

-2. Поле пластин

Условие

Задача 11-2. Поле пластин

В данной задаче вам предстоит рассмотреть электростатическое поле, создаваемое участками равномерно заряженных плоскостей.

Для рассмотрения подобных конфигураций часто пользуются понятием телесного угла Ω . Телесный угол Ω – это часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол). Границей телесного угла является некоторая коническая поверхность.

Телесный угол измеряется отношением площади S той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса R сферы: $\Omega = \frac{S_{сф}}{R^2}$, по аналогии с тем, как радианную меру угла определяют как отношение длины дуги, вырезаемой данным центральным углом, к радиусу окружности (Рис.1). Телесные углы измеряются в безразмерных величинах, называемыхстерадианами (ср). $\Omega = 1$ ср равен телесному углу, вырезающему из сферы радиуса R поверхность с площадью R^2 . Полная сфера образует телесный угол, равный 4π стерадиан (полный телесный угол), для вершины, расположенной внутри сферы, в частности, для центра сферы.

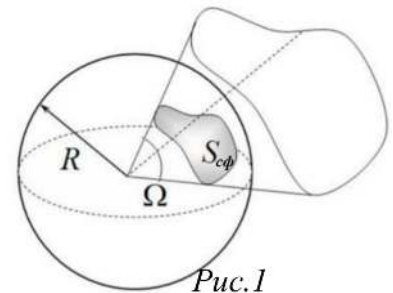


Рис.1

Часть 1. «Кусок» равномерно заряженной плоскости.

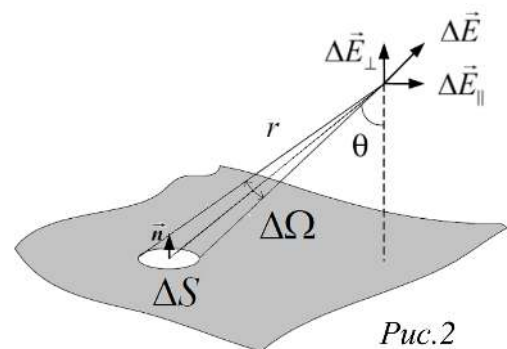
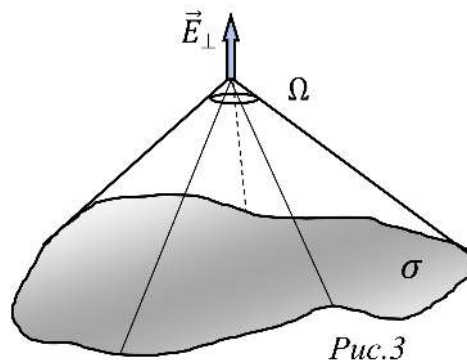


Рис.2

1.1. Покажите, что телесный угол, под которым «видна» небольшая часть плоскости (Рис.2) из точки наблюдения даётся выражением

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2},$$

где θ – угол между радиус-вектором, проведенным из центра данной площадки к точке наблюдения, и единичным вектором $\vec{n}$ нормали к поверхности.

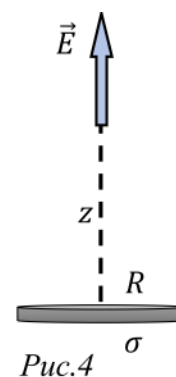


1.2. Докажите, что составляющая вектора напряженности электростатического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоскости (Рис. 3), определяется выражением:

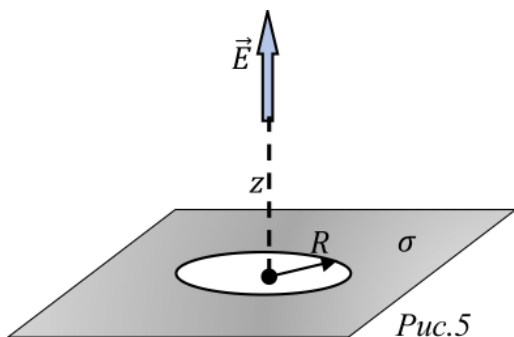
$$E_{\perp} = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0},$$

где σ – поверхностная плотность заряда, Ω – телесный угол, стягиваемый этим участком плоскости.

1.3. Найдите напряженность электростатического поля E , создаваемого бесконечной плоскостью, по которой равномерно распределен заряд, поверхностная плотность которого равна σ .



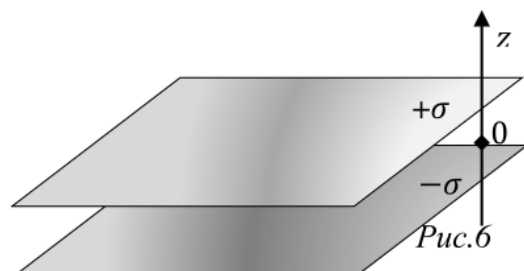
1.4. Найдите зависимость напряженности электростатического поля $E(z)$ равномерно заряженного диска радиуса R с поверхностной плотностью σ (Рис. 4) на его оси от расстояния z до его центра. Укажите, как изменяется данное выражение при $z \gg R$ и при $z \ll R$. Постройте схематический график полученной зависимости.



1.5. Пусть имеется бесконечная равномерно заряженная плоскость с круглым отверстием радиуса R (Рис. 5). Найдите зависимость напряженности электростатического поля $E(z)$ на оси симметрии системы от расстояния z до центра отверстия. Укажите, как изменяется данное выражение при $z \gg R$ и при $z \ll R$. Постройте схематический график полученной зависимости.

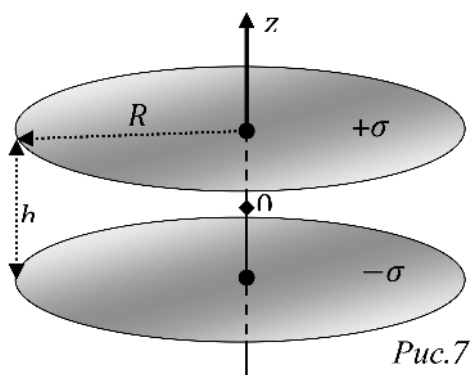
1.6. Найдите период малых колебаний точечного заряда Q массы m вблизи центра данного отверстия.

Укажите, каким должен быть знак данного точечного заряда, чтобы подобное колебательное движение было возможным.



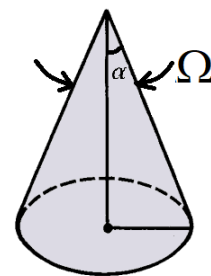
Часть 2. Плоский конденсатор

2.1. Найдите зависимость напряженности электростатического поля $E(z)$ между двумя бесконечными равномерно заряженными пластинами от расстояния до серединной плоскости между ними. Постройте график полученной зависимости.



2.2. Пусть плоский конденсатор представлен в виде двух круглых равномерно заряженных пластин (рис.7). Найдите напряженность электростатического поля на оси данной системы $E(z)$ в зависимости от расстояния до середины отрезка, соединяющего центры пластин конденсатора. Укажите, как изменяется полученное Вами выражение при $z \gg R$. Постройте график полученной зависимости при $R = 2h$.

2.3. Найдите относительную погрешность при расчете напряженности при $z = 0$ без учета конечных размеров пластин конденсатора по сравнению с результатами, полученными в пункте 2.2, при а) $R = h$; б) $R = 10h$; в) $R = 100h$.



Подсказки: 1) Телесный угол, соответствующий конусу с углом полураствора α , определяется по формуле: $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$ 2) При малых $|x| \ll 1$ справедливо приближение: $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.