

Условие

Задача 10-3. «Неоднородное гравитационное поле»

Сила гравитационного взаимодействия зависит от расстояния между взаимодействующими телами. Поэтому гравитационные поля, в общем случае, являются неоднородными. Даже небольшие неоднородности этого поля могут приводить ко многим интересным и неожиданным эффектам, некоторые из которых рассматриваются в данной задаче.

Ускорение свободного падения на поверхности Земли обозначим $g_0 = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Землю будем считать однородным шаром радиуса $R = 6,4 \cdot 10^6$ м. Вращением Земли вокруг собственной оси следует пренебрегать. Все ответы выражайте через эти заданные параметры, гравитационная постоянная и масса Земли в эти ответы входить не должны. Во всех пунктах задачи деформации тел следует считать пренебрежимо малыми.

Используйте приближенную формулу, справедливую при $\xi \ll 1$ и любых степенях γ :

$$(1 + \xi)^\gamma \approx 1 + \gamma\xi \quad (1)$$

Часть 1. Ускорение свободного падения.

1.1 Получите формулу для ускорения свободного падения g_r на расстоянии r от центра Земли ($r > R$). Выразите его через ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0 .

При малом радиальном отклонении от расстояния r на малую величину x можно считать, что ускорение свободного падения зависит линейно от малого смещения. Т.е. ускорение свободного падения на расстоянии $r + x$ от центра Земли g_{r+x} можно приближенно представить в виде

$$g_{r+x} \approx g_r(1 + \alpha x). \quad (2)$$

1.2 Определите значение множителя α в формуле (2).

1.3 Рассчитайте, на какой высоте h над поверхностью Земли ускорение свободного падения уменьшается на 1,0% по сравнению с ускорением на поверхности Земли.

Часть 2. Свободное падение.

В данной части рассматривается движения тела, состоящего из двух массивных шаров (масса каждого $m = 10$ кг, радиус $b \approx 10$ см, каждый из них можно рассматривать как материальную точку), соединенных легким (с пренебрежимо малой массой) стержнем длины $l = 10$ м.

Стержень свободно падает в поле тяжести Земли, оставаясь в вертикальном положении. Сопротивлением воздуха следует пренебрегать. В некоторый момент времени середина стержня находится на расстоянии r от центра Земли.

2.1 Получите формулу для силы натяжения стержня F в процессе его падения, возникающую вследствие неоднородности гравитационного поля Земли. В этом пункте гравитационным взаимодействием шаров следует пренебрегать.

2.2 Укажите, будет стержень растянут или сжат. Рассчитайте численное значение силы натяжения стержня F , если центр стержня находится на высоте $h = 10$ км над поверхностью Земли.

2.3 Найдите отношение найденной силы F к силе гравитационного взаимодействия между шариками F_G . В расчетах можно принять, что плотность материала шариков равна средней плотности Земли. Оцените численное значение этого отношения $\frac{F}{F_G}$.

Часть 3. Орбитальная станция.

Орбитальная станция состоит из двух одинаковых сферических отсеков, соединенных между собой длинным стержнем. Масса каждого отсека равна m , длина стержня l . Отсеки можно считать материальными точками, масса стержня пренебрежимо мала. Станция вращается вокруг Земли по круговой траектории, так, что середина стержня находится на расстоянии r от центра Земли (очевидно, что $r \gg l$). Станция движется так, что ее ось все время направлена к центру Земли.

3.1 Найдите силу упругости F стержня, соединяющего отсеки станции. Укажите, сжат или растянут этот стержень.

14

Решение

**<u>Задача 10-3. Неоднородное гравитационное поле.

Часть 1. Ускорение свободного падения.</u>**

1.1 В соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона, ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли равно

$$g_r = G \frac{M}{r^2} \quad (1)$$

Это выражение можно представить в виде

$$g_r = G \frac{M}{r^2} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{r^2} = g_0 \frac{R^2}{r^2}, \quad (2)$$

где $g_0 = G \frac{M}{R^2}$ - ускорение на поверхности Земли, M - масса Земли, R - ее радиус.

1.2 На расстоянии $r + x$ ускорение свободного падения можно описать формулой

$$g_{r+x} = g_0 \frac{R^2}{(r+x)^2} = g_0 \frac{R^2}{r^2} \left(1 + \frac{x}{r}\right)^{-2} \approx g_r \left(1 - 2\frac{x}{r}\right), \quad (3)$$

при выводе которой использована приближенная формула (1) из условия задачи. Таким образом, требуемый коэффициент α оказывается равным

$$\alpha = -\frac{2}{r}. \quad (4)$$

1.3 Так как изменение ускорения свободного падения мало, то и искомая высота будет малой по сравнению с радиусом Земли. Поэтому можно воспользоваться приближенной формулой (3), полагая в ней $r = R$:

$$g \approx g_0 \left(1 - 2\frac{h}{R}\right). \quad (5)$$

Из этой формулы следует, что относительное изменение ускорения свободного падения на высоте h равно

$$\eta = \frac{g - g_0}{g_0} = -2\frac{h}{R}. \quad (6)$$

Из этой формулы находим

$$h = \frac{R}{2}\eta = \frac{6,4 \cdot 10^6 \text{ м}}{2} \cdot 0,010 = 3,2 \cdot 10^4 \text{ м}. \quad (7)$$

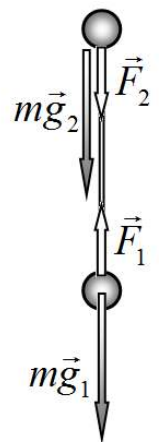
Т.е. ускорение свободного падения уменьшается на 1% на высоте 32 километра.

Часть 2. Свободное падение.

2.1 Земля притягивает шары, строго говоря, с разной силой, так как они находятся на разных расстояниях от центра Земли: сила тяжести, действующая на нижний шар, больше силы, действующей на верхний шар. Но так как шары соединены стержнем, то ни падают с одинаковым ускорением. Это возможно только в том случае, когда на нижний шар со стороны стержня будет действовать «тормозящая» сила упругости $\vec{F}_1$, направленная вверх, а на верхний шар «разгоняющая» сила $\vec{F}_2$, направленная вниз. Эти простые рассуждения позволяют сделать вывод, что стержень должен быть растянут. Так как масса стержня пренебрежимо мала, то модули этих сил будут равны, т.е. $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$. Таким образом, неоднородность гравитационного поля, приводит к появлению сил, стремящихся растянуть стержень.

Для расчета силы упругости в стержне запишем уравнения 2 закона Ньютона для каждого из шаров в проекции на вертикальную ось

$$\begin{aligned} ma &= mg_1 - F \\ ma &= mg_2 + F \end{aligned} \quad (8)$$



В этих уравнениях g_1, g_2 - ускорения свободного падения на расстояниях $(r - \frac{l}{2})$ и $(r + \frac{l}{2})$, соответственно. Из этой системы уравнений следует, что искомая сила определяется как

$$F = m \frac{g_1 - g_2}{2}. \quad (9)$$

Так как длина стержня мала по сравнению с радиусом Земли, то эти ускорения можно выразить с помощью формулы (3):

$$g_{r \pm \frac{l}{2}} = g_r \left(1 \mp \frac{l}{r} \right). \quad (10)$$

Подстановка этих выражений в формулу (9) дает окончательный результат

$$F = m g_r \frac{l}{r} = m g_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{l}{r}. \quad (11)$$

2.2 Для численного расчета при $r = R + h$ можно заметить, что не высокая точность исходных данных (две значащие цифры) позволяет пренебречь высотой h по сравнению с радиусом Земли (т.к. на этой высоте ускорение свободного падения изменяется менее чем на 1%), поэтому

$$\begin{aligned} F &= m g_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{l}{r} = m g_0 \frac{R + h}{R} \frac{l}{R} = m g_0 \left(1 + \frac{h}{R} \right) \frac{l}{R} \approx m g_0 \frac{l}{R} = \\ &= 10 \kappa 2 \cdot 9,8 \frac{\mathcal{M}}{c^2} \cdot \frac{10 \mathcal{M}}{6,4 \cdot 10^6 \mathcal{M}} = 1,5 \cdot 10^{-4} H \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 Как и следовало ожидать, сила, растягивающая стержень в процессе его падения, крайне мала. Однако, следует ее сравнить с силой гравитационного взаимодействия шаров

$$F_G = G \frac{m^2}{l^2}. \quad (13)$$

Их отношение выражается следующим образом

$$\frac{F}{F_G} = \frac{m g_0 \frac{l}{R}}{G \frac{m^2}{l^2}} = \frac{G \frac{M}{R^2} \frac{l}{R}}{G \frac{m}{l^2}} = \frac{M}{m} \frac{l^3}{R^3} = \frac{R^3}{b^3} \frac{l^3}{R^3} = \left(\frac{l}{b} \right)^3. \quad (14)$$

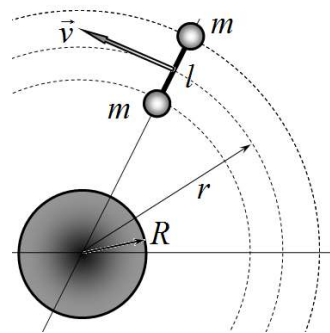
При выводе учтено, что отношение масс шаров при одинаковой плотности равно отношению кубов их радиусов $\frac{M}{m} = \frac{R^3}{b^3}$. При заданных численных параметрах это отношение равно

$$\frac{F}{F_G} = \left(\frac{l}{b} \right)^3 = \left(\frac{10}{0,10} \right)^3 = 1,0 \cdot 10^6. \quad (15)$$

Таким образом, найденная «разрывающая сила» в миллион (!) раз превышает силу гравитационного притяжения.

Часть 3. Орбитальная станция.

Решение этой части полностью аналогично решению предыдущей. Только необходимо учесть, что в данном случае ускорения, с которыми движутся отсеки станции, являются центростремительными, зависящими от радиусов их орбит. При описанном характере движения одинаковыми являются угловые скорости движения отсеков. Поэтому уравнения 2 закона Ньютона в проекции на радиальное направление для каждого из отсеков имеют вид



$$m\omega^2 \left(r - \frac{l}{2} \right) = mg_1 - F$$

$$m\omega^2 \left(r + \frac{l}{2} \right) = mg_2 + F$$

(16)

Здесь, как и ранее g_1, g_2 , - ускорения свободного падения на расстояниях $(r - \frac{l}{2})$ и $(r + \frac{l}{2})$ от центра Земли:

$$g_1 = g_r \left(1 + \frac{l}{r} \right), \quad g_2 = g_r \left(1 - \frac{l}{r} \right)$$

(17)

Вычитая из второго уравнения системы (16) первое, получим

$$m\omega^2 l = mg_2 - mg_1 + 2F.$$

или

$$F = \frac{m\omega^2 l}{2} + \frac{mg_1 - mg_2}{2}.$$

(18)

Угловую скорость движения станции можно определить из уравнения Ньютона для центра масс станции

$$2m\omega^2 r = mg_1 + mg_2.$$

(19)

Из которого следует

$$\omega^2 = \frac{g_1 + g_2}{2} \frac{1}{r}.$$

(20)

Подстановка выражений для ускорений и угловой скорости в формулу (18) дает:

$$F = \frac{m\omega^2 l}{2} + \frac{mg_1 - mg_2}{2} = m \left(\frac{g_1 + g_2}{2} \frac{l}{r} + \frac{g_1 - g_2}{2} \right) = m \left(g_r \frac{l}{r} + g_r \frac{l}{r} \right) = 2mg_0 \frac{r^2}{R^2} \frac{l}{r}.$$

(21)

Заметим, что полученный результат в два раза превышает полученный ранее в формуле (11). Это связано с тем, что помимо различия в силах тяжести, существует различие в ускорениях связанных тел¹.

—

1 1

¹ Это же различие легко объяснить, если перейти во вращающуюся неинерциальную систему отсчета, связанной с самой станцией. В этой системе отсчета, на отсеки действуют различные центробежные силы, помимо сил гравитационных.