

Условие

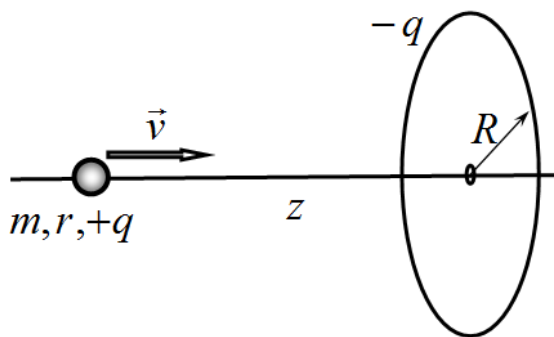
Задача 11-1. «Электростатическая пушка»

Электростатическая пушка состоит из: проводящего кольца радиуса R и тонкого непроводящего стержня (совпадающего с осью кольца). На стержне находится небольшой шарик радиуса r , массы m . Шарик может скользить по стержню без трения. На короткий промежуток времени τ кольцу и шарiku сообщают одинаковые по модулю и противоположные по знаку заряды $\pm q$. В результате чего шарик приобретает скорость v .

Часть 1. Заряженный шарик.

1.1 Найдите напряженность электрического поля, создаваемого зарядами кольца на его оси на расстоянии z от центра.

1.2 На каком расстоянии от центра кольца z^* следует расположить шарик, чтобы он приобрел максимальную скорость? Чему равна эта максимальная скорость шарика $v_{\max}$?



Часть 2 Шарик не заряжается.

В этой части задачи заряд q сообщается только кольцу. Шарик находится на расстоянии z , которое значительно больше радиуса кольца $z \gg R$. Под действием электрического поля напряженности E на шарике индуцируется дипольный момент, величина которого равна

$$p = 4\pi\epsilon_0 r^3 E \quad (1)$$

Электрический диполь – система из двух точечных зарядов, одинаковых по величине и противоположных по знаку $\pm q$, находящихся на малом расстоянии a . Дипольным моментом называется величина $p = qa$.

2.1 Покажите, что сила, действующая на диполь, помещенный в неоднородное электрическое поле (ось диполя направлена вдоль оси z) равна

$$F = p \frac{\Delta E_z}{\Delta z}. \quad (2)$$

где $\frac{\Delta E_z}{\Delta z}$ - производная от проекции вектора напряженности на ось z по координате z .

2.2 Какую скорость приобретет незаряженный проводящий шарик, если он находится на расстоянии z от центра кольца, а кольцо заряжается на малый промежуток времени τ .

Решение

Задача 11-1. «Электростатическая пушка»

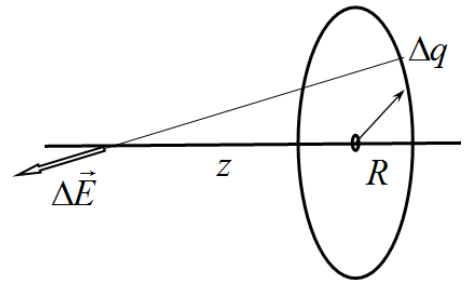
1.1 Вектор напряженности электростатического поля кольца направлен вдоль его оси. Модуль вектора напряженности легко находится с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

1.2 В промежутке времени, когда шарик и кольцо заряжены, на шарик действует электрическая сила

$$F = qE. \quad (2)$$

Так время действия силы мало, то можно пренебречь смещением шарика за время действия силы. В этом случае скорость шарика может быть найдена из 2 закона Ньютона в импульсной форме



$$mv = qE\tau \Rightarrow v = \frac{q\tau}{m} E. \quad (3)$$

Как следует из последнего равенства, скорость шарика будет максимальна, если он находится в точке с максимальной напряженностью.

Для того, чтобы найти эту точку вычислим производную от функции (1)

$$\left(\frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \right)' = \frac{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - z \cdot \frac{3}{2} (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z}{(z^2 + R^2)^3} = \frac{(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} (z^2 + R^2 - 3z^2)}{(z^2 + R^2)^3} = 0$$

И приравняем ее к нулю. Из этого условия следует, что напряженность поля максимальна на расстоянии

$$z^* = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

от центра кольца. Это максимальное значение равно

$$E_{\max}(z^*) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{R}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{R^2}{2} + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в формулу (3) для скорости, получим ответ на поставленный вопрос:

$$v_{\max} = \frac{\tau}{m} \frac{q^2}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (6)$$

Часть 2 Шарик не заряжается.

2.1 Сила, действующая на диполь, также находится с помощью принципа суперпозиции:

$$F = qE(z+a) - qE(z) = qa \frac{\Delta E}{a} = p \frac{\Delta E}{\Delta z} \quad (7)$$

2.2 Сила, действующая на шарик с индуцированным дипольным моментом, рассчитывается по формуле

$$F = p \frac{dE}{dz} = 4\pi\epsilon_0 r^3 E \frac{dE}{dz}.$$

На больших расстояниях напряженность поля кольца совпадает с напряженностью поля точечного заряда (что следует из формулы (1)):

$$E \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^2}$$

Производная от этой функции равна

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^3}.$$

Собирая все записанные формулы воедино, получим выражение для силы, действующей на незаряженный проводящий шарик

$$F = p \frac{dE}{dz} = 4\pi\epsilon_0 r^3 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^2} \right) \left(-\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^3} \right) = -\frac{q^2 r^3}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^5}.$$