Q|\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0 R} \quad (22)$$

Преобразуем (22), чтобы получить уравнение гармонических колебаний:

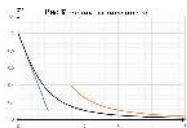
$$a_z + \frac{\sigma|Q|}{2\varepsilon_0 m R} z = 0 \quad (23)$$

$$m\ddot{a} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R} \left(\dot{a} + \frac{a}{2} \right) = 0$$

И тогда для циклической частоты и периода гармонических колебаний можем записать:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sigma|Q|}{2\varepsilon_0 m R}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m R}{\sigma|Q|}} \quad (24)$$

$$T_{\text{диска}} = 2\pi \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m R}{\sigma|Q|}}$$



Часть 2.

2.1 Бесконечные равномерно заряженные пластины создают одинаковое по модулю однородное электростатическое поле:

$$E^+ = E^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (25)$$

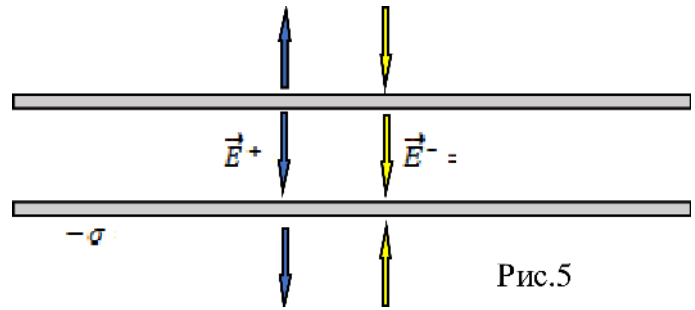
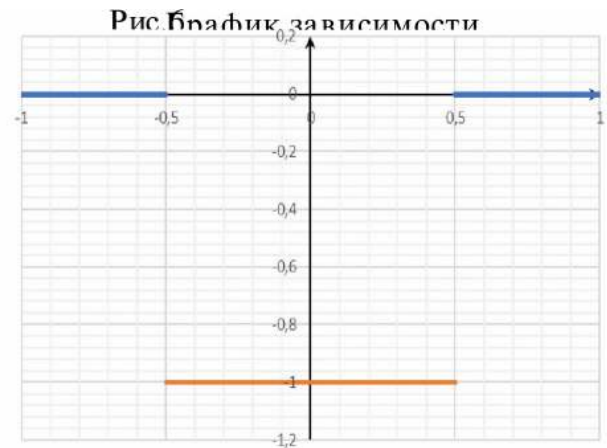


Рис.5

В соответствии с рисунком 5 электростатическое поле снаружи отсутствует ввиду того, что E^+ и E^- одинаковы по модулю и противоположны по направлению. Величина напряженности электростатического поля между пластинами определяется суммой модулей E^+ и E^- , так как между пластинами их направления совпадают.



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (26)$$

XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.

2.1 Рассмотрим вначале поле между пластинами конденсатора. Проведем вспомогательные конические поверхности (рис.7а), ограничивающие телесные углы, которые стягиваются пластинами конденсатора.

Тогда положительной пластине соответствует угол полураскрытия конуса α , а отрицательной — β .

Определим косинусы этих углов для расчета телесных углов:

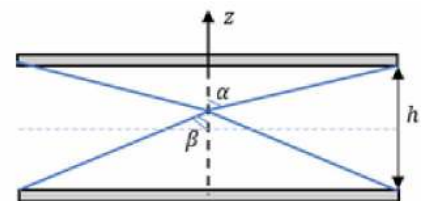


Рис.7а

$$\cos \alpha = \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}, \cos \beta = \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \quad (27)$$

$$\alpha = \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}$$

$$\beta = \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}}$$

И соответствующие телесные углы:

$$\Omega_{\alpha} = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} \right) \quad (28)$$

$$\Omega_{\beta} = 2\pi(1 - \cos \beta) = 2\pi \left(1 - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \right) \quad (29)$$

$$\Omega_{\beta} = 2\pi(1 - \cos \beta) = 2\pi \left(1 - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \right)$$

$$\Omega_{\alpha} = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} \right)$$

Проекции векторов напряженности на ось Oz :

$$E_z^+ = -\frac{\sigma\Omega_{\alpha}}{4\pi\epsilon_0}, \quad E_z^- = -\frac{\sigma\Omega_{\beta}}{4\pi\epsilon_0} \quad (30)$$

$$E_z^+ = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} \right)$$

$$E_z^- = 2\pi(1 - \cos \beta) = 2\pi \left(1 - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \right)$$

По принципу суперпозиции:

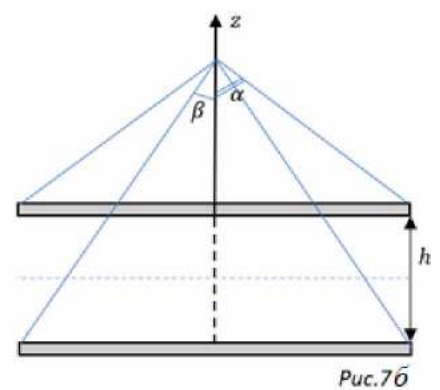
$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(2 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \right) \quad (31)$$

$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(2 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \right)$$

Приведем аналогичные результаты для поля снаружи конденсатора (рис.7б):

$$\cos \alpha = \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}, \cos \beta = \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \quad (32)$$

$$\Omega_\alpha = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} \right) \quad (33)$$



$$= \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}}$$

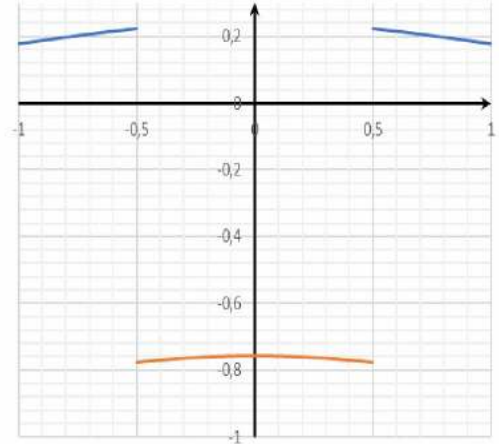
$$\alpha = \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}$$

$$\Omega_\alpha = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} \right)$$

XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.

$$\Omega_\beta = 2\pi(1 - \cos \beta) = 2\pi \left(1 - \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \right) \quad (34)$$

$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} \right) \quad (35)$$



$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} \right)$$

$$\Omega_\beta = 2\pi(1 - \cos \beta) = 2\pi \left(1 - \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \right)$$

Отметим, что на больших расстояниях найденное поле соответствует полю точечного диполя, т.е. убывает обратно пропорционально кубу расстояния

Схематический график в этом случае имеет вид

2.1. Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - |E(0)|}{|E(0)|} \cdot 100\% \quad (37)$$

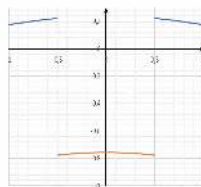


Таблица. Результат расчета относительной погрешности определения напряженности электростатического поля внутри конденсатора:

$\frac{R}{h}$	$\varepsilon, \%$
1	81
10	5,3
100	0,50

XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.