

-1. Упругий жгут

Условие

Задача 10-1. Упругий жгут

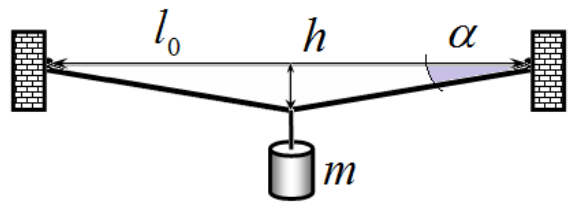
Упругий жгут длиной l_0 выдерживает максимальную силу натяжения равную $F_{\max}$ (при большей силе он разрывается). Масса жгута равна m_0 . Можно считать, что вплоть до разрыва деформация шнура (удлинение) x связана с возникающей силой упругости F по закону Гука

$$F = kx. \quad (1)$$

где k - известный коэффициент упругости жгута.

1. Провисание шнура

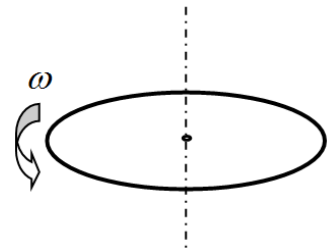
Жгут закреплен горизонтально между двумя точками подвеса, находящимися на расстоянии l_0 (равному длине жгута в недеформированном состоянии). К середине жгута подвешивают груз массы m .



1.1 Найдите величину провисания жгута h . 1.2 Какую максимальную массу груза может выдержать жгут при таком подвесе?

В данной части задачи массой жгута следует пренебречь, величину провисания, а также угол отклонения жгута α можно считать малыми. При малых углах справедливы следующие приближенные формулы

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$



2. Вращающийся жгут

Из описанного жгута сделали круглое кольцо и раскрутили его до угловой скорости ω вокруг собственной оси.

2.1 Чему равна сила упругости (сила натяжения) жгута в этом случае? 2.2 До какой максимальной угловой скорости можно раскрутить жгут, чтобы он еще не разорвался? 2.3 Чему равна максимальная скорость вращения нерастяжимого кольца (при той же предельной силе натяжения)?

Решение

Задача 10-1. Упругий жгут

Часть 1. Провисание шнура

1.1 На рисунке показаны силы, действующие на точку крепления груза. Сила натяжения жгута обозначена $\vec{T}$. Условие равновесия в проекции на вертикальную ось выражается уравнением

$$mg = 2T \sin \alpha. \quad (1)$$

Силу упругости жгута также можно выразить из закона Гука

$$T = kx = k \left(\frac{l_0}{2 \cos \alpha} - \frac{l_0}{2} \right) = \frac{kl_0}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \quad (2)$$

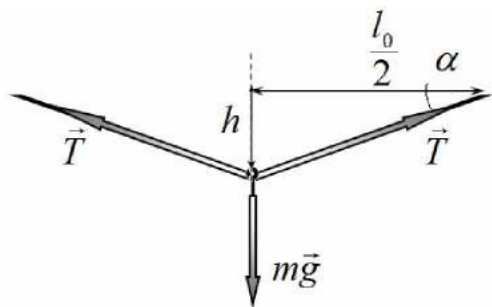
Из этих выражений получаем уравнение для определения угла α :

$$mg = 2 \frac{kl_0}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \sin \alpha \Rightarrow \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha = \frac{mg}{kl_0}. \quad (3)$$

Это уравнение может быть сведено к алгебраическому уравнению степени, большей, чем два. Поэтому для его решения проще воспользоваться приближением малых углов. В этом приближении (с учетом формул, приведенных в условии задачи) левую часть уравнения преобразуем к виду:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \sin \alpha \approx \frac{1 - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} \alpha \approx \frac{\alpha^3}{2}$$

Тогда из уравнения (3) следует, что угол отклонения жгута от горизонтали задается формулой



$$\alpha = \sqrt[3]{2 \frac{mg}{kl_0}} \quad (4)$$

А провисание жгута оказывается равным

$$h = \frac{l_0}{2} \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{l_0}{2} \alpha = \frac{l_0}{2} \sqrt[3]{2 \frac{mg}{kl_0}}. \quad (5)$$

$$\boxed{h = \frac{l_0}{2} \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{l_0}{2} \alpha = \frac{l_0}{2} \sqrt[3]{2 \frac{mg}{kl_0}}}$$

1.2 Жгут разорвется, если сила его натяжения станет T (формула (1)) равной максимальной силе $F_{\max}$. В формулах (1)-(2) воспользуемся приближением малых углов и решим полученную систему уравнений относительно массы груза, а затем вместо произвольной силы натяжения подставим ее предельное значение:

$$\begin{cases} mg = 2T \sin \alpha \\ T = \frac{kl_0}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg = 2T \alpha \\ T = \frac{kl_0}{2} \frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (mg)^2 = 4T^2 \alpha^2 \\ T = \frac{kl_0}{2} \frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{(mg)^2}{T} = \frac{16T^2}{kl_0}$$

Откуда следует окончательный результат:

$$m_{\max} = \frac{4}{g} \sqrt{\frac{F_{\max}^3}{kl_0}} \quad (6)$$

$$\boxed{m_{\max} = \frac{4}{g} \sqrt{\frac{F_{\max}^3}{kl_0}}}$$

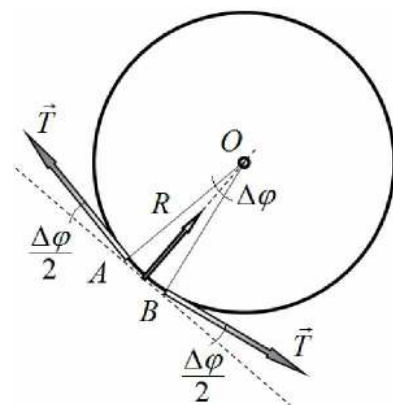
X класс. Теоретический тур. Вариант 1.

Часть 2. Вращающийся жгут

2.1 Выделим мысленно на кольце небольшой участок AB , видимый из центра кольца O под малым углом $\Delta\varphi$. Он движется по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \omega^2 R. \quad (7)$$

Это ускорение ему сообщают силы упругости кольца T , приложенные к концам выделенного участка. Запишем уравнение



10 класс. Теоретический тур.

второго закона Ньютона для выделенного участка кольца в проекции на радиальное направление (с учетом малости угла $\Delta\varphi$)

$$\Delta m \omega^2 R = 2T \frac{\Delta\varphi}{2}. \quad (8)$$

Здесь $\Delta m = \frac{m_0}{2\pi} \Delta\varphi$ - масса выделенного участка. Заметим, что это выражение для массы не зависит от того, растянато кольцо, или нет. Подставляя это выражение для массы участка, получим выражение для силы натяжения кольца

$$T = \frac{m_0}{2\pi} \omega^2 R. \quad (9)$$

Это выражение не является окончательным ответом, так как в нем остается неизвестным радиус кольца, который увеличивается по мере раскручивания. Поэтому запишем формулу для силы натяжения, используя закон Гука:

$$T = k(2\pi R - l_0) \quad (10)$$

Решая совместно уравнения (9)-(10) относительно силы натяжения T , получим следующую формулу:

$$T = \frac{kl_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0 \omega^2} - 1} \quad (11)$$

$$T = \frac{kl_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0 \omega^2} - 1}$$

Эта формула справедлива только при $\frac{4\pi^2 k}{m_0 \omega^2} - 1 > 0$, или при

$$\tilde{\omega}_1 < 2\pi \sqrt{\frac{k}{m_0}} \quad (12)$$

При больших угловых скоростях кольцо начнет расширяться вплоть до разрыва, так как силы упругости не в состоянии обеспечить нужное центростремительное ускорение всем частям кольца. **2.2** Итак, первое условие разрыва кольца – нарушение неравенства (12). Считая, что неравенство (12) выполняется, а сила упругости, определяемая формулой (11) достигла максимального значения $F_{\max}$, выразим из (12) угловую скорость, при которой достигается эта сила натяжения:

$$F_{\max} = \frac{kl_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0 \omega^2} - 1} \Rightarrow \tilde{\omega}_2 = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m_0 \left(1 + \frac{kl_0}{F_{\max}}\right)}} \quad (13)$$

$$F_{\max} = \frac{kl_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0 \omega^2} - 1} \Rightarrow \tilde{\omega}_2 = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m_0 \left(1 + \frac{kl_0}{F_{\max}}\right)}}$$

X класс. Теоретический тур. Вариант 1.

Заметим, что угловая скорость, определяемая по формуле (13) всегда меньше, скорости, задаваемой формулой (12). Поэтому окончательным ответом на поставленный вопрос является формула (13).

2.3 Переход к нерастяжимому жгуту может быть формально проведен с помощью формулы (13), если считать, что $k \Rightarrow \infty$. В этом пределе максимальная угловая скорость угловая скорость описывается формулой

$$\tilde{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{F_{\max}}{m_0 l_0}} \quad (14)$$

Впрочем, этот же результат непосредственно следует из уравнения (9), если положить, что длина окружности кольца равна длине жгута.