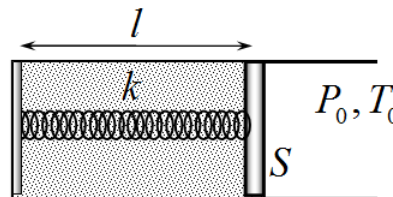


Условие

Задача 10-2. «Газ под поршнем»

В горизонтальном цилиндрическом сосуде под легкоподвижным поршнем находится сухой воздух. Площадь поперечного сечения сосуда равна S , воздух между стенками сосуда и поршнем не проходит. Трением поршня о стенки следует пренебрегать.

Поршень соединен со стенкой упругой пружиной жесткости k . Когда поршень находится на расстоянии l_0 от стенки, пружина не деформирована, давление воздуха в сосуде равно атмосферному давлению P_0 , его температура равна T_0 .



Параметры устройства подобраны таким образом, что выполняется условие

$$P_0 S = k l_0. \quad (1)$$

Для численных расчетов используйте следующие данные: атмосферное давление $P = 100$ кПа; начальная температура воздуха в сосуде $t_0 = 20^\circ\text{C} = 293$ К; молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна $C_V = \frac{5}{2}R$; удельная теплота испарения воды $L = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$; молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$; универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$.

Часть 1. Воздух сухой.

Воздух в сосуде начинают медленно нагревать.

1.1 Найдите зависимость давления воздуха в сосуде от положения поршня $P(l)$. 1.2 Найдите зависимость координаты равновесного положения поршня от температуры воздуха в сосуде $l(T)$. 1.3 Рассчитайте, при какой температуре воздуха в сосуде t_1 его объем увеличится на $\eta = 20\%$.

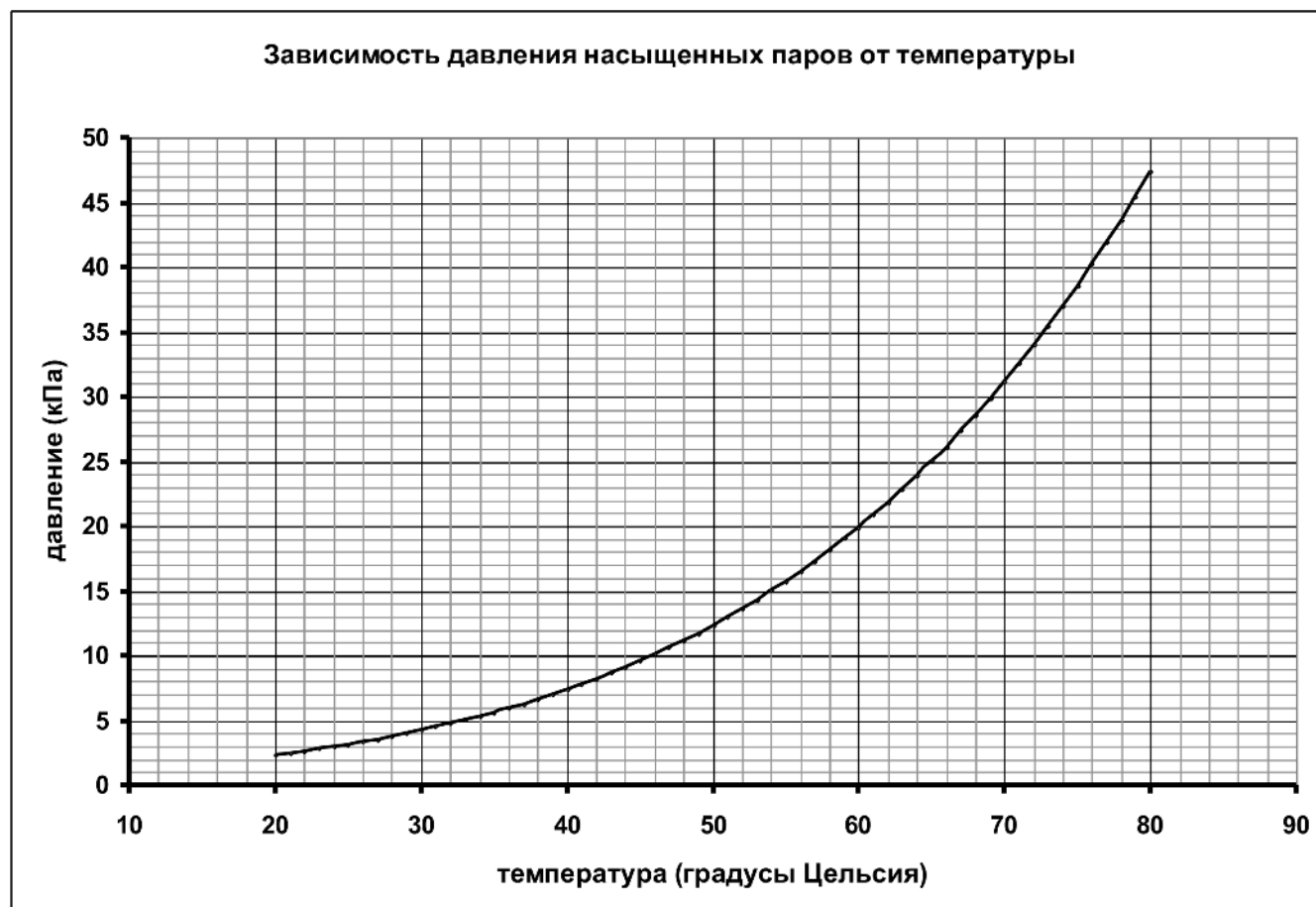
Часть 2. Влажный воздух.

Случайно внутрь сосуда попала небольшая порция воды (ее объем значительно меньше объема сосуда).

2.1 Пренебрегая парциальным давлением водяных паров при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$, рассчитайте, до какой температуры в этом случае следует нагреть влажный воздух в сосуде, чтобы его объем увеличился на $\eta = 20\%$.

Считайте, что не вся вода, попавшая в сосуд, испарилась. Ниже приведен график зависимости давления насыщенных паров воды от температуры. Используйте его для решения задачи. Можете проделать на нем дополнительные построения.

2.2 Оцените (с погрешностью не превышающей 30%) отношение теплот $\frac{Q_2}{Q_1}$, полученных влажным Q_2 (см. Часть 2) и сухим Q_1 (см. Часть 1) воздухом в описанном процессе.



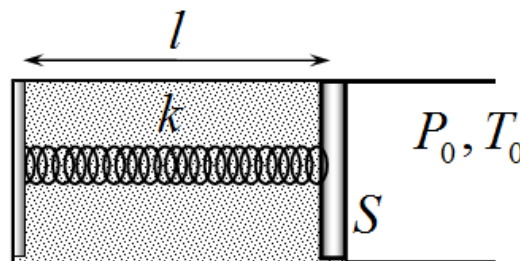
Решение

Задача 10-2. «Газ под поршнем»

Часть 1. Воздух сухой.

1.1 Из условия равновесия поршня следует, что давление газа равно

$$P = P_0 + \frac{k(l - l_0)}{S}. \quad (1)$$



С учетом связи между параметрами $P_0 S = k l_0$, приведенной в условии задачи, данная зависимость упрощается:

$$P = P_0 + \frac{k(l - l_0)}{S} = \frac{kl}{S} = \frac{kl_0}{S} \frac{l}{l_0} = P_0 \frac{l}{l_0}. \quad (2)$$

1.2 Для нахождения связи между температурой и объемом (который определяется положением поршня), используем уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона для воздуха внутри сосуда

$$\frac{Pl}{T} = \frac{P_0 l_0}{T_0} \quad (3)$$

Из этих двух выражений следует, что зависимость температуры от объема имеет вид

$$T = T_0 \frac{P}{P_0} \frac{l}{l_0} = T_0 \left(\frac{l}{l_0} \right)^2. \quad (4)$$

Откуда следует, что зависимость положения поршня от температуры воздуха описывается функцией

$$l = l_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (5)$$

1.3 Расчет температуры следует проводить по формуле (4):

$$T = T_0(1 + \eta)^2 = 422 \text{ K} = 149^\circ \text{C}. \quad (6)$$

Часть 2. Влажный воздух.

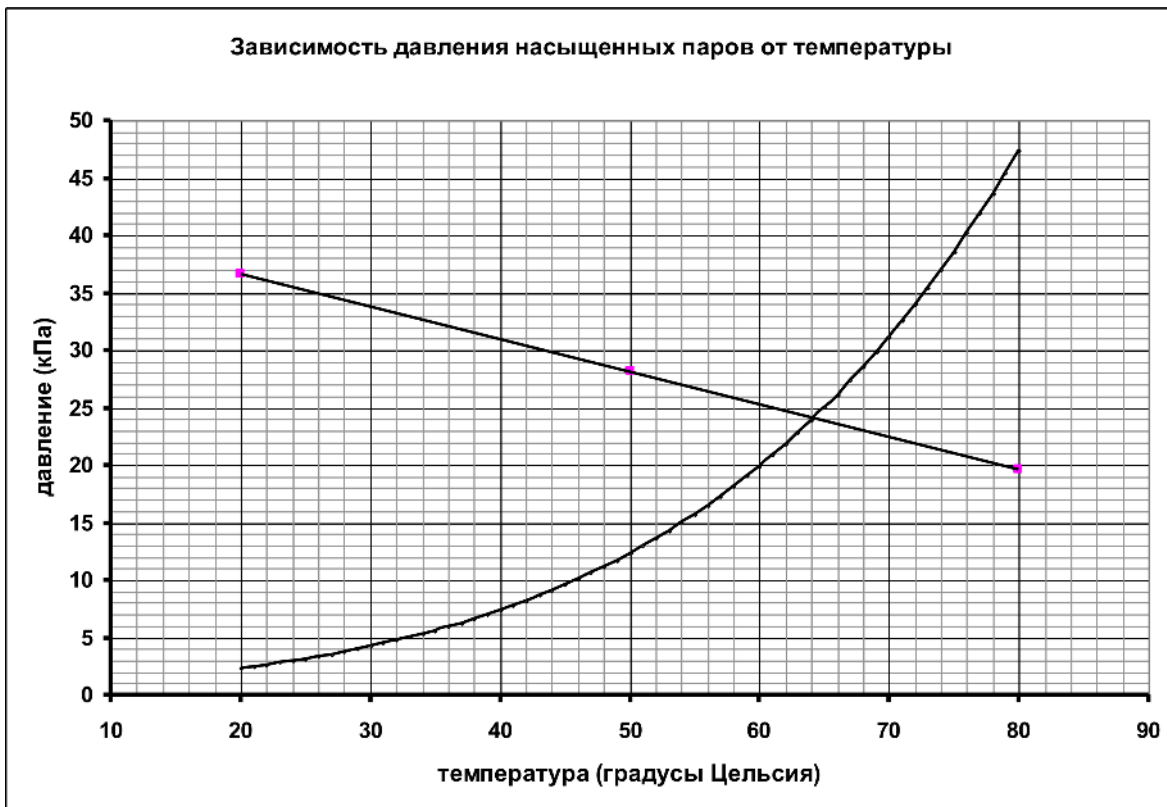
2.1 Условие равновесия поршня в данном случае имеет вид

$$P + P_{\text{нас}} = P_0 + \frac{k(l - l_0)}{S} = P_0 \frac{l}{l_0}. \quad (7)$$

Где P - давление сухого воздуха, $P_{\text{нас}}$ - давление насыщенных паров воды в сосуде. Выразим из этого условия

$$P_{\text{нас}} = P_0 \frac{l}{l_0} - P = P_0 \frac{l}{l_0} - P_0 \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} = P_0 \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} \right) \quad (8)$$

Здесь использовано уравнение состояния (3), из которого выражено давление сухого воздуха. Уравнение (8) может быть решено графически. Для этого на графике зависимости давления насыщенных паров от температуры следует построить линейный график функции $F(T) = P_0 \left(\frac{l}{l_0} - \frac{l_0}{l} \frac{T}{T_0} \right)$, все параметры которой известны. Для его построения достаточно рассчитать координаты двух точек. Ниже показано необходимое построение. Точка пересечения этих графиков дает решения уравнения (8), т.е. необходимую температуру. В случае влажного воздуха она равна $t_1 = 64^\circ \text{C}$, что значительно ниже, чем для сухого воздуха.



2.2 Рассчитаем количество теплоты Q_1 , которое получил сухой воздух. По первому закону термодинамики количество полученной теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершенной работы

$$Q = \Delta U + A. \quad (9)$$

Изменение внутренней энергии воздуха рассчитывается по формуле

$$\Delta U = \nu C_V \Delta T = \frac{5}{2} \nu R \Delta T. \quad (10)$$

Используя уравнение процесса (4), находим, что

$$\Delta T = T_0 \left(\left(\frac{l}{l_0} \right)^2 - 1 \right) = T_0 ((1 + \eta)^2 - 1) = \eta(2 + \eta)T_0. \quad (11)$$

Тогда

$$\Delta U = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} \eta(2 + \eta) \nu R T_0 = \frac{5}{2} \eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (12)$$

При выводе использовано уравнение состояния газа $P_0 S l_0 = \nu R T_0$. В процессе расширения давление изменяется пропорционально объему. Работа может быть рассчитана по формуле

$$A = \frac{P_0 + P_1}{2} S \Delta l = \frac{P_0 + P_0(1 + \eta)}{2} \eta S l_0 = \frac{1}{2} \eta (2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (13)$$

Таким образом, количество полученной теплоты равно

$$Q_1 = 3\eta(2 + \eta) P_0 S l_0. \quad (13)$$

Во втором случае значительное количество теплоты пойдет на испарение воды. Рассчитаем это количество:

$$Q_{\text{исп.}} = L \Delta m, \quad (14)$$

где Δm - масса испарившейся воды. Ее находим, используя уравнение состояния для водяного пара (пренебрегая давлением насыщенных паров при начальной температуре),

$$P_{\text{Нас.}} S (1 + \eta) l_0 = \frac{\Delta m}{M} R T \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{P_{\text{Нас.}} M (1 + \eta)}{R T} S l_0. \quad (15)$$

В этом выражении $T = (64 + 273) = 337 \text{ K}$, конечная температура, $P_{\text{Нас.}} = 24 \text{ кПа}$ - давление насыщено водяного пара при этой температуре, $M = 18 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ - молярная масса воды.

Вычислим отношение

$$\frac{Q_{\text{исп.}}}{Q_1} = \frac{L \frac{P_{\text{Нас.}} M (1 + \eta)}{R T} S l_0}{3\eta(2 + \eta) P_0 S l_0} = \frac{L M}{R T} \frac{P_{\text{Нас.}}}{P_0} \frac{(1 + \eta)}{3\eta(2 + \eta)} \approx 3,2. \quad (16)$$

При нагревании влажного воздуха изменение его температуры меньше, чем при нагревании сухого. Поэтому количество, теплоты, которое пойдет на нагревание сухого воздуха и совершение работы будет меньше, чем Q_1 . Поэтому в пределах допустимой погрешности можно считать, что $Q_2 \approx Q_{\text{исп.}}$. То есть во втором случае, при нагревании влажного воздуха потребуется примерно в 3 раза большее количество теплоты.