

геометрически

Условие

Задача 11.1. Алгебра и геометрия на наклонной плоскости

Кто-то умеет хорошо строить диаграммы векторов сил и предпочитает решать динамические задачи «геометрически». Кто-то рисовать совсем не умеет, и ему приходится заниматься громоздкими математическими преобразованиями.

В данной задаче вам предстоит рассмотреть несколько простых и знакомых задач, на примере которых вам предстоит продемонстрировать свои как алгебраические, так и геометрические способности.

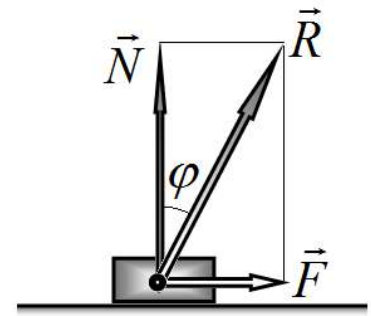
Во всех частях задачи мы будем рассматривать движение бруска по поверхности.

Коэффициент трения бруска о поверхность во всех частях задачи равен μ

1. Брусок на неподвижной наклонной плоскости

Брусок движется по горизонтальной поверхности. Как пишут в учебниках, на брусок со стороны поверхности действуют сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения (которую здесь и далее) будем обозначать $\vec{F}$. Но на самом деле это не разные силы – это две компоненты одной силы, силы взаимодействия бруска и поверхности, которую мы обозначим $\vec{R}$ (силы реакции).

Назовем угол φ между направлением силы реакции $\vec{R}$ и нормалью к поверхности.



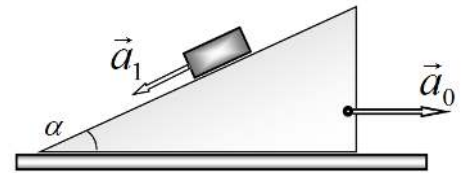
1.1 Выразите коэффициент трения μ чрез угол трения φ . 1.2 Выразите модуль силы реакции $\vec{R}$ через модуль силы нормальной реакции $\vec{N}$ и угол трения φ .

Брусок находится на наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом.

1.3 Нарисуйте взаимное расположение векторов силы реакции $\vec{R}$ и силы тяжести $m\vec{g}$, если брусок скользит по наклонной плоскости. 1.4 При каком минимальном угле наклона α_0 брусок начнет соскальзывать с наклонной плоскости? Ответ выразите через угол трения φ . Как в этом случае будет направлен вектор $\vec{R}$? Чему он будет равен? 1.5 Брусок поместили на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом ($\alpha > \alpha_0$). Чему равно ускорение бруска в этом случае? Выразите ответ через углы α и φ . Дайте геометрическую интерпретацию полученного выражения.

2. Брусок на ускоренно движущейся призме

Брусок положили на наклонную грань треугольной призмы, наклоненную под углом α к горизонту. Под действием внешних сил призма движется горизонтально с постоянным ускорением $\vec{a}_0$, как показано на рисунке.



2.1 Покажите, что движение бруска по поверхности ускоренно движущейся призмы можно описать как движение бруска по неподвижной призме, только с другим значением вектора ускорения свободного падения $\vec{g}'$ (который можно назвать эффективным ускорением свободного падения). Найдите угол β между векторами $\vec{g}'$ и g' .

2.2 Покажите, что движение бруска по ускоренно движущейся призме можно описывать, как движение бруска по неподвижной призме, но с другим углом наклона к горизонту α' . Выразите значение этого угла через ускорение призмы $\vec{a}_0$, ускорение свободного падения $\vec{g}$ и угол α .

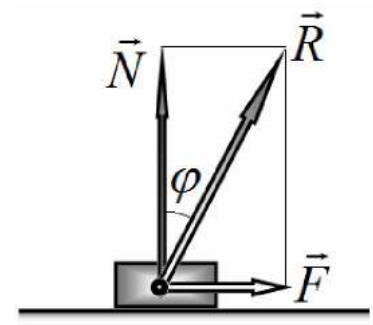
2.3 Пусть угол наклона призмы к горизонту α меньше α_0 (найденного в п.1.4). Запишите соотношение для углов α, β, φ , при котором начнется скольжение бруска.

Из этого соотношения можно найти минимальное ускорение $\vec{a}_0$, при котором начнется скольжение бруска, но искать это значение (т.е. решать полученное уравнение) не требуется.

Решение

Задача 11.1 Алгебра и геометрия на наклонной плоскости.

Часть 1. Неподвижная наклонная плоскость.



1.1 В соответствии с законом кулона – Амонтона (для силы трения) при скольжении тела, модуль силы трения связан с силой нормальной реакции простым соотношением

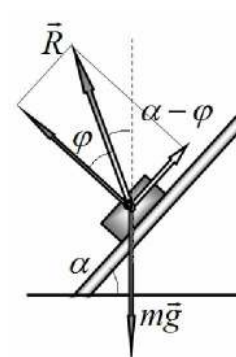
$$F = \mu N. \quad (1)$$

Как следует из рисунка справедливо соотношение:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N} = \mu \quad (2)$$

1.2 Модуль силы реакции выражается через модуль силы нормальной реакции следующим образом

$$R = \frac{N}{\cos \varphi}. \quad (3)$$



1.3-14 Так как на брусок действуют только две силы $\vec{R}$ и $m\vec{g}$, то для соскальзывания бруска необходимо, чтобы их сумма имела горизонтальную составляющую, направленную в сторону спуска по наклонной плоскости. А это возможно только при

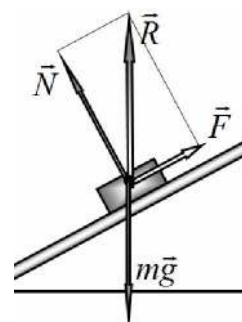
$$\alpha > \varphi \quad (4)$$

Традиционное решение этой задачи: проекция силы тяжести на наклонную плоскость должна превысить силу трения:

$$mg \sin \alpha > \mu N = \mu mg \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > \mu,$$

что равносильно условию (4).

1.4 В предельном случае (начала скольжения) сила реакции направлена вертикально и по модулю равна силе тяжести.



1.5 Известная формула для ускорения бруска на наклонной плоскости

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (5)$$

может быть получена с помощью рисунка к п.1.3: Горизонтальная составляющая ускорения бруска равна

$$a_{\text{гор.}} = \frac{R \sin(\alpha - \varphi)}{m} \quad (6)$$

Кроме того, проекции силы тяжести и силы реакции на нормаль к наклонной плоскости равны (т.к. ускорение бруска направлено вдоль наклонной плоскости):

$$R \cos \varphi = mg \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mg \cos \alpha}{\cos \varphi}$$

Тогда ускорение бруска равно

$$a = \frac{a_{\text{гор.}}}{\cos \alpha} = \frac{mg \cos \alpha \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi \cdot m \cos \alpha} = g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}, \quad (7)$$

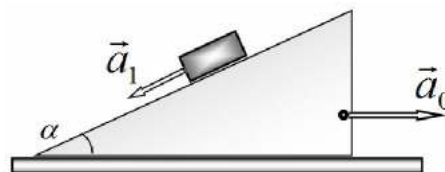
что равносильно формуле (5).

XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.

2. Брусок на ускоренно движущейся призме

2.1 Представим полное ускорение бруска в виде суммы векторов ускорения призмы $\vec{a}_0$ и ускорения бруска относительно призмы $\vec{a}_1$:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \quad (8)$$

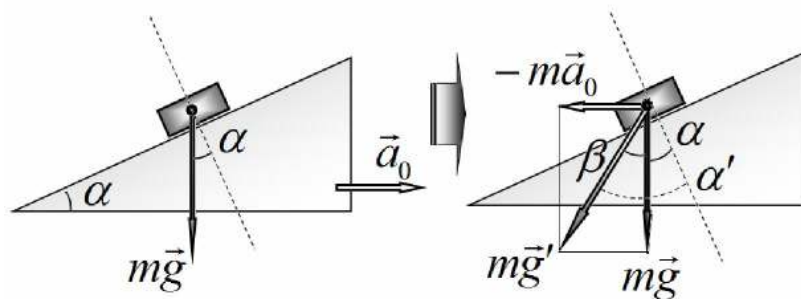


Уравнение 2 закона Ньютона (в векторной форме) для призмы в этом случае имеет вид:

$$m(\vec{a}_0 + \vec{a}_1) = m\vec{g} + \vec{R} \quad (9)$$

в котором $\vec{R}$ - введенная ранее сила реакции, действующая на брусок со стороны призмы. Важно, что эта сила реакции определяется силой тяжести. Перепишем уравнение (9) в виде

$$m\vec{a}_1 = m(\vec{g} - \vec{a}_0) + \vec{R} \quad (10)$$



Это уравнение можно толковать, как уравнение движения бруска на наклонной плоскости, если ускорение свободного падения равно

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0. \quad (11)$$

Как следует из рисунка, вектор $\vec{g}'$ отклонен от вектора $\vec{g}$ на угол

$$\beta = \arctg \frac{a_0}{g}. \quad (12)$$

Отметим, что проведенные рассуждения равносильны переходу в неинерциальную систему отсчета, связанную с призмой. В этой системе отсчета «появляется» сила инерции..., но это выходит за рамки школьной программы.

2.2 Угол наклона плоскости к горизонту α также равен углу между вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$ и нормалью к плоскости. Поэтому изменение направления вектора ускорения свободного падения (переход от $\vec{g}$ к $\vec{g}'$) равносильно изменению угла между нормалью к наклонной плоскости и вектором эффективного ускорения свободного падения, т.е. к изменению угла наклона плоскости. Также из рисунка легко заметить, что этот новый угол α' оказывается равным

$$\alpha' = \alpha + \beta \quad (13)$$

2.3 Условие начала скольжения по наклонной плоскости было сформулировано ранее (неравенство (4)), поэтому остается только переписать его:

$$\alpha' > \varphi \Rightarrow \alpha + \beta > \varphi \quad (14)$$

В заключение отметим, что от этого «углового» условия можно перейти и к привычным формулировкам:

$$\beta > \varphi - \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \Rightarrow \frac{a_0}{g} > \operatorname{tg}(\alpha - \arctg \mu)$$

Это неравенство без труда (но при знании тригонометрических формул) может быть преобразовано к привычному виду.

XI класс. Теоретический тур. Вариант 2.