

Условие

Задача 11-2. «Монгольфьер и шарльер»

Первые полеты на воздушных шарах состоялись во Франции в 1783 году. Энтузиастами воздухоплавания являлись братья Жозеф-Мишель и Жак-Этьен Монгольфье. Они сконструировали и изготовили шар, который наполнялся теплым (подогреваемым снизу) воздухом. Воздушные шары такого типа получили название монгольфьеры.

Конкурентами братьев Монгольфье выступили профессор Жак Шарль, которому помогали механики братья Роббер. Их шары наполнялись водородом. Шары, наполненные легкими газами, получили названия шарльеры.

В данной задаче вам необходимо рассчитать высоты, на которые могли подниматься эти шары. Предварительно Вам необходимо рассчитать некоторые характеристики земной атмосферы. Во всех расчетах используйте модель стандартной атмосферы. Считайте, что на любой высоте газ внутри шаров находится в состоянии равновесия – температура и давления постоянны внутри объема оболочки.

Часть 1. Стандартная атмосфера.

Для расчета летных характеристик различных летательных аппаратов используется модель «стандартной атмосферы» - вертикальное распределение температуры, давления и плотности воздуха для средних годовых условий в среднем для всех широт, принятое по международному соглашению (международная стандартная атмосфера). При этом предполагается, что в атмосфере выполняются уравнение состояния для идеальных газов и основное уравнение статики.

В этой модели приняты следующие численные значения величин (в решении задачи используйте округленные значения с нужным числом значащих цифр, стремитесь получать численные значения с максимально допустимой точностью):

Молярная масса воздуха $M = 28,97 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$;

Универсальная газовая постоянная $R = 8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$;

Ускорение свободного падения $g = 9,807 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

Атмосферное давление на уровне моря $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$;

Температура воздуха на уровне моря $t_0 = 15,00^\circ\text{C}$;

Значение абсолютного нуля температур $t_{\text{АН}} = -273,16^\circ\text{C}$;

До высоты $z = 11,0 \text{ км}$ температура воздуха убывает по линейному закону, убывая на величину $\frac{\Delta t^\circ}{\Delta z} = 6,500 \frac{^\circ\text{C}}{\text{км}}$ на каждом километре высоты.

1.1 Рассчитайте плотность воздуха на уровне моря ρ_0 .

1.2 Запишите формулу для зависимости абсолютной температуры воздуха от высоты в виде

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad (1)$$

и рассчитайте численные значения параметров T_0 и h .

1.3 Получите уравнение, описывающее изменение давления ΔP при увеличении высоты на малую величину Δz .

Зависимости давления $P(z)$ и плотности воздуха $\rho(z)$ от высоты в рамках модели стандартной атмосферы имеют вид

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha \quad (2)$$

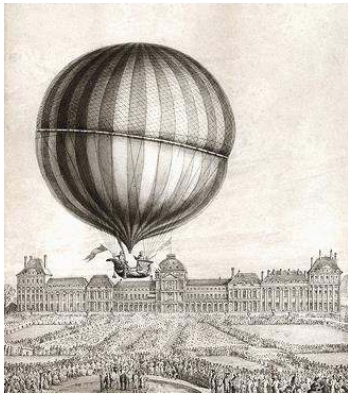
$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\beta \quad (3)$$

1.4 Получите формулы для расчета показателей степеней α, β , найдите их численные значения.

1.5 На отдельном бланке постройте графики зависимостей $\frac{T(z)}{T_0}, \frac{P(z)}{P_0}, \frac{\rho(z)}{\rho_0}$.

В ходе дальнейшего решения используйте найденные значения параметров $\rho_0, T_0, \alpha, \beta, h$ как известные. Кроме того, на этом же бланке можете проводить дополнительные построения, необходимые для решения задачи

*Часть 2. Шарльер.***



Воздушный шар, построенный под руководством профессора Жака Шарля, которому помогали братья Роббер, имел объем $V = 400 \text{ м}^3$. Оболочка шара заполнялась водородом, давление которого незначительно превышало атмосферное. После этого оболочка была герметично закрыта. Старт этого шара состоялся 1 декабря 1783 из сада Тюильри в Париже. Экипаж аэростата состоял из Шарля и Николя-Луи Роббера, младшего из братьев Роббер. Аппарат пролетел 43 км, пробыв в воздухе 2 часа, а затем приземлился в городе Несле. После чего Роббер сошёл, а Шарль снова поднялся в воздух, достигнув высоты ...

2.1 Рассчитайте максимальную общую массу m_{max} шара (оболочки, газа, гондолы, пассажиров) этого шара, при которой он начнет подниматься, находясь на уровне моря.

2.2 Оцените, на какую максимальную высоту смог подняться Ж. Шарль, после того как сошел Роббер.

Считайте, что

- в первом поле масса шара с двумя пассажирами равнялась максимально возможной массе, найденной в п. 2.1; - масса Роббера равна $m_1 = 90$ кг; - объем шара остается неизменным при подъеме.

Часть 3. Монгольфьер.



12 октября 1783 года на шаре объёмом 2200 м^3 в воздух впервые поднялся человек - Этьен Монгольфье. Этот шар имел оболочку из лёгкой ткани, оклеенной бумагой. К нему была подвешена кольцевая галерея шириной около 1 м, сплетённая из ивовых прутьев и обшитая тканью. Для сжигания топлива к центру галереи был подвешен очаг из железных прутьев.

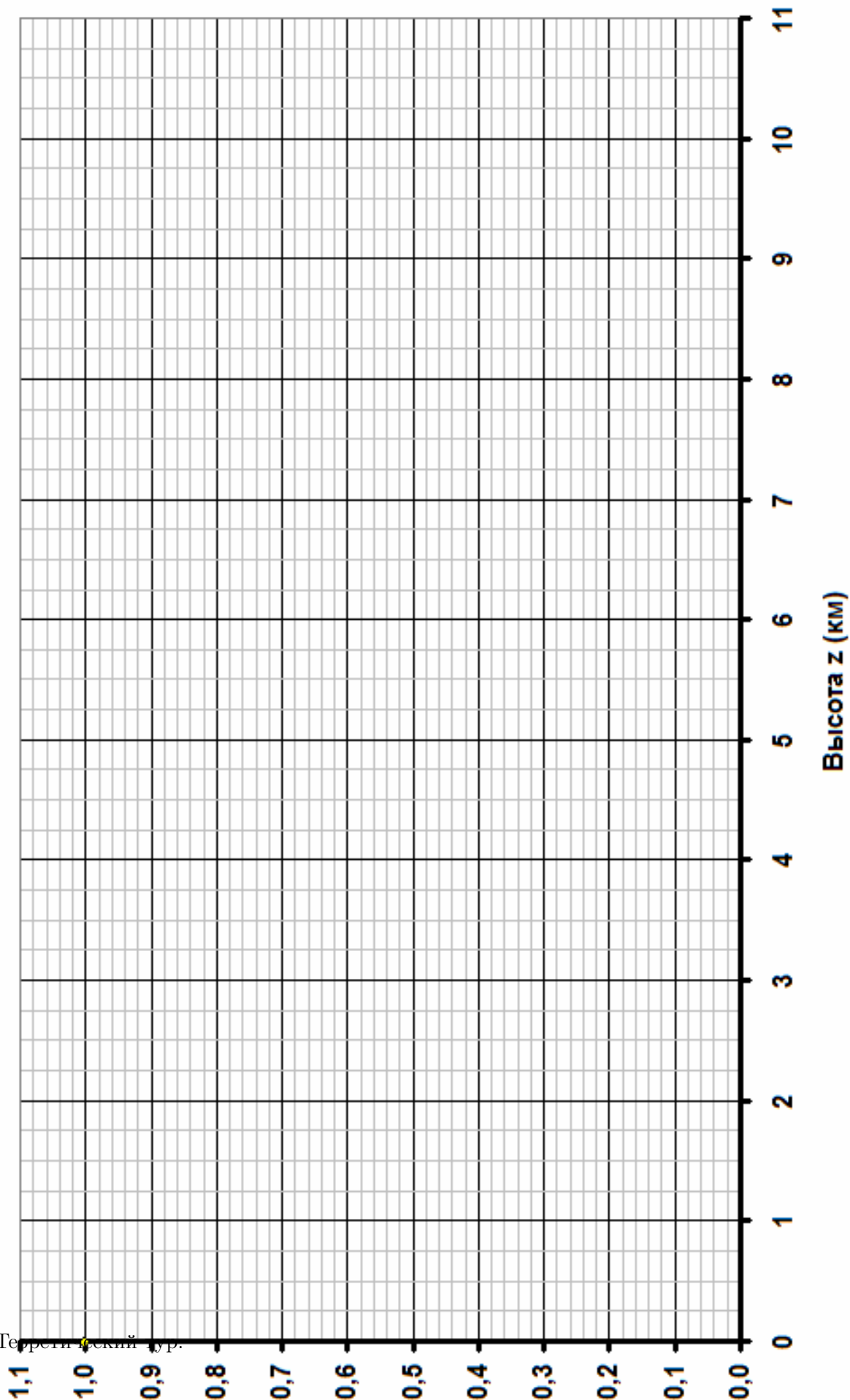
3.1 Монгольфьер начал подниматься (находясь на уровне моря), когда благодаря подогреву температура воздуха внутри шара превысила наружную на величину $\Delta T_0 = 30 \text{ K}$. Определите общую массу шара (без учета массы воздуха внутри).

3.2 При увеличении мощности нагрева разность температур воздуха внутри шара и вне его удалось довести до величины $\Delta T_1 = 40 \text{ K}$ и сохранять ее во время всего подъема. Оцените, на какую максимальную высоту поднялся монгольфьер в этом полете.

Бланк к задаче «Монгольфьер и шарльер»

Зависимости температуры (1), давления (2), плотности (3) от высоты z

Зависимости температуры (1), давления (2), плотности (3) от высоты z



Не забудьте сдать этот бланк!

Решение

**Задача 11-2 «Монгольфьер и шарльер».

Часть 1. Стандартная атмосфера.

1.1 Для расчета плотности воздуха следует воспользоваться уравнением состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M}RT$$

Из которого следует, что плотность газа рассчитывается по формуле

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}.$$

Подстановка численных значений для уровня моря дает следующее численное значение:

$$\rho_0 = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 28,97 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}}{8,314 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot (15,00 + 273,16) \text{ К}} = 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

1.2 Описание стандартной атмосферы позволяет записать зависимость температуры от высоты в виде

$$T = T_0 - \frac{\Delta t^\circ}{\Delta z} z = T_0 \left(1 - \left(\frac{1}{T_0} \frac{\Delta t^\circ}{\Delta z} \right) z \right).$$

Сравнивая с формулой $T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{h} \right)$, приведенной в условии задачи, видим, что параметр h определяется формулой

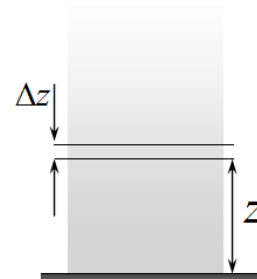
$$h = T_0 \left(\frac{\Delta t^\circ}{\Delta z} \right)^{-1} = \frac{288,16 \text{ К}}{6,500 \cdot 10^{-3} \frac{\text{К}}{\text{м}}} = 4,433 \cdot 10^4 \text{ м}$$

Величина $T_0 = 15,00 + 273,16 = 288,16 \text{ К}$ - абсолютная температура на уровне моря.

1.3 Для получения зависимости давления от высоты следует учесть, что плотность воздуха также изменяется с высотой. Однако при изменении высоты на малую величину Δz изменением плотности в пределах слоя Δz можно пренебречь. В этом случае уменьшение давления с высотой описывается формулой (для гидростатического давления)

$$\Delta P = -\rho g \Delta z.$$

Здесь ρ - плотность воздуха на высоте z . Для плотности воздуха следует воспользоваться формулой (2) и найденной зависимостью температуры от высоты, поэтому



$$\rho = \frac{PM}{RT_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)}.$$

Таким образом, уравнение для определения зависимости давления от высоты имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{\Delta z} &= -\frac{Mg}{RT_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)} P. \\ P(z) &= P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha, \text{ то} \\ \frac{\Delta P}{\Delta z} &= -\frac{\alpha P_0}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что эту формулу можно получить как производную от функции $P(z)$, так и с помощью приближенной формулы, приведенной в условии задачи. С помощью этой формулы можно найти, что

$$\begin{aligned} P(z + \Delta z) &= P_0 \left(1 - \frac{z + \Delta z}{h}\right)^\alpha = P_0 \left(1 - \frac{z}{h} - \frac{\Delta z}{h}\right)^\alpha = P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\Delta z}{h \left(1 - \frac{z}{h}\right)}\right)^\alpha \approx \\ &\approx P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha \left(1 - \alpha \frac{\Delta z}{h \left(1 - \frac{z}{h}\right)}\right) = P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha - \frac{\alpha P_0}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} \Delta z \end{aligned}$$

Откуда и следует формула (9)

Подставляя найденные выражения в уравнение (8), получим:

$$-\frac{\alpha P_0}{h} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} = -\frac{Mg}{R} \frac{P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha}{T_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)} = -\frac{Mg}{RT_0} P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1}. \quad (10)$$

Из этой формулы следует, что, во-первых, указанная в условии функция, действительно является решением уравнения (8); во-вторых, показатель степени в этой формуле равен

$$\alpha = \frac{Mgh}{RT_0} = 5,257 \quad (11)$$

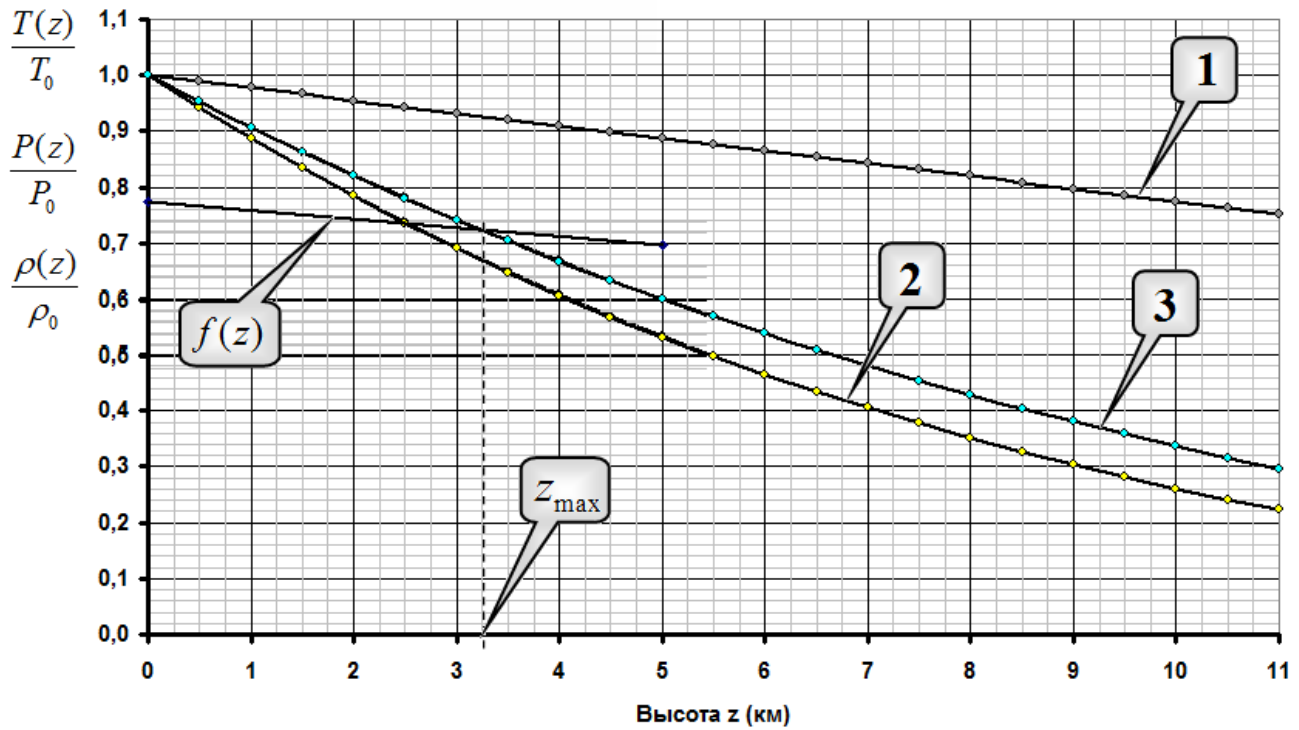
Зависимость плотности от высоты описывает следующая функция

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{P_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\alpha M}{RT_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)} = \frac{P_0 M}{RT_0} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1} = \rho_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\alpha-1}. \quad (12)$$

Следовательно, показатель степени в этой зависимости равен

$$\beta = \alpha - 1 = \frac{Mgh}{RT_0} - 1 = 4,257. \quad (13)$$

Зависимости температуры (1), давления (2), плотности (3) от высоты z



Часть 2. Шарльер.

2.1 В соответствии с законом Архимеда максимальная масса шара равна массе воздуха, вытесненного шаром, т.е.

$$m_{\max} = \rho_0 V = 1,225 \frac{\kappa z}{M^3} \cdot 400 M^3 = 490 \kappa z. \quad (14)$$

2.2 Так как оболочка закрыта, то масса водорода остается неизменной. Кроме того, в условии оговорено, что объем оболочки остается постоянным, поэтому и средняя плотность воздушного шара также остается неизменной.

На максимальной высоте масса вытесненного воздуха равна $(m_{\max} - m_1)$, при этом выполняется условие:

$$\rho(z_{\max}) V = (m_{\max} - m_1), \quad (15)$$

из которого следует уравнение:

$$\rho_0 \left(1 - \frac{z_{\max}}{h}\right)^\beta = (m_{\max} - m_1). \quad (16)$$

Разделим это уравнение на равенство (14), в результате чего получим

$$\left(1 - \frac{z_{\max}}{h}\right)^\beta = \left(1 - \frac{m_1}{m_{\max}}\right). \quad (17)$$

Откуда находим максимальную высоту подъема

$$z_{\max} = h \left(1 - \left(1 - \frac{m_1}{m_{\max}}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) \approx 2,0 \text{ км} \quad (18)$$

Допустимо и приближенное решение уравнения (16), с использованием приближенной формулы $\left(1 - \frac{z_{\max}}{h}\right)^\beta \approx 1 - \beta \frac{z_{\max}}{h}$. В этом приближении уравнение имеет вид $1 - \beta \frac{z_{\max}}{h} = 1 - \frac{m_1}{m_{\max}}$, а его решение $z_{\max} = \frac{h}{\beta} \frac{m_1}{m_{\max}} = 1,9 \text{ км}$.

Также можно воспользоваться построенным графиком зависимости $\rho(z)$. Для этого нужно рассчитать среднюю плотность шара $\bar{\rho} = \frac{m_{\max} - m_1}{V} \approx 1,00 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и ее отношение к плотности воздуха на уровне моря $\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \approx 0,82$. По графику не сложно найти, что плотность воздуха опускается до этого значения на высоте примерно равной 2,0 км.

Отметим, что согласно историческим данным Ж. Шарль поднялся на высоту в 3 км, возможно, наша оценка оказалась заниженной, потому что при расчетах не принималось во внимание расширение оболочки шара по мере подъема.

Часть 3. Монгольфьер.

3.1 Так как оболочка монгольфьера открыта, то на любой высоте одинаковыми будут давления воздуха внутри шара и снаружи. Масса воздуха внутри оболочки не будет изменяться при изменении его температуры и давления.

Используя закон Архимеда, можно записать условие равновесия шара на произвольной высоте

$$\rho V g = m g + \rho_1 V g, \quad (19)$$

Где ρ - плотность атмосферного воздуха на произвольной высоте z , ρ_1 - плотность воздуха внутри шара на той же высоте, $V = 2200 \text{ м}^3$ - объем шара, m - масса шара без массы воздуха внутри его. Это соотношение удобно переписать в виде

$$(\rho - \rho_1) V = m, \quad (19)$$

Так как давления воздуха внутри и вне оболочки одинаковы, то разность плотностей можно представить в виде

$$(\rho - \rho_1) = \frac{PM}{RT} - \frac{PM}{R(T + \Delta T)} = \frac{PM}{RT} \left(1 - \frac{T}{(T + \Delta T)}\right) = \rho \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \quad (20)$$

Тогда условие равновесия шара принимает вид

$$\rho V \frac{\Delta T}{T + \Delta T} = m. \quad (21)$$

В частности, на уровне моря, это выражение позволяет рассчитать общую массу монгольфера

$$m = \rho_0 V \frac{\Delta T_0}{T_0 + \Delta T_0} = 1,22 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 2200 \text{м}^3 \frac{30}{288 + 30} = 2,5 \cdot 10^2 \text{кг}. \quad (22)$$

3.2 С помощью соотношений (21) и (22) можно получить уравнение для нахождения максимальной высоты подъема:

$$\rho(z) \frac{\Delta T_1}{T(z) + \Delta T_1} = \rho_0 \frac{\Delta T_0}{T_0 + \Delta T_0}. \quad (23)$$

Преобразуем его к виду

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \frac{\Delta T_0}{T_0 + \Delta T_0} \frac{T(z) + \Delta T_1}{\Delta T_1} = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \frac{T(z)}{T_0} + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)}. \quad (24)$$

Это уравнение слишком сложно для аналитического решения. Поэтому необходимо использовать приближенные методы. Одним из возможных способов такого решения является графический. Заметим, что функция, стоящая в правой части, является линейной

$$f(z) = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \frac{T(z)}{T_0} + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)} = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \left(1 - \frac{z}{h}\right) + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)}.$$

Рассчитаем коэффициенты этой линейной зависимости

$$f(z) = b - cz$$

$$b = \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} + \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)} = \frac{\Delta T_0}{(T_0 + \Delta T_0)} \frac{T_0 + \Delta T_1}{\Delta T_1} \approx 0,77. \quad (25)$$

$$c = \frac{1}{h} \frac{\Delta T_0}{\left(1 + \frac{\Delta T_0}{T_0}\right) \Delta T_1} \approx \frac{0,68}{h} = 0,015 \kappa M^{-1}$$

Далее на Бланке с графиком зависимости плотности атмосферы от высоты следует построить график этой функции $f(z)$ (см. на рисунке) и найти точку их пересечения. Координата этой точки и дает максимальную высоту подъема монгольфера

$$z_{\max} \approx 3,2 \kappa M. \quad (26)$$

Другой способ приближенного расчета – воспользоваться приближением для функции

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^\beta \approx 1 - \beta \frac{z}{h}.$$

Тогда уравнение (24) становится линейным и решается элементарно. Значение высоты в этом приближении оказывается равным $z_{\max} \approx 2,8\kappa M$.