

## -2 Открой формулу!

### Условие

### Задание 10-2 Открой формулу!

Несмотря на то, что вы еще не изучали теорию колебаний, предлагаем вам задачу, в которой вы должны самостоятельно получить и экспериментально проверить формулу для периода колебаний шарика на наклонной плоскости.

**Приборы и оборудование:** картонная наклонная плоскость со штативом, шарик на нити, линейка, секундомер.

Закрепите лист картона в штативе, как показано на рисунке, к верхней точке привяжите шарик на нити. У вас есть возможность изменять угол наклона плоскости к горизонту (изменяя высоту  $h$ ) и длину нити  $l$ .

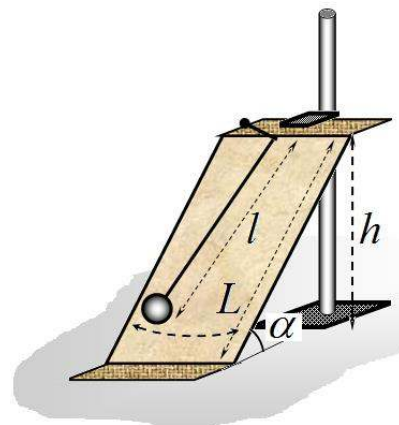
### Часть 1. Теоретическая.

Период колебаний шарика рассчитывается по формуле

$$T = Cl^{\alpha} g^{\beta} (\sin \alpha)^{\gamma} \quad (1)$$

Где  $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$  - ускорение свободного падения,  $\alpha, \beta, \gamma$  - показатели<sup>1</sup> степеней, которые вам необходимо определить,  $C$  - безразмерный численный коэффициент.

1.1 Используя метод размерностей, определите показатели степеней  $\alpha, \beta$ . 1.2  $C$  помощью простых физических рассуждений определите показатель степени  $\gamma$ .



### Часть 2. Экспериментальные исследования.

*Внимание!* Следите, чтобы наклонная «плоскость» была действительно плоской! Малые искривления этой поверхности могут существенно повлиять на результаты измерений!

2.1 Исследуйте зависимость периода колебаний маятника от высоты наклонной плоскости  $h$ . Укажите, при какой длине нити вы проводили измерения. Постройте график полученной зависимости в таких координатах, чтобы он был линейным, позволяющим определить показатель степени. 2.2. Используя результаты измерений, определите показатель степени  $\gamma$  в формуле (1). Совпадает ли это значение с результатами ваших теоретических измышлений в п.1.2?

2.3 Исследуйте зависимость периода колебаний от длины нити  $l$ . Укажите, при какой высоте  $h$  вы проводили измерения. Постройте график полученной зависимости, в таких координатах, чтобы он был линейным, позволяющим определить показатель степени. 2.4 Используя

результаты измерений, определите показатель степени  $\alpha$  в формуле (1). Совпадает ли это значение с результатами ваших теоретических измышлений в п.1.2?

2.5 Используя все результаты измерений, определите численное значение коэффициента  $C$  в формуле (1). Оцените погрешность найденного значения.

\_\_ 1 1

## Решение

### Задание 10-2 Открой формулу!

#### Часть 1. Теоретическая.

Подставим размерности величин, входящих в формулу (1):

$$c = M^{\alpha} \left( \frac{M}{c^2} \right)^{\beta} \quad (1)$$

Для совпадения размерностей правой и левой частей необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

При движении по наклонной плоскости на характер движения оказывает влияние только проекция силы тяжести на наклонную плоскость. Т.е. во всех формулах должна фигурировать только произведение  $g \sin \alpha$ . Следовательно, последний не известный показатель степени в формуле для периода равен  $\gamma = \beta = -\frac{1}{2}$ . Таким образом, формула для периода колебаний маятника на наклонной плоскости имеет вид

$$T = C \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}. \quad (3)$$

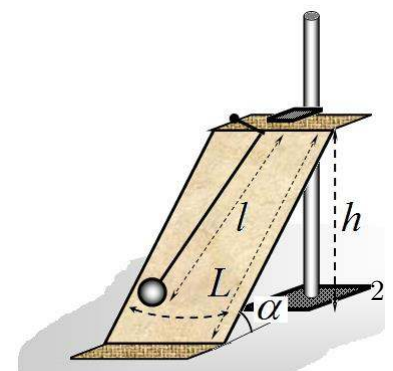
Безразмерный коэффициент  $C$  не может быть определен методом размерностей.

#### Часть 2. Экспериментальные исследования.

В работе использовалась установка с наклонной плоскостью длиной  $L = 39$  см

2.1 Изучение зависимости периода колебаний от высоты наклонной плоскости  $h$  проводились при длине маятника  $l = 35$  см.

10 класс. Экспериментальный тур.



Результаты измерений представлены в таблице 1. Проводилось несколько (3-4) измерений времен 5 колебаний. После чего проводилось усреднение по всем результатам.

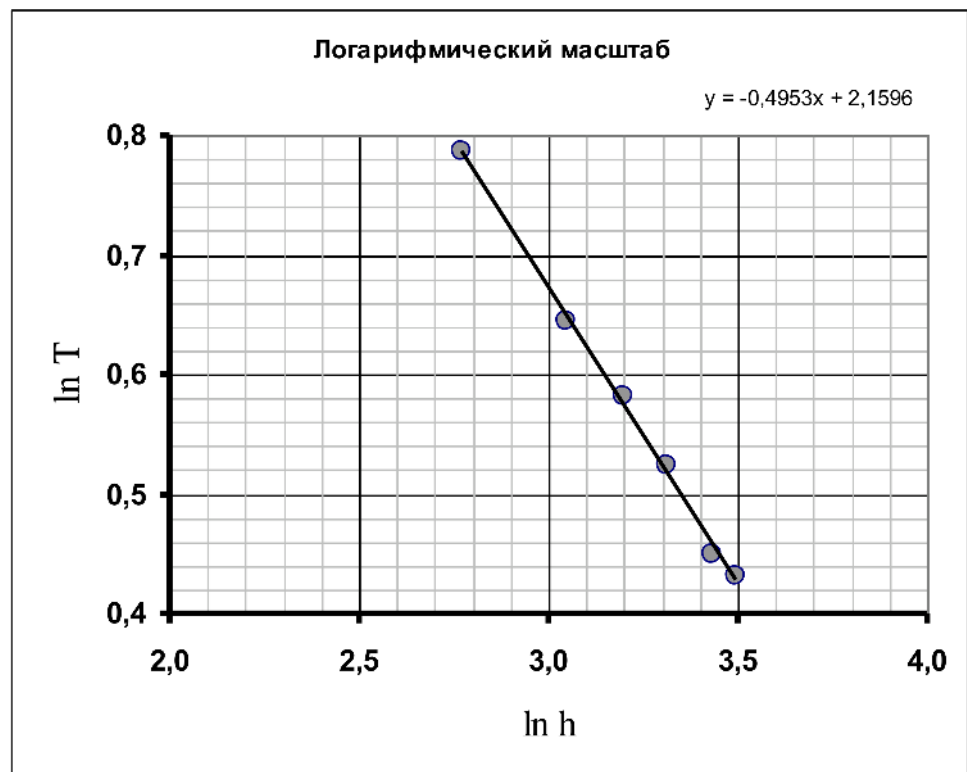
Таблица 1. Зависимость периода от высоты наклонной плоскости.

| $h$ , см | Времена 5 колебаний |           |           |           | $T$ , с | $T^{-2}$ , с <sup>-2</sup> | $\ln h$ | $\ln T$ |
|----------|---------------------|-----------|-----------|-----------|---------|----------------------------|---------|---------|
|          | $t_1$ , с           | $t_2$ , с | $t_3$ , с | $t_4$ , с |         |                            |         |         |
| 31,0     | 15,68               | 15,60     | 15,74     |           | 1,567   | 0,407                      | 3,434   | 0,449   |
| 27,5     | 8,47                | 8,41      | 8,44      |           | 1,688   | 0,351                      | 3,314   | 0,524   |
| 24,5     | 9,01                | 8,81      | 9,01      |           | 1,789   | 0,313                      | 3,199   | 0,581   |
| 21,0     | 9,60                | 9,55      | 9,43      | 9,55      | 1,907   | 0,275                      | 3,045   | 0,645   |
| 16,0     | 10,97               | 11,04     | 10,93     | 11,00     | 2,197   | 0,207                      | 2,773   | 0,787   |
| 33,0     | 7,55                | 7,69      | 7,69      | 7,84      | 1,539   | 0,422                      | 3,497   | 0,431   |

Так как длина наклонной плоскости постоянна, величина  $h = L \sin \alpha$  пропорциональна синусу угла наклона плоскости. Поэтому можно анализировать вид зависимости от высоты  $h$ .

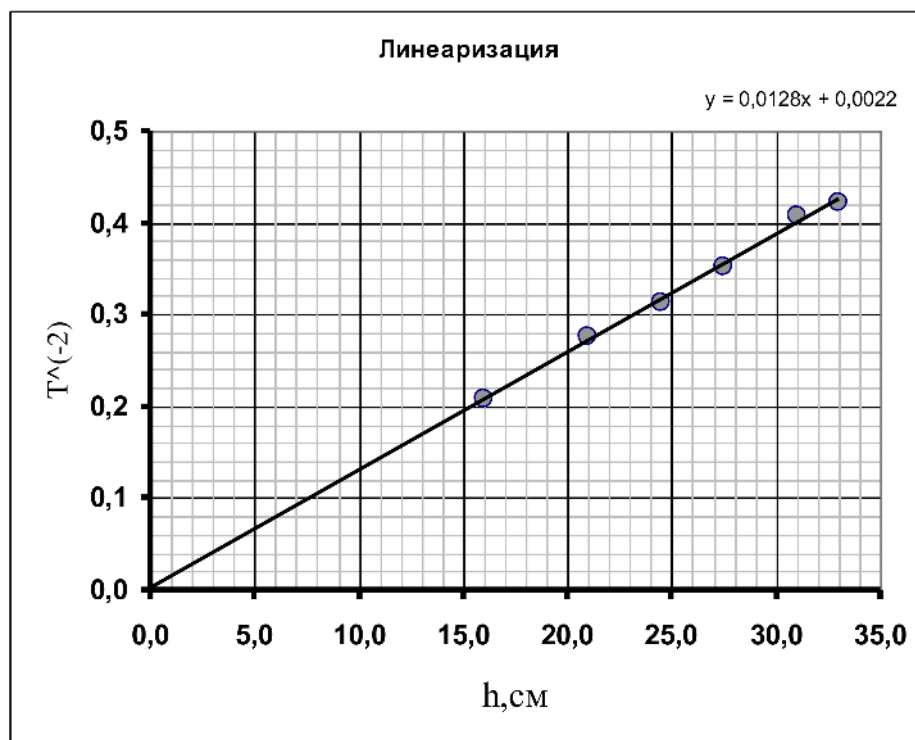
Для проверки предсказанной зависимости можно поступать различными способами. Самым предпочтительным является анализ зависимости в двойном логарифмическом масштабе. Так как  $T = Ah^\gamma$ , то

$$\ln T = \ln A + \gamma \ln h. \quad (4)$$



В этом масштабе зависимость должна быть линейной, причем коэффициент наклона равен показателю степени  $\gamma$ . График этой зависимости показан на рисунке. График, во-первых, линейный, что подтверждает степенной характер зависимости  $T(h)$  или  $T(\sin \alpha)$ . Во-вторых,

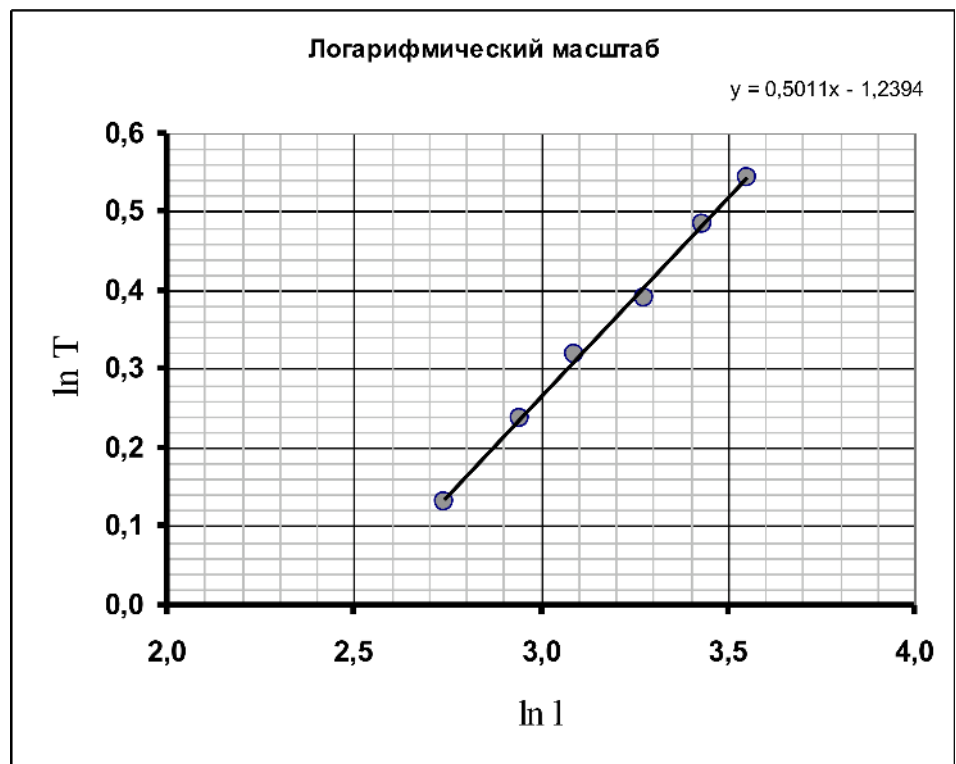
коэффициент наклона графика равен (МНК)  $\gamma = -0,50 \pm 0,02$ . Тем самым экспериментальные данные с высокой точностью подтверждают предсказанную теоретическую зависимость.



Возможны и другие виды линеаризации, например, показанная на следующем рисунке, где представлена зависимость  $T^{-2}(h)$ . Этот график также подтверждает теоретическую зависимость.

2.4 Исследования зависимости периода колебаний от длины нити проведены при высоте наклонной плоскости  $h = 26$  см. Методика проведения измерений и их обработки аналогично предыдущей. Результаты измерений приведены в таблице 2. **Таблица 2.**

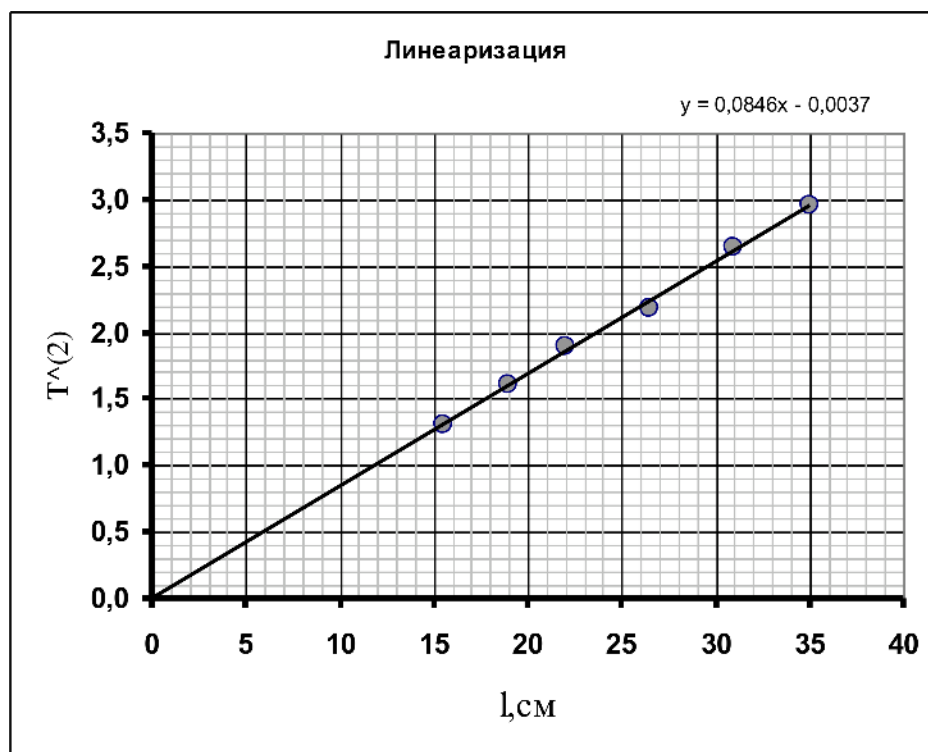
| $l$ , см | Времена 5 колебаний |           |           |           | $T$ , с | $\ln l$ | $\ln T$ | $T^2$ , с <sup>2</sup> |
|----------|---------------------|-----------|-----------|-----------|---------|---------|---------|------------------------|
|          | $t_1$ , с           | $t_2$ , с | $t_3$ , с | $t_4$ , с |         |         |         |                        |
| 35,0     | 8,59                | 8,72      | 8,51      | 8,59      | 1,721   | 3,555   | 0,543   | 2,960                  |
| 31,0     | 8,08                | 8,14      | 8,06      | 8,20      | 1,624   | 3,434   | 0,485   | 2,637                  |
| 26,5     | 7,33                | 7,40      | 7,43      | 7,37      | 1,477   | 3,277   | 0,390   | 2,180                  |
| 22,0     | 6,90                | 6,90      | 6,84      | 6,89      | 1,377   | 3,091   | 0,320   | 1,895                  |
| 19,0     | 6,33                | 6,36      | 6,36      | 6,32      | 1,269   | 2,944   | 0,238   | 1,609                  |
| 15,5     | 5,68                | 5,75      | 5,67      | 5,69      | 1,140   | 2,741   | 0,131   | 1,298                  |



И в этом случае самым надежным способом обработки является построение зависимости в двойном логарифмическом масштабе. (см. Рис). Эта зависимость также линейна. Коэффициент наклона (МНК) равен

$$\alpha = 0,50 \pm 0,03$$

Таким образом, и эта серия экспериментов подтверждает теоретическую зависимость.



Приведем пример еще одной возможной успешной линеаризации, а именно, зависимость  $T^2(l)$ , которая также однозначно свидетельствует в пользу высказанной гипотезы о характере зависимости.

2.4 Проведенные измерения подтвердили справедливость формулы для периода колебаний маятника на наклонной плоскости. Перепишем эту формулу, включив в нее непосредственно измеряемые величины (использовано выражение для синуса угла наклона плоскости)

$$T = C \sqrt{\frac{lL}{gh}}. \quad (4)$$

Для усреднения всех результатов измерений можно построить зависимость периода колебаний

От рассчитываемого параметра  $Z = \sqrt{\frac{lL}{gh}}$ . В таблице 3 приведены результаты расчетов этого параметра для обеих серий измерений. Рядом приведен график этой зависимости.

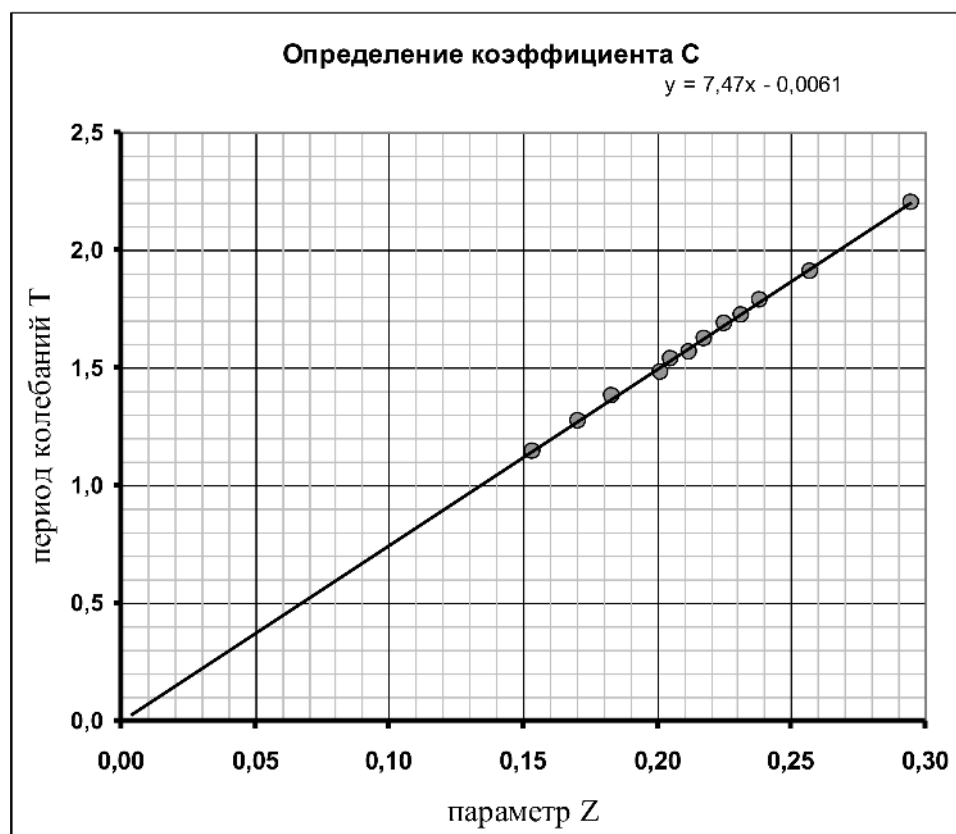


Таблица 3.

|                                 | $Z, \text{с}$ | $T, \text{с}$ |
|---------------------------------|---------------|---------------|
| Зависимость от длины нити       | 0,231         | 1,721         |
|                                 | 0,218         | 1,624         |
|                                 | 0,201         | 1,477         |
|                                 | 0,184         | 1,377         |
|                                 | 0,171         | 1,269         |
|                                 | 0,154         | 1,140         |
| Зависимость от высоты плоскости | 0,212         | 1,567         |
|                                 | 0,225         | 1,688         |
|                                 | 0,238         | 1,789         |
|                                 | 0,258         | 1,907         |
|                                 | 0,295         | 2,197         |
|                                 | 0,205         | 1,539         |

Этот график показывает, что результаты всех измерений прекрасно согласуются между собой. Коэффициенты этой зависимости, рассчитанные по МНК, оказались равными

$$a = 7,47 \pm 0,18$$

$$b = -0,01 \pm 0,04.$$

Расчет показывает, что зависимость является прямо пропорциональной. Коэффициент пропорциональности равен

$$C = 7,47 \pm 0,18.$$

*Отметим, что данный коэффициент отличен от  $2\pi$ . Это связано с тем, что в процессе движения шарик катается по наклонной плоскости. Теоретическое значение этого коэффициента*

$$\overline{C} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}} \approx 7,43.$$

*Таким образом, и численное значение измеренного коэффициента совпадает с теоретическим значением.*

---

<sup>1</sup> Не путайте показатели степеней с углами!